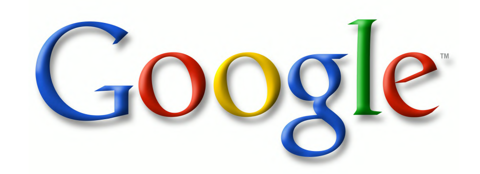
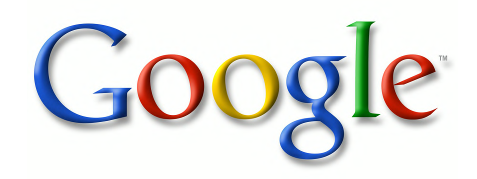
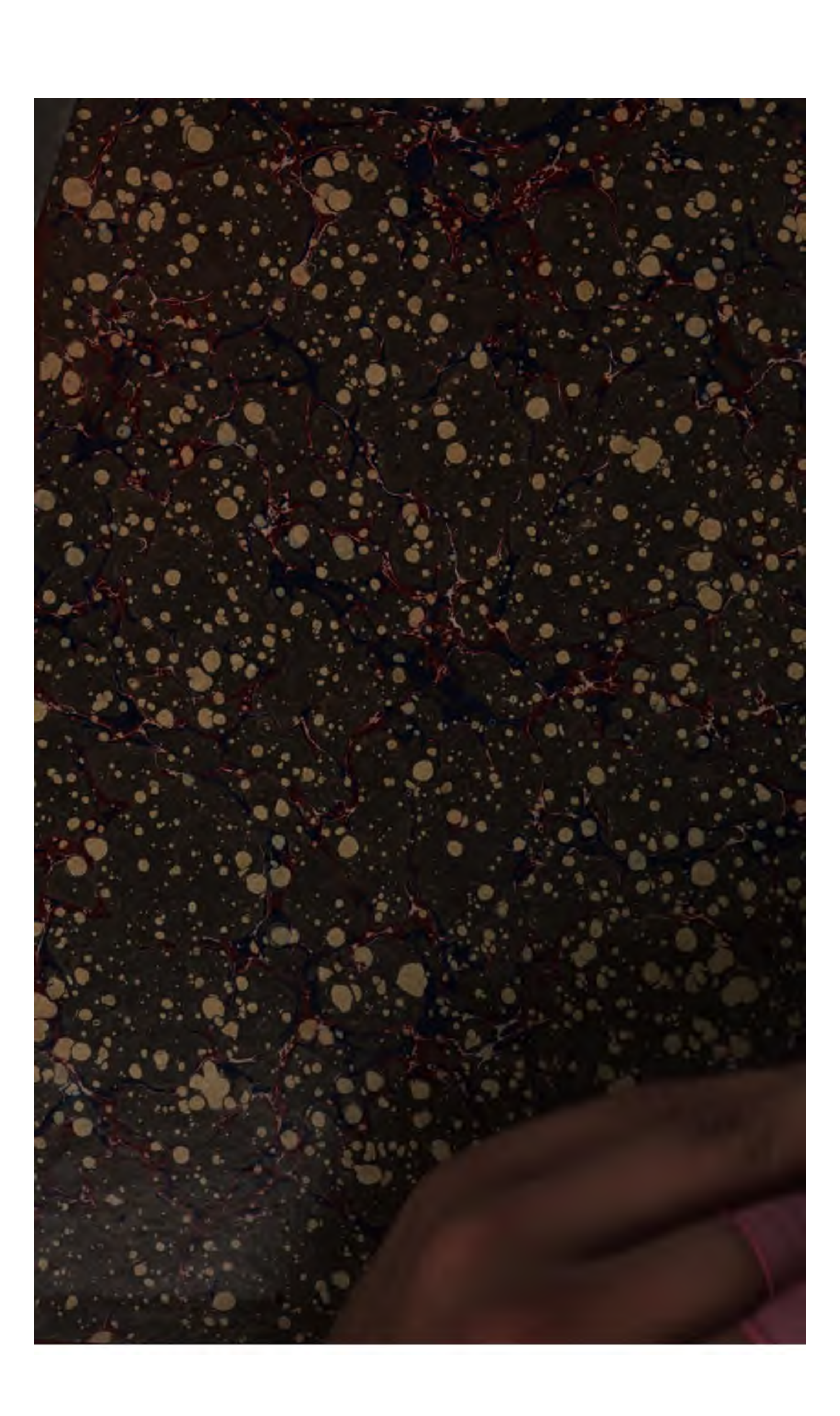












BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

[redacted]

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL,
GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION,
MOLK, POKROVSKY, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXIII. — ANNÉE 1899.

(TOME XXXIV DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899



BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MANSION (P.). — MÉLANGES MATHÉMATIQUES (1883-1898). — I. *Histoire, Esquisses biographiques*. II. *Analyse algébrique, Analyse infinitésimale*. III. *Géométrie euclidienne et non euclidienne*. Un vol. in-8°; IV-56 p. Paris, Gauthier-Villars, 1898.

Ce Livre, comme l'indique le titre, est une réunion d'articles très divers, mais dont la réunion même renseigne le lecteur sur les goûts de M. Mansion, qui sont ceux d'un philosophe, d'un historien, d'un savant, d'un curieux et d'un professeur. Les questions de principe le préoccupent peut-être avant tout, comme le prouvent les nombreux articles sur les diverses Géométries, et ceux aussi qu'il a consacrés à divers points de l'histoire des Sciences, qui touchent presque tous à des problèmes philosophiques; l'histoire ancienne ne l'empêche pas de s'intéresser à ses contemporains, et il a esquissé la vie de quelques-uns d'entre eux; on trouvera dans ses Mélanges plusieurs démonstrations vraiment simples et élégantes de propositions importantes d'Analyse; mais il ne craindra pas de s'arrêter quelque temps sur la formule approchée

$$\frac{B}{172} = \frac{b}{c+2a},$$

qui donne, à très peu près, la valeur exprimée en degrés de l'angle B d'un triangle rectangle; enfin la préoccupation de l'ordre, de la rigueur, de la simplicité dans l'enseignement ne le quitte jamais. J. T.

CANTOR (M.). — Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens. Un vol. in-8°; x-136 p. Leipzig, Teubner, 1898.

Ce petit Livre, fort intéressant, est sorti d'un Cours de douze leçons que M. Moritz Cantor fait chaque année à l'Université de Heidelberg aux étudiants en Économie politique. Dans les différents pays, les maîtres qui enseignent dans les Universités sentent la nécessité de se détourner un peu vers les choses réelles, et il est juste de dire que quelques-uns de ceux qui ressentent avec plus de vivacité le désir d'être *utiles,* dans le sens le plus vulgaire du mot, se trouvent avoir beaucoup fait pour le progrès de la Science pure : celle-ci, sans doute, restera leur objet de prédilection; mais il n'est pas indispensable, pour aimer une science, d'en mépriser les applications et d'ignorer les problèmes que pose la réalité. Quoi qu'il en soit, l'exemple de M. Cantor mérite d'être suivi, et, à qui voudrait l'imiter, son Livre fournirait un cadre commode, un modèle de clarté et de précieux renseignements historiques.

Les premiers Chapitres, sur l'intérêt simple et composé, sont très [redacted]

actuaires. Bien des gens n'ont pas trouvé l'occasion de satisfaire la curiosité, qui les a traversés pendant quelques minutes, de savoir comment se fait le calcul des primes d'assurances, ou du montant des rentes viagères. Si même les législateurs ou les administrateurs avaient la notion des problèmes que les Tables de mortalité permettent de poser et de résoudre, les règles pour l'avancement des fonctionnaires à l'ancienneté, le règlement des retraites causeraient peut-être moins de mécomptes, soit aux contribuables, soit aux intéressés. Si tous ceux qui ont besoin de savoir ce qui se trouve dans le Livre de M. Cantor veulent le lire, on peut être assuré qu'il aura de nombreuses éditions. Il le mériterait d'autant plus que l'auteur a pris grand soin d'en rendre la lecture non seulement facile à ceux qui savent peu de Mathématiques, mais encore agréable. J'ai déjà dit qu'on y trouvait de nombreux et très intéressants renseignements historiques, dont il est inutile de dire, étant donné l'auteur, qu'ils inspirent pleine confiance; mais M. Cantor a bien voulu aller jusqu'à l'anecdote : il nous conte, par exemple, que Gauss aimait fort à jouer au whist; qu'il tenait note, sur un registre spécial, du nombre d'as qu'il avait à chaque coup; qu'il compta, après un nombre respectable d'années, combien de fois il avait eu 0, 1, 2, 3, 4 as et que les rapports de ces nombres de fois se sont trouvés conformes aux règles du Calcul des probabilités. On m'a fait observer qu'il y avait, dans cette concordance, une forte raison de croire à l'honnêteté des partenaires de Gauss, et de Gauss luimême, pendant qu'ils donnaient les cartes. Je ne crois pas, d'ailleurs, qu'on ait émis de doute à ce sujet. J. T.

VIVANTI (G.). — CORSO DI CALCOLO INFINITESIMALE. 1 vol. in-8°; 576 p. Messine, Trimarchi; 1899.

Ce cours de Calcul infinitésimal a un caractère élémentaire; l'auteur s'est limité au cas des variables réelles; il s'est borné, dans chaque théorie, à ce qu'il y a de plus essentiel, et a toujours choisi, pour les appliquer, des exemples très simples; mais il se distingue par un grand souci de la précision et de la vraie clarté.

Au reste, on sait que les géomètres italiens ont pris une part très active et heureuse au travail critique dont les fondements des Mathématiques ont été l'objet, et au progrès dans l'enseignement qui devait en être la conséquence. Pour nous borner à l'Analyse, il nous suffira de rappeler ici les recherches déjà anciennes de M. Dini et le Livre classique de MM. Genocchi et Peano. M. G. Vivanti a publié lui-même, il y a quelques années, un très intéressant travail sur le concept de l'infini et ses applications aux Mathématiques : dans le Livre que nous annonçons, il n'est pas difficile de reconnaître que l'auteur est de ceux qui aimeraient à philosopher; mais, cette fois, c'est l'enseignement proprement dit qui le préoccupe; il écarte, autant qu'il le peut, ces subtilités qui ne sont pas l'affaire des commençants auxquels il s'adresse; mais il a tenu à donner toujours des définitions bien nettes, et à dire tout ce qu'il fallait pour qu'elles fussent claires; c'est ainsi qu'il a repris, au début, la notion de nombre irrationnel, au sens de M. Dedekind, et les propositions fondamentales concernant les limites; il a énoncé, dans chaque cas particulier, les conditions précises sous lesquelles sont valables les résultats qu'il annonce; si même ces conditions ne sont pas nécessaires, il a pris soin d'en avertir le lecteur. C'est dans cet esprit que sont étudiés, par exemple, les intégrales définies, les fonctions implicites, les maxima et les minima des fonctions de plusieurs variables, les notions d'arc de courbe, d'aire d'une surface courbe, etc. Au reste, M. Vivanti a évité sagement l'abus des abstractions analytiques : les interprétations et applications géométriques sont toujours voisines des propositions d'Analyse. L'auteur a laissé de [redacted]

dont il a tenu à faire connaître la pratique; il s'est expliqué à ce sujet avec une entière franchise dont les étudiants lui sauront certainement gré. Il n'y a pas d'inconvénient à donner à ces derniers un enseignement incomplet, à leur exposer une démonstration qui n'est pas rigoureuse, du moment qu'ils sont avertis. C'est souvent le seul moyen de leur donner un instrument dont ils ont besoin et dont ils peuvent se servir sans le connaître parfaitement. Si l'on excite ainsi leur curiosité et leur désir d'en savoir davantage, c'est tout bénéfice. Le meilleur enseignement est, à coup sûr, celui qui éclaircit tout, mais le pire est peut-être celui qui masque les difficultés et les imperfections des démonstrations, parce qu'il risque de fausser, non seulement l'intelligence de l'étudiant, mais le jugement même que ce dernier porte sur sa propre intelligence : s'il croit avoir parfaitement compris une démonstration imparfaite, l'étudiant aura de sa valeur intellectuelle une opinion exagérée; pour celui qui est vraiment intelligent et qui éprouvera, devant cette même démonstration, un trouble qu'il ne parvient ni à dissiper, ni à s'expliquer, il en résultera une dépression tout aussi fâcheuse. Quant à reprocher à M. Vivanti de n'avoir pas réussi à donner, en seize pages, une exposition rigoureuse du Calcul des variations, personne assurément n'y songera.

Les matières traitées par M. Vivanti se retrouvent dans tous les Ouvrages sur le Calcul différentiel et intégral et l'on nous permettra de ne pas en faire l'énumération. Nous nous bornerons à dire un mot de l'ordre adopté : l'Ouvrage comprend cinq Parties : la première est consacrée aux notions préliminaires; la deuxième aux dérivées et intégrales des fonctions d'une variable; la troisième aux dérivées et intégrales des fonctions de plusieurs variables; la quatrième aux applications géométriques; la cinquième aux équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles. On voit que l'auteur a mêlé systématiquement le Calcul différentiel et le Calcul intégral; on peut donner, pour justifier ce mélange, beaucoup de raisons; M. Vivanti s'est borné à en signaler une qui, au point de vue pratique, est très forte : En enseiguant les choses dans l'ordre qu'il a suivi, l'étudiant peut être exercé plus tôt et plus longtemps aux intégrations; le champ des exercices qu'on peut lui fournir est plus vaste, plus varié et plus intéressant. J. T.

MÉLANGES.

SUR LES INVARIANTS PROJECTIFS D'UN SYSTÈME DE $m+1$ POINTS DANS L'ESPACE A $n+1$ DIMENSIONS;

PAR M. E.-O. LOVETT.

D'après la théorie de Lie (¹), les invariants différentiels du $n^{\text{ième}}$ ordre d'un groupe de transformations ponctuelles à r paramètres, dans l'espace à $n+1$ dimensions, sont les solutions du système complet d'équations aux dérivées partielles formé en égalant à zéro les nommées $m^{\text{ièmes}}$ prolongations des r transformations indépendantes infinitésimales ponctuelles qui engendrent le groupe.

Soient les r transformations indépendantes infinitésimales du groupe à r paramètres

$$(1)\qquad X_s f = \sum_{0}^{n}{}_i\, \xi_{s,i}(x_0, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f(x_0, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}, \qquad s = 1, \ldots, r.$$

Les secondes prolongations de ces transformations peuvent être écrites sous la forme

$$(2)\qquad X''_s f = \sum_{0}^{n}{}_i\, \xi_{s,i}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{1}^{n}{}_i\, \eta_{s,0,i}\frac{\partial f}{\partial x_{0,i}} + \sum_{1}^{n}{}_i\sum_{1}^{n}{}_j\, \zeta_{s,0,i,j}\frac{\partial f}{\partial x_{0,i,j}},$$



[redacted]

déterminées par les équations

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta x_i}{\delta t} = \xi_{s,i}, & \dfrac{\delta}{\delta t}\left(dx_0 - \sum_1^n {}^j x_{0,j}\, dx_j\right) = 0, \\ \dfrac{\delta}{\delta t}\left(dx_{0,j} - \sum_1^n {}^k x_{0,j,k}\, dx_k\right) = 0, & j = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

$$x_0 = x_0(x_1, \ldots, x_n), \quad \xi_{s,j,k} = \frac{\partial \xi_{s,j}}{\partial x_k}, \quad x_{0,j} = \frac{\partial x_0}{\partial x_j}, \quad x_{0,j,k} = \frac{\partial^2 x_0}{\partial x_j\, \partial x_k} = x_{0,k,j}.$$

Le groupe général projectif est engendré par les $(n+1)(n+3)$ transformations indépendantes infinitésimales ponctuelles

$$(5)\quad \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad x_i \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad x_i \sum_0^n {}^j x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}, \qquad i, j, k = 0, 1, \ldots, n.$$

Soit un système de $m+1$ points dans l'espace à $n+1$ dimensions, donné par les coordonnées

$$(6)\quad x_{\nu,0}, \quad x_{\nu,1}, \quad \ldots, \quad x_{\nu,n}, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n.$$

Tous les invariants différentiels du second ordre du système (6) par le groupe (5) sont des solutions du système complet formé par les équations aux dérivées partielles qui peuvent s'écrire plus commodément comme il s'ensuit :

$$(7)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_0^m {}^\nu \frac{\partial f}{\partial x_{\nu,i}} = 0, \qquad \sum_0^m {}^\nu \left(x_{\nu,j} \frac{\partial f}{\partial x_{\nu,0}} + \frac{\partial f}{\partial x_{\nu,0,j}}\right) = 0, \\ \qquad\qquad i = 0, 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, n; \\ \displaystyle\sum_0^m {}^\nu \left(x_{\nu,l} \frac{\partial f}{\partial x_{\nu,j}} - x_{\nu,0,j} \frac{\partial f}{\partial x_{\nu,0,l}} - x_{\nu,0,j,j} \frac{\partial f}{\partial x_{\nu,0,l,j}} \right. \\ \qquad\qquad \displaystyle\left. - 2 x_{\nu,0,l,j} \frac{\partial f}{\partial x_{\nu,0,l,l}}\right) = 0, \\ \qquad\qquad l \neq j, \quad l, j = 1, \ldots, n; \\ \displaystyle\sum_0^m {}^\nu \left(x_{\nu,l} \frac{\partial f}{\partial x_{\nu,l}} - x_{\nu,0,l} \frac{\partial f}{\partial x_{\nu,0,l}} - x_{\nu,0,l,l} \frac{\partial f}{\partial x_{\nu,0,l,l}} \right. \\ \qquad\qquad \displaystyle\left. - \sum_0^m {}^l x_{\nu,0,l,j} \frac{\partial f}{\partial x_{\nu,0,l,j}}\right) = 0, \\ \qquad\qquad l = 1, \ldots, n; \end{cases}$$

$$
(7)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\sum_0^m{}^{\nu}\left(x_{\nu,0}\frac{\partial f}{\partial x_{\nu,0}}+\sum_1^n{}^{i}x_{\nu,0,i}\frac{\partial f}{\partial x_{\nu,0,i}}+\sum_1^n{}^{j}\sum_1^n{}^{k}x_{\nu,0,j,k}\frac{\partial f}{\partial x_{\nu,0,j,k}}\right)=0;\\
&\sum_0^m{}^{\nu}\Bigg[x_{\nu,0}\frac{\partial f}{\partial x_{\nu,l}}-\sum_1^n{}^{k}x_{\nu,0,l}x_{\nu,0,k}\frac{\partial f}{\partial x_{\nu,0,k}}\\
&\qquad-\sum_1^n{}^{i}\sum_1^n{}^{j}(x_{\nu,0,i}x_{\nu,0,l,j}\\
&\qquad\qquad+x_{\nu,0,j}x_{\nu,0,i,l}+x_{\nu,0,l}x_{\nu,0,i,j})\frac{\partial f}{\partial x_{\nu,0,i,j}}\Bigg]=0,\\
&\qquad\qquad l=1,\ldots,n;\\
&\sum_0^m{}^{\nu}\Bigg\{x_{\nu,0}\sum_1^n{}^{i}x_{\nu,i}\frac{\partial f}{\partial x_{\nu,i}}\\
&\qquad+\sum_1^n{}^{k}x_{\nu,0,k}\left(x_{\nu,0}-\sum_1^n{}^{j}x_{\nu,j}x_{\nu,0,j}\right)\frac{\partial f}{\partial x_{\nu,0,k}}\\
&\qquad-\sum_1^n{}^{k}\sum_1^n{}^{l}\sum_1^n{}^{j}[x_{\nu,j}(x_{\nu,0,k}x_{\nu,0,j,l}\\
&\qquad\qquad+x_{\nu,0,l}x_{\nu,0,k,j}+x_{\nu,0,j}x_{\nu,0,k,l})]\Bigg\}=0;\\
&\sum_0^m{}^{\nu}\Bigg[x_{\nu,\rho}\sum_1^n{}^{i}x_{\nu,i}\frac{\partial f}{\partial x_{\nu,i}}\\
&\qquad+\left(x_{\nu,0}-\sum_1^n{}^{j}x_{\nu,j}x_{\nu,0,j}\right)\frac{\partial f}{\partial x_{\nu,0,\rho}}
\end{aligned}\right.
$$

[redacted]

de $m+1$ points et leurs dérivées

$$(8)\qquad \left\{ \sum_{0}^{m}{}_i \frac{|x_{k,0,1,1}, x_{k,0,2,2}, \ldots, x_{k,0,n,n}|}{|x_{i,0,1,1}, x_{i,0,2,2}, \ldots, x_{i,0,n,n}|} \left\{ \frac{x_{i,0} - x_{k,0} - \sum_{1}^{n}{}_j x_{i,0,j}(x_{i,j} - x_{k,j})}{x_{i,0} - x_{k,0} - \sum_{1}^{n}{}_j x_{k,0,j}(x_{i,j} - x_{k,j})} \right\}^{n+2} \right\},$$

$$k = 0, 1, \ldots, m,$$

sont des invariants absolus par le groupe général projectif de l'espace à $n+1$ dimensions.

En notant que la relation [1]

$$(-1)^n |x_{k,0,1,1}, x_{k,0,2,2}, \ldots, x_{k,0,n,n}| = A_k^{n+2} G_k$$

existe, où G_k est la courbure gaussienne généralisée par Kronecker [2] et

$$s_k^2 = 1 + \sum_{1}^{n}{}_j (x_{k,0,j})^2,$$

nous avons comme résultat l'interprétation géométrique suivante des $m+1$ invariants (8) :

Que l'on prenne des $m+1$ hypersurfaces dans l'espace à $n+1$ dimensions choisies absolument arbitrairement, sauf qu'une surface doit passer par chacun des $m+1$ points du système (6); que $\rho_{i,1}, \ldots, \rho_{i,n}$ soient les rayons de courbure principaux de l'hypersurface par le point $(x_{i,0}, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n})$ à ce point; prenez un point quelconque du système et joignez-le par des lignes droites à tous les autres points du système; que θ_i soit l'angle à $(x_{k,0}, \ldots, x_{k,n})$ entre la normale de l'hypersurface par $(x_{k,0}, \ldots, x_{k,n})$ et la droite joignant $(x_{k,0}, \ldots, x_{k,n})$ à $(x_{i,0}, \ldots, x_{i,n})$, et que φ_i soit l'angle entre cette dernière ligne et la normale du point $(x_{i,0}, \ldots, x_{i,n})$ de l'hypersurface par ce

(1) BEEZ, *Mathematische Annalen*, Bd. VII.
(2) *Berichte der Berliner Akademie der Wissenschaften*, 1869.

point; alors les expressions (8) montrent que les formes

$$\sum_0^m{}_i \frac{\rho_{k,1}\rho_{k,2}\ldots\rho_{k,n}\cos^{n+2}\theta_i}{\prod\limits_{j=1}^{j=n}\rho_{i,j}\cos^{n+2}\varphi_i}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m,$$

sont des constantes absolues.

Quand les $m+1$ points sont sur une ligne droite, ces $m+1$ invariants se réduisent aux formes plus simples

$$\sum_0^m{}_i \frac{\prod\limits_{j=1}^{j=n}\rho_{k,j}\cos^{n+2}\theta_k}{\prod\limits_{j=1}^{j=n}\rho_{i,j}\cos^{n+2}\theta_i}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m.$$

Si les $m+1$ points sont collinéaires et que les hypersurfaces soient choisies à avoir parallèles leurs plans tangents à ces points respectifs, les invariants deviennent

$$\sum_0^m{}_i \left(\prod_{j=1}^{j=n}\rho_{k,j} \middle| \prod_{j=1}^{j=n}\rho_{i,j} \right).$$

Si les $m+1$ points sont sur une hypersurface du $(m+1)^{\text{ième}}$ degré et une ligne droite, simultanément, nous avons

[redacted]

relation

$$M^2 = \frac{G + C}{2}$$

où G est la courbure totale de Gauss, M la courbure moyenne de Sophie Germain et C la courbure de Casorati.

Toutefois, dans l'espace de dimensions plus hautes, les interprétations dans les termes de M et de C perdent la simplicité présentée dans celles en termes de G. Ce fait est une autre indication de la sagesse de vue de M. Darboux (¹) en caractérisant la courbure totale comme l'idée de la courbure la plus importante pour la Géométrie.

Les invariants susnommés prennent des formes intéressantes quand un nombre de points ou un nombre d'hypersurfaces coïncident. Le lecteur reconnaîtra de différents théorèmes connus, en deux ou trois dimensions, comme des cas particuliers des théorèmes donnés ci-dessus. On peut aussi ajouter que les théorèmes de cette Note fournissent la généralisation complète de certains théorèmes que l'auteur a présentés dans une Note acceptée pour la publication dans *The american Journal of Mathematics*.

Outre les invariants cités, le système a au moins

$$\frac{n(n+5)(m+1) - 2(n+1)(n+3)}{2}$$

invariants, mais ceux-ci ne se sont pas montrés posséder un intérêt géométrique important.

(¹) *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces*, t. II, p. 365.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Darboux (G.). — *Cours de Géométrie de la Faculté des Sciences. Leçons sur les systèmes orthogonaux et sur les coordonnées curvilignes*, t. I. In-8°, 344 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Fischer (J.). — *A brief Introduction to the infinitesimal Calculus*. In-12. London, Macmillan. 4 sh.

Hadamard (J.).— *Leçons de Géométrie élémentaire (Géométrie plane)*. In-8°, xvi-308 p. avec fig. Paris, Colin et Co. 6 fr.

Howe (H.-A.). — *Elements of Descriptive Astronomy*. In-8°, 352 p. London, Philip. 7 sh. 6 d.

Jaderin, ... — *Méthode pour la mensuration des bases géodésiques au moyen des fils métalliques*. In-4°, 55 p. avec fig. Paris, Impr. nationale.

Jahrbuch Berliner astronomisches f. 1900, *mit Angaben für die Oppositionen der Planeten* (1) — (423) *f.* 1898, Herausgeg. von dem königl. astronom. Rechen-Institute unter Leitung von J. Bauschinger. 125 Bd. gr. in-8°, x-520 et 8 p. Berlin, Dümmler. 12 m.

Klein (F.). — *Conférences sur les Mathématiques faites au congrès de Mathématiques, tenu à l'occasion de l'Exposition de Chicago*. Traduit par L. Laugel. Paris, Hermann.

Laisant (C.-A.). — *La Mathématique (philosophie, enseignement)*.

[redacted]

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BURKHARDT (H.) und MEYER (Fr.). — Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. — Mit Unterstützung der Akademeien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. — Erster Teil : *Reine Mathematik*. — Erster Band : *Arithmetik und Algebra*. Redigirt *von W. Franz Meyer*. Erstes Heft. Un vol. in-8°; 112 p. Leipzig, Teubner, 1898.

Cette Encyclopédie aura sa place dans toutes les bibliothèques mathématiques. Le temps est venu, sans aucun doute, de dresser, dans un ordre méthodique, le Tableau des connaissances essentielles qui sont acquises et d'en indiquer les sources principales : autrement, l'étude de la Science et le travail de recherches deviendraient bientôt impossibles, puisqu'on ne peut ni posséder, ni même lire tous les Livres et tous les Mémoires : après les études élémentaires, le plus difficile est souvent de savoir ce qu'il faut lire, de connaître le but que l'on veut atteindre et le chemin qui y mène. Celui qui, pour quelque partie de la Science, est arrivé dans cette région où le travail de recherches commence utilement, a souvent besoin de résultats qui appartiennent à d'autres parties de la Science, dont il n'a pu faire une étude approfondie, ou qu'il a quelque peu oubliées. Au reste les besoins des travailleurs sont trop certains et les services que rend déjà le *Synopsis* de M. Hagen, dont il convient de rappeler l'initiative méritoire, trop évidents pour qu'il y ait lieu d'insister. Si utile qu'elle apparût, l'entreprise de cette Encyclopédie avait de quoi effrayer; il fallait, pour la diriger, des hommes ayant autant de dévouement que de science, capables de grouper une élite de collaborateurs, et ne craignant pas de les stimuler; puis il fallait que l'autorité de l'œuvre fût certaine : les noms des directeurs, la compétence des collaborateurs, le patronage des grandes Compagnies scientifiques de Munich, de Vienne et de Göttingue, rassureront entièrement le lecteur sur la solidité d'une entreprise, qui sera rapidement menée à bonne fin.

La première Partie, consacrée aux Mathématiques pures, com-

prendra trois Volumes : nous donnons ci-dessous la division des matières et les noms des auteurs.

TOME I (édité par M. Fr. Meyer) : ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE.

A. *Arithmétique.*

1. Fondements de l'Arithmétique : H. Schubert.
2. Science combinatoire : E. Netto.
3. Nombres irrationnels et convergence des opérations infinies : A. Pringsheim.
4. Nombres complexes : E. Study.
5. Leçons sur les ensembles : A. Schœnflies.
6. Groupes discrets finis : H. Burkhardt.

B. *Algèbre.*

1. Fondements.
a, *b*. Fonctions rationnelles : E. Netto.
c. Formations algébriques : G. Landsberg.

2. Théorie des invariants : Fr. Meyer.
3. Équations.
a. Séparation et approximation des racines : C. Runge.
b. Fonctions rationnelles des racines : K. Vahlen.
c. Théorie de Galois et applications : G. Hölder.
d. Systèmes d'équations : K. Valhen.
f. Groupes finis de substitutions linéaires : P. Wiman.

C. *Théorie des nombres.*

1. Théorie élémentaire des nombres : P. Bachmann.
2. Théorie des formes : K. Vahlen.
3. Théorie analytique des nombres : P. Bachmann.
4. Nombres algébriques : D. Hilbert.

[redacted]

TOME II (édité par M. Burkhardt) : ANALYSE.

A. *Analyse des quantités réelles.*

1. Principes du Calcul infinitésimal : A. Pringsheim.
2. Calcul différentiel et intégral : A. Voss.
3. Intégrales définies : G. Brunel.
4. Équations différentielles ordinaires : P. Painlevé.
5. Équations aux dérivées partielles : E. von Weber.
6. Groupes continus de transformations : L. Maurer.
7. Conditions aux limites.

a. Équations différentielles ordinaires : M. Bôcher.
b. Équations aux dérivées partielles de la théorie du potentiel : H. Burkhardt et Fr. Meyer.
c. Autres équations aux dérivées partielles : A. Sommerfeld.

8. Développements en séries : H. Burkhardt et A. Sommerfeld.
9. Calcul des variations : A. Kneser.

B. *Analyse des quantités complexes.*

1. Théorie générale des fonctions : W. Osgood.
2. Fonctions algébriques et leurs intégrales : W. Wirtinger.
3. Intégrales définies : H. Burkhardt.
4. Équations différentielles linéaires : H. Burkhardt.

4 *bis*. Fonctions sphériques, etc. : A. Wangerin.

5. Équations différentielles non linéaires : P. Painlevé.
6. Fonctions inverses.

a. Fonctions elliptiques : W. Harkness.
b. Fonctions abéliennes : W. Wirtinger.
c. Fonctions automorphes : E. Fricke.

7. Fonctions thêta : A. Krazer et W. Wirtinger.
8. Équations et opérations fonctionnelles : S. Pincherle.

TOME III (édité par M. Fr. Meyer) : GÉOMÉTRIE.

A. *Géométrie pure.*

1. Principes de la Géométrie : F. Enriques.
2. Géométrie élémentaire : M. Simon.
3. Partage de l'espace et configurations : H. Steinitz.
4. *Analysis situs* : G. Brunel.
5. Fondements de la Géométrie projective : A. Schœnflies.
6. Géométrie descriptive : C. Rodenberg.
7. Géométrie de l'inversion : H. Burkhardt.

B. *Fondements de l'application de l'Algèbre et de l'Analyse à la Géométrie.*

1. Questions de principe : G. Peano.
2. Méthodes des coordonnées : A. Schœnflies.
3. Analyse géométrique : H. Burkhardt.

C. *Géométrie algébrique.*

1. Coniques : F. Dingeldey.
2. Théorie générale des courbes de degré supérieur : K. Rohn.
3. Courbes algébriques spéciales : G. Kohn.
4. Surfaces du second ordre : O. Staude.
5. Théorie générale des surfaces de degré supérieur : G. Castelnuovo et F. Enriques.
6. Surfaces algébriques spéciales : Fr. Meyer.
7. Espaces à plusieurs dimensions : Ch. Segre
8. Transformations et correspondances algébriques : G. Castelnuovo et F. Enriques.
9. Géométrie des éléments spatiaux : E. Wälsch.
10. Méthodes de dénombrement : H. Zeuthen.

D. *Géométrie différentielle.*

1, 2. Application du Calcul différentiel et intégral aux courbes et aux surfaces : H. von Mangoldt.
3. Courbes sur les surfaces : R. von Lilienthal.
4. Courbes transcendantes particulières : G. Schäffers.
5. Surfaces transcendantes particulières : H. von Lilienthal.
6. Application et correspondance de deux surfaces l'une sur l'autre : A. Voss.
7. Transformations de contact : G. Schäffers.


[redacted]

semblent très convenables : avec une bonne Table des matières, l'Encyclopédie présentera tous les avantages d'un dictionnaire, sans en avoir les inconvénients trop manifestes.

Le fascicule qui vient de paraître permet de se rendre compte de la façon dont elle sera exécutée : on y trouvera, sans démonstration, mais avec les références indispensables aux sources, les faits mathématiques essentiels; les références permettront donc de trouver les démonstrations; pour plus d'un lecteur, celles-ci résulteront souvent de la juxtaposition des faits : les idées générales, les doctrines, sont analysées avec soin, et des indications historiques suffisantes permettent de se rendre compte de l'évolution de la Science. Les éditeurs se sont d'ailleurs permis, avec raison, d'introduire les abréviations qui ne nuisent pas à la clarté : ils sentent la nécessité de ne pas faire une œuvre démesurée.

L'analyse proprement dite d'un tel Livre est impossible : nous en reproduisons ci-dessous une page, prise à peu près au hasard, de manière que le lecteur puisse se rendre compte de la richesse des renseignements qu'il trouvera dans cette Encyclopédie et de l'esprit dans lequel elle est faite : il s'agit des déterminants :

21. Composition et Produit. — Le produit d'un D. du $m^{\text{ième}}$ et d'un D. du $n^{\text{ième}}$ degré se met aisément sous la forme d'un D. du $m+n^{\text{ième}}$ degré en les juxtaposant de manière que les diagonales se suivent (théorème de Laplace). J.-Ph.-M. Binet et A.-L. Cauchy ont représenté le produit de deux D. du $n^{\text{ième}}$ degré par un D. du $n^{\text{ième}}$ degré (¹). En même temps, ils ont donné l'extension suivante : avec deux systèmes a_{ik}, b_{ik} on forme un troisième c_{ik}, *composé*,

$$a_{ik}\,(i=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,n);\ b_{ik}(i=1,\ldots,n;\ k=1,\ldots,m),$$

$$c_{ik}=\sum_{\lambda} a_{i\lambda}b_{\lambda k}(i=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,m;\ \lambda=1,\ldots,n);$$

alors $|c_{ik}|=0$ pour $m>n$; puis $|c_{ik}|=|a_{ik}|\,|b_{ik}|$ pour $m=n$; et, enfin, pour $m<n$, $|c_{ik}|=\sum_{t}|a_{it}|\,|b_{it}|$, où t parcourt toutes

(¹) *J. de l'Éc. Polyt.*, Cah. 16 (1812), p. 280; Cah. 17 (1812), p. 291.

les combinaisons possibles de la $m^{\text{ième}}$ classe formées avec 1, 2, ..., n. Le cas moyen donne la règle de multiplication (1).

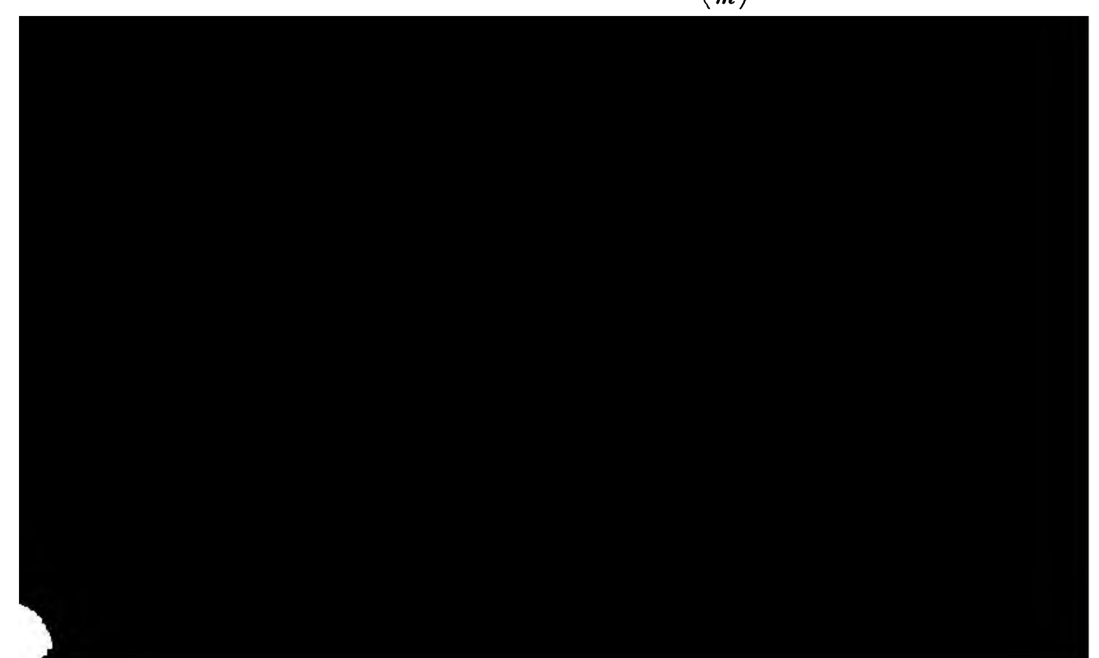
Les divers arrangements des él. en l. et col. donnent quatre formes différentes pour le produit (2). A cette représentation se rattachent d'importantes formules d'Analyse et de Théorie des nombres (3).

22. Autre mode de composition. — Kronecker (4) a fait remarquer un autre mode de composition : a_{ik} $(i, k = 1, \ldots, m)$ et b_{gh} $(g, h = 1, \ldots, n)$ sont composés en $c_{pq} = a_{ik} b_{gh}$

$$[p = (i-1)n + g;\ q = (k-1)n + h;\ i, k = 1, \ldots, m;\ g, h = 1, \ldots, n].$$

Alors on a $|c_{pq}| = |a_{ik}|^n\,|b_{gh}|^m$.

23. Déterminants composés. — L'étude des D. *composés*, c'est-à-dire des D. dont les éléments sont eux-mêmes des D. formés d'après certaines lois, offre un intérêt particulier. Tout d'abord on rencontre l'étude du D. formé avec les él. a'_{ik}, c'est-à-dire avec les adjoints des a_{ik}. Cauchy (5) a donné la valeur pour $|a'_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$. *Jacobi* (6), plus généralement pour $|a'_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, m;\ m < n)$. Dans le premier cas, on a une puissance du D.; dans le second, une telle puissance multipliée par un sous-dét. $|a_{ik}|$. Ces théorèmes ont été étendus par Franke (7). Au lieu des a'_{ik} on considère les sous-dét. du $m^{\text{ième}}$ degré p_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, \mu)$ où $\mu = \binom{n}{m}$ et où le numérotage



est étendu à tous les μ sous-dét. du $m^{\text{ième}}$ degré du D. Soit ensuite p'_{ik} adjoint à p_{ik}; c'est-à-dire que p'_{ik} est un sous-dét. du $(n-m)^{\text{ième}}$ degré de $|a_{ik}|$ et que le produit des termes principaux dans p_{ik} et p'_{ik} est un terme de $|a_{ik}|$. On a alors

$$|p_{ik}| = \mathrm{D}^{\binom{n-1}{m-1}}, \qquad |p'_{ik}| = \mathrm{D}^{\binom{n-1}{m}};$$

les sous-dét. de $|p'_{ik}|$ se représentent sous la même forme que Jacobi a donnée aux sous-dét. de $|a'_{ik}|$ (1).

Plus général encore est le théorème de *Sylvester* (2) que nous caractériserons brièvement en disant qu'il se rapporte à une certaine manière de ranger les D. $|p_{ik}|$.

Dans d'autres travaux, on compose des D. avec des suites de deux D. donnés et l'on prend ces nouveaux D. comme éléments d'un D. (3).

Cette citation suffit pour montrer jusqu'où l'on a cherché à dire beaucoup en peu de mots. Le lecteur n'a qu'à se représenter le nombre de pages qu'exigerait la démonstration des propositions indiquées ici pour voir combien serait chimérique l'entreprise d'une Encyclopédie avec démonstrations. Ce que l'on mettra en trois Volumes en exigerait sans doute soixante.

La citation précédente montre comment les auteurs entendent condenser et grouper les faits mathématiques. Elle est extraite de l'article de M. Netto sur la « Kombinatorik », qui contient les propositions essentielles de la théorie des arrangements, combinaisons, permutations, etc. et des déterminants. Il conviendrait, d'un autre côté, de montrer dans quel esprit philosophique M. Schubert a traité de la notion de nombre rationnel et des opé-

(1) C.-W. Borchardt, *J. f. Math.*, 61 (1863), p. 353-365, fait observer que ce théorème est un cas particulier d'un théorème donné antérieurement par Sylvester; Kronecker, *Berl. Ber.* (1862), p. 822, montre son identité avec le théorème de Jacobi précédemment cité. — Cf. Picquet, *Comptes rendus*, 86 (1878), p. 300. — *J. de l'Éc. Pol.*, Cah. 45 (1878), p. 201.

(2) *Phil. Mag.* (4), 1 (1851), p. 415. — Cf. Frobenius, *J. f. Math.*, 86 (1879), p. 54; *Berl. Ber.* (1894), p. 242. — Netto, *Acta Mat.*, 17 (1894), p. 201; *J. f. Math.*, 114 (1895), p. 345. — R.-F. Scott, *Lond. Proceed.*, 14 (1883), p. 91. — C.-A. v. Velzer, *Amer. J.*, 6 (1883), p. 164. — Em. Barbier, *Comptes rendus*, 96 (1883), p. 1845; *ibid.*, 97 (1883), p. 82. — E.-J. Nanson, *Lond. phil. Mag.* (5), 44 (1897), p. 396.

(3) Picquet, *loc. cit.* — G. Zehfuss, *Z. f. Math.*, 7 (1862), p. 496.

rations arithmétiques, avec quelle ampleur M. Pringsheim a exposé les idées de Cantor, Dedekind, Weierstrass, du Bois-Reymond, Kronecker sur les nombres irrationnels; avec quelle précision il a traité des concepts qui se rapportent à la notion de limite. Les quelques pages qui se rapportent aux règles de convergence, et où l'auteur s'est trouvé obligé d'analyser brièvement ses propres recherches, sont particulièrement intéressantes.

MM. Burkhardt et Meyer ont d'autant plus de mérite à avoir entrepris cette œuvre considérable qu'il leur est impossible de se faire aucune illusion sur son caractère provisoire. Sans aucun doute, leur Livre contribuera à accélérer le mouvement de création scientifique : si leur œuvre devient rapidement caduque, c'est qu'elle aura beaucoup servi; souhaitons-leur d'avoir eux-mêmes à la refondre un jour. Plus tard, dans des temps qu'ils ne connaîtront pas, elle acquerra une grande valeur historique.

J. T.

A. REBIÈRE. — LES SAVANTS MODERNES, LEUR VIE ET LEURS TRAVAUX.
1 vol. gr. in-8°, VIII-455 pages, Paris, Nony et Cie, 1899.

Il serait à souhaiter que tous les Mathématiciens qui ont des loisirs sussent les employer aussi fructueusement que M. Rebière, qui s'est fait l'historien des savants. Après ses deux premiers Ouvrages : *Mathématiques et Mathématiciens* et *Les Femmes dans la Science,* qui ont eu le succès que l'on sait, [redacted]

trop près des savants dont il parle pour oser exprimer une opinion personnelle!

Quoi qu'il en soit, tel qu'il est, son Volume est des plus intéressants et nous n'aurions garde d'en déprécier les grands mérites.

L'Ouvrage débute par des Notices sommaires sur les Secrétaires perpétuels de l'Académie des Sciences. Les Secrétaires actuels, MM. Joseph Bertrand et Berthelot, n'y figurent qu'à titre de mémoire, car M. Rebière s'est fait une règle absolue de ne parler que des savants décédés.

Après cette rapide énumération, le Volume est partagé en trois Parties : Les Mathématiciens et les Astronomes, les Physiciens et les Chimistes, les Naturalistes. Dans chaque catégorie, l'auteur passe en revue tous ceux qui ont illustré la Science et que la Science a rendus illustres. Ils sont soixante-quatre : de Cassini à Chasles et Le Verrier pour les Mathématiques, de Mariotte à Pasteur en Physique, de Tournefort à Claude Bernard pour les Naturalistes.

Cette classification des savants en trois classes est peut-être un peu artificielle. Nous savons bien qu'il faut adopter un plan et mettre de l'ordre en toutes choses; mais, pour notre part, nous aurions préféré simplement l'ordre chronologique ou alphabétique à cet étiquetage difficile et nécessairement incomplet.

Voici Pasteur qui figure parmi les Physiciens. Il est vrai qu'il fut, au début, un Minéralogiste et qu'il entra à ce titre à l'Académie; mais sont-ce ses travaux sur les tartrates qui l'ont rendu célèbre? Voici encore Ampère qui est classé parmi les Physiciens. Or, ne fût-ce pas, au premier chef, un Mathématicien et des meilleurs? Chacun sait qu'il était un expérimentateur maladroit et un analyste subtil et profond.

Ceci, bien entendu, n'est qu'une observation sans grande portée, qui ne veut, en aucune façon, diminuer l'œuvre de M. Rebière. La critique n'est-elle pas, d'ailleurs, une preuve de la sincérité des éloges? Et nous ne saurions trop en faire : à l'auteur qui a su nous donner dans ces courtes études des idées claires et précises sur les travaux de tous ces hommes illustres, aux éditeurs qui ont pris soin de nous présenter un volume agréable à l'œil et orné d'un grand nombre de portraits authentiques.

C. Bourlet.

MÉLANGES.

NOTE SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LAPLACE ET SUR UNE FORMULE D'ABEL;

PAR M. C. CAILLER,
Professeur à l'Université de Genève.

La formule d'Abel dont il s'agit ici est celle de la fin de la page 99 de ses Œuvres (éd. de MM. Sylow et Lie, 1er vol.), au moyen de laquelle l'auteur résout l'équation fonctionnelle

$$\int_0^x \frac{f'(z)\,dz}{(x-z)^n} = \psi(x)$$

par rapport à la fonction inconnue $f(x)$. La formule est susceptible d'une vérification directe fort simple; mais la lecture des Mémoires II et IX d'Abel (1er vol., p. 11-18 et 97-101) prouve que l'illustre géomètre fut conduit à sa formule par des considérations plus ou moins rigoureuses empruntées à l'algorithme des différentielles à indices quelconques. A ce point de vue, elle s'est souvent présentée aux auteurs qui ont étudié la théorie de ces différentielles dont elle est, aujourd'hui encore, l'application la plus intéressante.

Je me propose d'indiquer ici une extension assez remarquable [redacted]



PREMIÈRE PARTIE.

Considérons une équation différentielle de Laplace de la forme

$$(a_0+b_0x)\frac{d^ny}{dx^n}+(a_1+b_1x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+(a_n+b_nx)y=0,$$

contenant $(2n+2)$ constantes a_0, a_1, a_2, ..., a_n; b_0, b_1, b_2, ..., b_n : nous nommerons les premières (a) les *paramètres*, et les secondes (b) les *modules* de l'équation. Nous représenterons souvent par $\lambda(x)$ une intégrale de l'équation précédente.

Soient maintenant deux équations de Laplace de même ordre et de modules égaux, de paramètres quelconques, $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ deux intégrales de ces équations. La fonction

$$\lambda_3(x)=\int\lambda_1(z)\,\lambda_2(x-z)\,dz$$

(l'intégrale étant prise le long d'un certain contour dans le champ de la variable complexe z entre certaines limites fixes ou variables avec x) se nommera la *résultante* des fonctions λ_1 et λ_2. On suppose, bien entendu, l'intégrale du second membre déterminée et finie, ce qui aura lieu si le contour d'intégration évite les points singuliers des fonctions $\lambda_1(z)$ et $\lambda_2(x-z)$. Dans la supposition précédente, et moyennant certaines restrictions que nous établirons plus bas, nous allons former l'équation différentielle dont dépend la résultante λ_3.

Désignons par a_0, a_1, ..., a_n les paramètres de $\lambda_1(x)$, par a'_0, a'_1, ..., a'_n ceux de $\lambda_2(x)$, et écrivons leurs équations différentielles ainsi :

$$(1)\quad x(b_0\lambda_1^{(n)}+b_1\lambda_1^{(n-1)}+b_2\lambda_1^{(n-2)}+\ldots+b_n\lambda_1)+(a_0\lambda_1^{(n)}+a_1\lambda_1^{(n-1)}+\ldots+a_n\lambda_1)=0,$$

$$(2)\quad x(b_0\lambda_2^{(n)}+b_1\lambda_2^{(n-1)}+b_2\lambda_2^{(n-2)}+\ldots+b_n\lambda_2)+(a'_0\lambda_2^{(n)}+a'_1\lambda_2^{(n-1)}+\ldots+a'_n\lambda_2)=0.$$

Dans la dernière substituons à la lettre x le binome $(x-z)$, ce qui donne lieu aux identités

$$\lambda'_2(x-z)=\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}=-\frac{\partial\lambda_2}{\partial z}$$

et généralement

$$\lambda_2^{(i)}(x-z)=\frac{\partial^i\lambda}{\partial x^i}=(-1)^i\frac{\partial^i\lambda}{\partial z^i}.$$

L'équation (2) transformée peut donc s'écrire

$$
\begin{aligned}
x\left(b_0\frac{\partial^n\lambda_2}{\partial x^n}+b_1\frac{\partial^{n-1}\lambda_2}{\partial x^{n-1}}+\ldots+b_n\lambda_2\right)
&= (-1)^n\left\{z\left[b_0\frac{\partial^n\lambda_2}{\partial z^n}-b_1\frac{\partial^{n-1}\lambda_2}{\partial z^{n-1}}+\ldots+(-1)^n b_n\lambda_2\right]\right\}\\
&\quad -(-1)^n\left[\ a'_0\frac{\partial^n\lambda_2}{\partial z^n}\ -a'_1\frac{\partial^{n-1}\lambda_2}{\partial z^{n-1}}+\ldots+(-1)^n a'_n\lambda_2\right],
\end{aligned}
$$

équation que l'on peut mettre sous une forme plus générale par la remarque suivante. Quelles que soient les indéterminées a''_0, a''_1, ..., a''_n, on a identiquement

$$
\begin{aligned}
&a''_0\frac{\partial^n\lambda_2}{\partial x^n}+a''_1\frac{\partial^{n-1}\lambda_2}{\partial x^{n-1}}+\ldots+a''_n\lambda_2\\
&=(-1)^n\left[a''_0\frac{\partial^n\lambda_2}{\partial z^n}-a''_1\frac{\partial^{n-1}\lambda_2}{\partial z^{n-1}}+\ldots+(-1)^n a''_n\lambda_2\right].
\end{aligned}
$$

En ajoutant terme à terme cette relation avec la précédente, nous obtenons pour $\lambda_2(x-z)$ une équation aux dérivées partielles avec n arbitraires a'', indépendantes des modules et des paramètres de λ_2; en outre les variables x et z s'y trouvent séparées, l'un des membres ne contenant explicitement que la lettre x, l'autre que la lettre z. Cette équation, qu'il faut écrire tout au long, est la suivante :

$$
(2\ bis)\quad
\begin{cases}
(a''_0+b_0x)\dfrac{\partial^n\lambda_2}{\partial x^n}+(a''_1+b_1x)\dfrac{\partial^{n-1}\lambda_2}{\partial x^{n-1}}+\ldots+(a''_n+b_nx)\lambda_2\\
=(-1)^n\Big[(a''_0-a'_0+b_0z)\dfrac{\partial^n\lambda_2}{\partial z^n}-(a''_1-a'_1+b_1z)\dfrac{\partial^{n-1}\lambda_2}{\partial z^{n-1}}+\ldots
\end{cases}
$$

[redacted]

Soit h_1 ce terme additionnel, il viendra

$$(a''_0 + b_0 x)\frac{d^n\lambda_3}{dx^n} + (a''_1 + b_1 x)\frac{d^{n-1}\lambda_3}{dx^{n-1}} + \ldots + (a''_n + b_n x)\lambda_3$$
$$= h_1 + \int \lambda_1(z)\Big[(a''_0 + b_0 x)\frac{\partial^n \lambda_2}{\partial x^n} + (a''_1 + b_1 x)\frac{\partial^{n-1}\lambda_2}{\partial x^{n-1}} + \ldots$$
$$+ (a''_n + b_n x)\lambda_2\Big]\,dz.$$

Remplaçant ensuite au second membre la parenthèse-crochet par sa valeur tirée de l'équation (2 *bis*), on aura

$$h_1 + \sum (-1)^{n-i}\int \lambda_1(z)(a''_i - a'_i + b_i z)\frac{\partial^{n-i}\lambda_2}{\partial z^{n-i}}\,dz \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

puis intégrant par parties et désignant par h_2 l'ensemble des termes intégrés

$$h_1 + h_2 + \int \lambda_2(x - z)\,dz \sum \frac{d^{n-i}}{dz^{n-i}}[(a''_i - a'_i + b_i z)\lambda_1]$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n),$$

ou encore

$$h_1 + h_2 + \int \lambda_2(x - z)\,dz \sum [a''_i - a'_i + (n - i + 1)b_{i-1} + b_i z]\lambda_1^{n-i}(z),$$

formule générale lorsqu'on pose par définition $b_{-1} = 0$.

Déterminons maintenant les arbitraires a''_i par la condition

$$a''_i = a_i + a'_i - (n - i + 1)b_{i-1} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

on aura

$$\sum (a''_i - a'_i + (n - i + 1)b_{i-1} + b_i z)\lambda_1^{(n-i)} = \sum (a_i + b_i z)\lambda_1^{(n-i)},$$

quantité égale à zéro d'après l'équation (1). Ainsi, en posant encore, pour abréger, $h = h_1 + h_2$, nous obtenons l'équation différentielle de la résultante $\lambda_3(x)$ sous la forme

$$(3) \quad (a''_0 + b_0 x)\lambda_3^{(n)} + (a''_1 + b_1 x)\lambda_3^{(n-1)} + \ldots + (a''_n + b_n x)\lambda_3 = h;$$

sauf le second membre h c'est une équation de Laplace.

Les intégrales de (1) et (2) désignées par λ_1 et λ_2, ainsi que les limites de l'intégrale résultante λ_3, sont restées indéterminées. Nous allons les choisir de manière à rendre nulles les deux quantités h_1 et h_2 : on a alors $h = 0$ et la résultante vérifie une équation de Laplace, de même forme que les deux composantes. Le

choix que nous allons faire n'est pas, tant s'en faut, le seul qui remplisse la condition requise : il suffira au but restreint que nous avons en vue présentement.

Nous supposerons désormais constamment $a_0 = 0$, $a'_0 = 0$, $b_0 = 1$; d'où résulte $a''_0 = 0$. La supposition a pour but de faire coïncider entre eux et avec l'origine les points critiques éventuels des fonctions composantes.

L'équation déterminante relative à l'une des composantes, la première par exemple, s'écrit

$$r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+2)(r-n+1+a_1) = 0 :$$

il existera donc une intégrale de la forme $\lambda_1(x) = x^{n-a_1-1}P(x)$, expression dans laquelle $P(x)$ désigne une série de puissances, convergente à toute distance de l'origine et assujettie, si l'on veut, à la condition accessoire $P(0) = 1$. On peut dire que cette intégrale, unique de son espèce, *appartient* à l'exposant $n - a_1 - 1$: ce seront les fonctions de cette sorte que nous représenterons désormais par le signe λ, auquel nous substituerons, en cas de besoin, le tableau des paramètres $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ou le symbole (a_i).

L'existence d'une intégrale déterminée unique appartenant à l'exposant $(n - a_1 - 1)$ a lieu sans restriction aucune si a_1 n'est pas un nombre entier. Lorsque a_1 est un entier négatif ou nul le fait reste encore exact.

Si a_1 est un entier positif au plus égal à $n - 1$, l'équation déterminante possède n racines entières dont deux égales au nombre entier $n - a_1 - 1$; si a_1 est un entier supérieur à $(n - 1)$, les ra- [redacted]

qui y figurent. La substitution de cette valeur dans l'équation différentielle (1) fournit, après quelques réductions faciles, la relation récurrente

$$b_n \alpha_{r-n} + \sum_{i=0}^{i=n-1} k_{i,r}[a_{i+1} + b_i(r-n+1)]\alpha_{r-i} = 0$$
$$(r = r, r+1, r+2, \ldots, \infty),$$

dans laquelle le coefficient k_{ir} représente, pour abréger, l'expression numérique $(r-i)(r-i-1)(r-i-2)\ldots(r-n+2)$ et doit être remplacé par l'unité pour $i = n-1$.

Prenons l'exposant initial r égal à l'une des valeurs $0, 1, \ldots, (n-2)$: chacun des coefficients du tableau

$$\begin{array}{lllll}
k_{0,r}, & & & & \\
k_{0,r+1}, & k_{1,r+1}, & & & \\
k_{0,r+2}, & k_{1,r+2}, & k_{2,r+2}, & & \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots & & \\
k_{0,n-2}, & k_{1,n-2}, & k_{2,n-2}, & \ldots, & k_{n-r-2,n-2},
\end{array}$$

est nul, tandis que les suivants $k_{i,n-1}$, $k_{i,n}$, ... sont tous différents de zéro. Grâce à cette circonstance, la récurrence précédente laisse arbitraires les coefficients α_r, α_{r+1}, α_{r+2}, ..., α_{n-2} et détermine les suivants α_{n-1}, α_n, α_{n+1}, ... en fonction de ceux-ci par des formules finies donnant naissance à des séries convergentes. Le fait demeure exact, quel que soit le dernier facteur de l'équation déterminante $[a_1 + b_0(r-n+1)]$ et lors même qu'il deviendrait égal à l'une des expressions $r, r-1, \ldots, (r-n+2)$.

Il existe ainsi $(n-r-1)$ intégrales, linéairement indépendantes, commençant par la puissance x^r ; si l'on attribue à r les valeurs $0, 1, 2, \ldots, (n-2)$ successivement, il est clair que l'ensemble des intégrales ainsi obtenues forme un faisceau de $(n-1)$ fonctions seulement, linéairement distinctes. On peut évidemment choisir comme base du faisceau $(n-1)$ intégrales distinctes des formes suivantes

$$\begin{array}{l}
y_0 = 1 + \mu_0 x^{n-1} + \nu_0 x^n + \ldots, \\
y_1 = x + \mu_1 x^{n-1} + \nu_1 x^n + \ldots, \\
y_2 = x^2 + \mu_2 x^{n-1} + \nu_2 x^n + \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
y_{n-2} = x^{n-2} + \mu_{n-2} x^{n-1} + \nu_{n-2} x^n + \ldots.
\end{array}$$

les autres intégrales étant comprises dans la formule

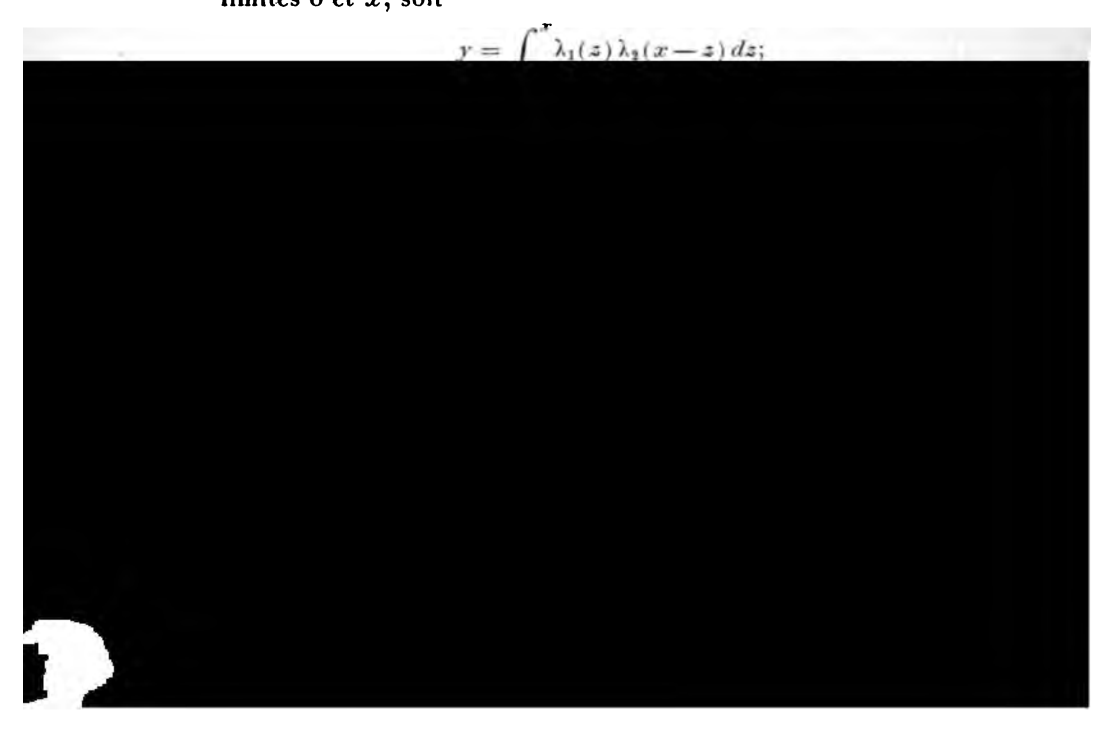
$$c_0 y_0 + c_1 y_1 + \ldots + c_{n-2} y_{n-2}.$$

Les intégrales dépendent des paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et en sont des fonctions continues, tant qu'elles restent finies : si donc, par suite de la variation de a_1, l'expression $n - a_1 - 1$, d'abord fractionnaire, converge vers l'une des valeurs entières $0, 1, \ldots, (n-2)$ ou r, l'intégrale λ_a qui appartient à l'exposant $(n - a_1 - 1)$ finira par se confondre avec l'une des intégrales du faisceau précédent : elle commencera par la puissance x^r et sera du type suivant : $c_r y_r + c_{r+1} y_{r+1} + \ldots c_{n-2} y_{n-2}$. Deux intégrales, primitivement distinctes, en fournissent donc une seule, déterminée, leur limite commune, jouant pour ainsi dire le rôle de solution double de l'équation différentielle. Cette solution double sera de nouveau dite *appartenir* à l'exposant $n - a_1 - 1$ et représentée par les symboles λ_a ou $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ou encore (a_i). Le coefficient de son premier terme est égal à l'unité.

Mais si l'exposant $(n - a_1 - 1)$ est entier et négatif, il est clair que la récurrence donnera des valeurs infinies pour les coefficients α_r. On sait qu'il n'existe plus alors d'intégrale appartenant à l'exposant $(n - a_1 - 1)$: le signe λ ou (a_i) perd dans ce cas toute signification.

Ces préliminaires achevés, considérons deux fonctions λ_1, λ_2 ou (a_i) et (a'_i), de mêmes modules, et leur résultante y entre les limites 0 et x, soit

$$y = \int^{x} \lambda_1(z)\lambda_2(x-z)\,dz;$$



lent l'une et l'autre pour $x = 0$ avec leurs $(n-1)$ premières dérivées. Dans cette hypothèse, il est alors évident que les deux parties h_1, h_2 qui forment le terme h sont séparément nulles.

En résumé, sous la double condition $a_1 < 0$, $a'_1 < 0$, il est démontré que la résultante y vérifie l'équation différentielle

$$(4)\quad xy^{(n)} + (a''_1 + b_1 x)y^{(n-1)} + (a''_2 + b_2 x)y^{(n-2)} + \ldots + (a''_n + b_n x)y = 0,$$

avec

$$a''_i = a_i + a'_i - (n - i + 1)b_{i-1} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Lorsque x est infiniment petit, il en est de même pour y et le terme principal étant évidemment égal à

$$\int_0^x z^{n-a_1-1}(x-z)^{n-a'_1-1}\,dz \quad \text{ou} \quad \frac{\Gamma(n-a_1)\,\Gamma(n-a'_1)}{\Gamma(2n-a_1-a'_1)}x^{2n-a_1-a'_1-1},$$

ou encore

$$\frac{\Gamma(n-a_1)\,\Gamma(n-a'_1)}{\Gamma(n-a''_1)}x^{n-a''_1-1},$$

on conclut que y ne diffère de l'intégrale $\lambda_{a''}$, appartenant à l'exposant $n - a''_1 - 1$, que par le facteur constant $\dfrac{\Gamma(n-a_1)\,\Gamma(n-a'_1)}{\Gamma(n-a''_1)}$. En d'autres termes, la résultante des fonctions (a_i) et (a'_i) est égale à la fonction

$$\frac{\Gamma(n-a_1)\,\Gamma(n-a'_1)}{\Gamma(n-a''_1)}[a_i + a'_i - (n-i+1)b_{i-1}]$$

Je dis de plus que la formule obtenue

$$(5)\qquad \frac{\Gamma(n-a_1)\,\Gamma(n-a'_1)}{\Gamma(n-a''_1)}\lambda_{a''}(x) = \int_0^x \lambda_a(z)\,\lambda_{a'}(x-z)\,dz$$

demeurera vraie lorsqu'on remplacera les inégalités $a_1 < 0$, $a'_1 < 0$ par celles-ci plus compréhensives $a_1 < n$, $a'_1 < n$, suffisantes d'ailleurs pour la convergence de l'intégrale.

Admettons d'abord que les nombres a_1, a'_1, a''_1 soient tous trois fractionnaires. Les séries $\lambda_a(z)$, $\lambda_{a'}(x-z)$ étant absolument convergentes, on peut former leur produit en groupant ensemble les termes de $m^{\text{ième}}$ dimension en x et z; de plus, en faisant abstraction du facteur $z^{n-a_1-1}(x-z)^{n-a'_1-1}$ commun à tous les termes et qui peut devenir infini aux limites de l'intégrale, la série

sera uniformément convergente. La différence entre le produit $\lambda_a(z)\lambda_{a'}(x-z)$ et la somme des p premiers termes de notre série peut donc se représenter par $\varepsilon_p z^{n-a_1-1}(x-z)^{n-a'_1-1}$, expression dans laquelle le facteur ε_p décroît uniformément jusqu'à zéro à mesure que p augmente. La limite de l'intégrale

$$\int_0^x \varepsilon_p z^{n-a_1-1}(x-z)^{n-a'_1-1}\,dz$$

est donc aussi zéro et l'on peut, par suite, intégrer la série terme par terme. Dans cette intégration, le terme de $m^{\text{ième}}$ dimension en x et z fournit un résultat de la forme $\dfrac{\Gamma(n-a_1)\Gamma(n-a'_1)}{\Gamma(n-a''_1)}\mathrm{A}_m x^{m+1}$ et le coefficient A_m s'exprime rationnellement en fonction des paramètres a_1 et a'_1. Or ce coefficient doit coïncider avec celui du même terme dans $\lambda_{a''}$, lorsque a_1 et a'_1 sont tous deux négatifs, l'identité (5) ayant sûrement lieu dans ces conditions : mais comme les coefficients du développement $\lambda_{a''}$ sont également rationnels en a_i et a'_i, l'identité subsiste nécessairement quelles que soient les valeurs numériques de ces coefficients.

Si même l'un ou l'autre des coefficients a_1, a'_1, a''_1 devenait entier, il n'y aurait rien à changer au fond du raisonnement précédent : la conclusion subsiste en toute circonstance, tant du moins que a_1 et a'_1 restent inférieurs à n.

Le raisonnement précédent met du reste en lumière le caractère algébrique du théorème (5) : il est équivalent à une série d'identités, de forme rationnelle, liant les coefficients des trois fonc-

[redacted]

et la fonction λ appartenant à l'exposant q se trouve égale à $\left(\frac{1}{ai}\right)^q \Gamma(1+q)(ax)^{\frac{q}{2}} J_q(2i\sqrt{ax})$, si l'on représente, comme de coutume, par $J_q(x)$ la fonction de Bessel de première espèce

$$J_q(x) = \frac{x^q}{2^q \Gamma(1+q)} \left[1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!(1+q)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!(1+q)(2+q)} - \dots \right],$$

développement dans lequel q est un nombre quelconque, positif ou négatif, supérieur à (-1). Malgré la présence des signes ambigus $x^{\frac{q}{2}}$, $\sqrt{x}$, $\left(\frac{1}{i}\right)^q$ qui figurent dans sa définition, la fonction λ est parfaitement déterminée et voici son développement en série que nous représenterons par $\varphi_q(x)$:

$$\varphi_q(x) = x^q + \frac{x^{q+1}}{1!(q+1)} + \frac{x^{q+2}}{2!(q+1)(q+2)} + \frac{x^{q+3}}{3!(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots,$$

pour le cas $a = 1$. On a d'ailleurs constamment $\lambda_a = \frac{1}{a^q} \varphi_q(ax)$ pour $a \neq 0$ et $\lambda_a = x^q$ pour $a = 0$.

Il est souvent avantageux pour la symétrie des formules d'envisager une fonction un peu plus générale que $\varphi_q(x)$, la suivante

$$x^q + \frac{x^{p+q}}{1!p(p+q)} + \frac{x^{2p+q}}{2!p^2(p+q)(2p+q)} + \dots + \frac{x^{np+q}}{n!p^n\alpha_n} + \dots,$$

avec $\alpha_n = (p+q)(2p+q)(3p+q)\dots(np+q)$. Nous la représenterons par $\varphi(x;\, p,\, q)$ ou $\varphi_{p,q}(x)$.

Il est clair que $\varphi_{1,q}$ ou $\varphi(x;\, 1,\, q)$ est égale à $\varphi_q(x)$; d'autre part, la relation d'homogénéité

$$\varphi(x\sqrt[p]{k^2};\, pk,\, qk) = k^{\frac{2q}{p}} \varphi(x;\, p,\, q)$$

permet de ramener toujours la fonction générale $\varphi_{p,q}$ à la forme particulière $\varphi_q(x)$. Enfin $\varphi(x;\, p,\, q)$ vérifie l'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (q-1)\frac{dy}{dx} - x^{p-1}y = 0,$$

et sa liaison avec la fonction de Bessel s'exprime ainsi

$$\varphi(x;\, p,\, q) = \left(\frac{1}{i}\right)^q \Gamma\left(1 + \frac{q}{p}\right) x^{\frac{q}{2}} J_{\frac{q}{p}}\left(\frac{2i}{p} x^{\frac{p}{2}}\right).$$

La formule fondamentale (5) est ici

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \varphi_q(az)\,\varphi_r[b(x-z)]\,dz \\ \displaystyle\quad = \frac{\Gamma(1+q)\,\Gamma(1+r)}{\Gamma(2+q+r)}\,\frac{a^q b^r}{(a+b)^{q+r+1}}\,\varphi_{q+r+1}[x(a+b)], \end{cases}$$

et l'on pourrait y supposer $x = 1$ sans rien perdre en généralité.

Si l'on remplace la fonction φ par J, les quantités $2i\sqrt{a}$, $2i\sqrt{b}$ par a et b respectivement, enfin la variable z d'intégration par $\cos^2\varphi$, la formule précédente deviendra, sauf changement de q en $m-1$ et de r en $n-1$,

$$(7)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m\varphi\,\sin^n\varphi\,J_{m-1}(a\cos\varphi)\,J_{n-1}(b\sin\varphi)\,d\varphi \\ \displaystyle\quad = \frac{a^{m-1}b^{n-1}}{(a^2+b^2)^{\frac{m+n-1}{2}}}\,J_{m+n-1}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right), \end{cases}$$

valable pour $m > 0$, $n > 0$, a et b quelconques.

La formule est susceptible d'une troisième forme par l'introduction de la fonction $\varphi_{p,q}(x)$: elle s'écrit alors ($q \geqq 0$)

$$(8)\quad \begin{cases} \displaystyle\int^x \varphi'_{p,q}(az)\,\varphi_r\left[\frac{b^p}{p^2}(x^p - z^p)\right]dz \\ \displaystyle\quad = \frac{1}{p^{2r}}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{q}{p}\right)\Gamma(1+r)}{\Gamma\left(1+r+\frac{q}{p}\right)}\,\frac{a^{q-1}b^{pr}}{(a^p+b^p)^{r+\frac{q}{p}}}\,\varphi_{p,pr+q}\left(x\sqrt[p]{a^p+b^p}\right). \end{cases}$$

[redacted]

formule exacte pour $r > 0$, quel que soit a. Faisons-y $a = 1$ et r égal à l'entier n; comme on a évidemment

$$(9)\qquad \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{1}{x^{p-1}}\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x \varphi'_{p,q}(z)(x^p - z^p)^n\,dz = p^n\,\varphi_{p,q}(x),$$

on conclut par comparaison avec la précédente

$$(10)\qquad \left(\frac{1}{x^{p-1}}\frac{d}{dx}\right)^n \varphi_{p,np+q} = \alpha_n\,\varphi_{p,q}(x),$$

α_n désignant toujours le produit $(p+q)(2p+q)\ldots(np+q)$.

Reprenons (8) et faisons-y $r = 0$, puis égalons de part et d'autre le coefficient de b^{pn}; on obtient

$$\frac{1}{p^n\,n!}\int_0^x \varphi'_{p,q}(az)(x^p - z^p)^n\,dz = p^n a^{q-1}\frac{d^n}{d\beta^n}\left[\frac{\varphi_{p,q}(x\sqrt[p]{a^p+\beta})}{(a^p+\beta)^{\frac{q}{p}}}\right],$$

après la différentiation, il faut au second membre remplacer β par zéro. Posons encore $a = 1$, la formule précédente pourra s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{p^n\,n!}\int_0^x \varphi'_{p,q}(z)(x^p - z^p)^n\,dz = p^n x^{pn+q}\frac{d^n}{dy^n}\left[\frac{\varphi_{p,q}(x)}{x^q}\right] \qquad y = x^p,$$

d'où, en se reportant à l'équation (9), la formule

$$(11)\qquad \varphi_{p,np+q}(x) = \alpha_n x^{np+q}\left(\frac{1}{x^{p-1}}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\varphi_{p,q}(x)}{x^q}.$$

Les équations (10) et (11) contiennent toute la théorie du développement en fraction continue. En effet, si l'on prend le cas le plus simple $n = 1$, on aura

$$(12)\qquad \varphi'_{p,p+q} = (p+q)x^{p-1}\varphi_{p,q}, \quad \text{et} \quad \varphi_{p,p+q} = (p+q)x^{q+1}\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi_{p,q}}{x^q}\right).$$

Mettons dans cette dernière $p+q$, $2p+q$, ... à la place de q et éliminons $\varphi'_{p,p+q}$, $\varphi'_{p,2p+q}$, ... à l'aide de la première; il est clair que $\varphi_{p,np+q}$ prendra la forme $\mu\varphi + \nu\varphi'$, μ et ν étant deux polynomes. Il existera donc une relation linéaire entre trois fonctions contiguës $\varphi_{p,np+q}$; $\varphi_{p,(n-1)p+q}$; $\varphi_{p,(n-2)p+q}$. Le résultat explicite qu'on obtient est le suivant :

En posant

$$\varphi_{p,np+q} = (-1)^n \alpha_n S_n \qquad \text{ou} \qquad S_n = (-1)^n x^{pn+q} \left(\frac{1}{x^{p-1}} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{\varphi_{p,q}}{x^q},$$

on aura

$$(13) \qquad S_n = \frac{(-1)^n}{p^n n!} \int^x \varphi'_{p,q}(z)(x^p - z^p)^n \, dz = A_n \varphi - B_n \varphi'.$$

A_n et B_n représentent deux polynomes en x obéissant à la même loi de récurrence

$$(14) \qquad \begin{cases} A_{n+1} = (pn+q) A_n + x^p A_{n-1}, \\ B_{n+1} = (pn+q) B_n + x^p B_{n-1}, \end{cases}$$

avec les valeurs initiales $A_0 = 1$, $A_1 = q$, $B_0 = 0$, $B_1 = x$, de sorte que $\frac{B_n}{A_n}$ est la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue dont les fractions constituantes sont

$$\left(\frac{x}{q}, \frac{x^p}{p+q}, \frac{x^p}{2p+q}, \frac{x^p}{3p+q} \cdots\right);$$

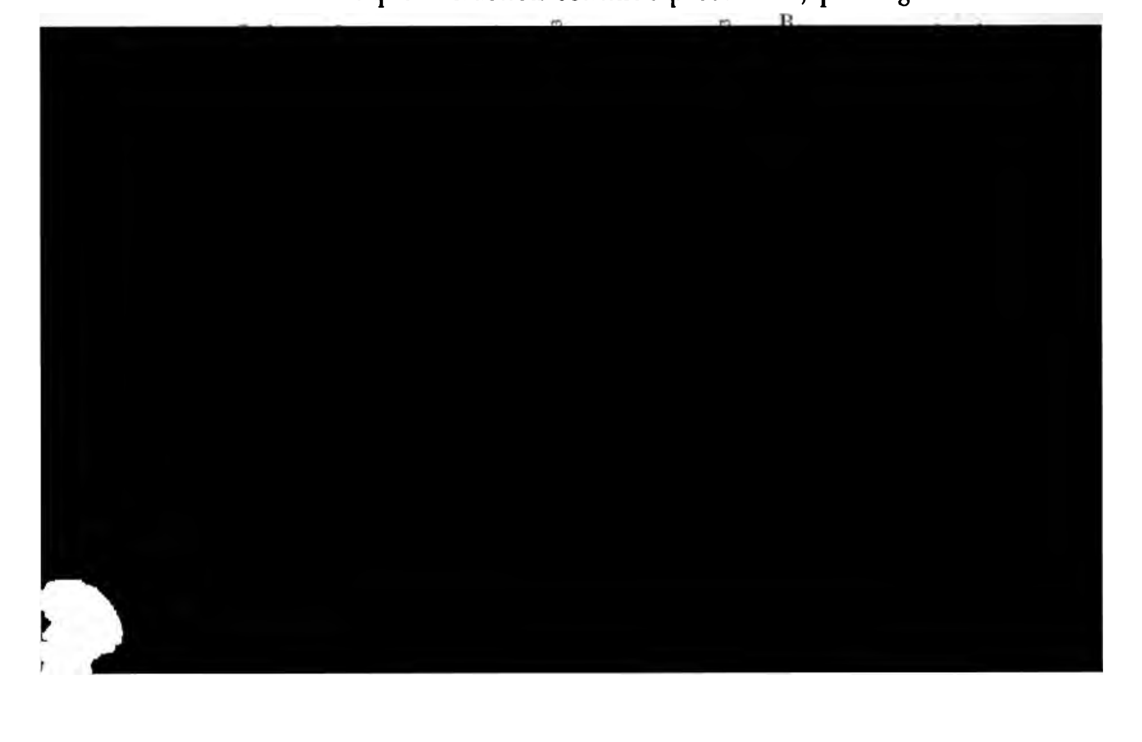
sauf une variante dans les notations; ces polynomes A_n et B_n sont ceux auxquels M. H. Graf, dans ses importants travaux sur les fonctions de Bessel, a donné le nom de *polynomes de Schlæfli*.

On a trouvé ci-dessus deux expressions pour la différence $A_n \varphi - B_n \varphi'$

$$A_n \varphi - B_n \varphi' = \frac{(-1)^n}{\alpha_n} \varphi_{p,np+q} = \frac{(-1)^n}{p^n n!} \int_0^x \varphi'_{p,q}(z)(x^p - z^p)^n \, dz,$$

et comme l'une et l'autre tendent vers zéro pour x grandissant, on conclut que la fraction continue précédente, prolongée à l'in-

[redacted]



a été question ci-dessus. Quant au polynome C_n, il satisfait à la récurrence suivante

$$C_{n+1} = (pn+q)C_n + x^p C_{n-1} + \left(\frac{-x^p}{p}\right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}$$

et, en outre, aux conditions initiales $C_0 = 1$, $C_1 = q - \frac{x^p}{p}$.

Comme seconde application, considérons quelques intégrales définies liées aux fonctions besséliennes : elles sont en très grand nombre, comme on sait, et beaucoup d'entre elles ont de l'importance pour la solution de problèmes de Physique mathématique. L'équation fondamentale et d'autres analogues qu'on déduira de la proposition générale exposée ci-dessus en choisissant différemment les limites des intégrales sont une source presque inépuisable de pareilles relations. Je me bornerai, pour ne pas allonger, à citer quelques-unes des plus simples.

Remarquons d'abord les formules $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$ et $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$, puis faisons, dans (7), $m = \frac{1}{2}$, il vient

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\varphi \cos(a\cos\varphi) J_{n-1}(b\sin\varphi)\, d\varphi = \frac{b^{n-1}}{(a^2+b^2)^{n-\frac{1}{2}}} J_{n-\frac{1}{2}}(\sqrt{a^2+b^2}).$$

Supposons alors b infiniment petit et remplaçons les lettres n et a par $n+\frac{1}{2}$ et x respectivement : la formule précédente donne, pour n entier et positif,

$$(15) \qquad J_n(x) = \frac{2}{\pi} \frac{x^n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi \cos(x\cos\varphi)\, d\varphi.$$

C'est l'expression ordinaire de $J_n(x)$ en intégrale définie. On voit, du reste, que $J_n(x)$ peut s'exprimer plus généralement au moyen d'une intégrale définie contenant un paramètre arbitraire. En effet, si l'on écrit la formule (6) sous la forme

$$\int_0^1 \varphi_{m+\frac{1}{2}}(az)\varphi_{n+\frac{1}{2}}[b(1-z)]\, dz$$
$$= \frac{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(m+n+3)} \frac{a^{m+\frac{1}{2}} b^{n+\frac{1}{2}}}{c^{m+n+2}} \varphi_{m+n+2}(c)$$

avec $c = a + b$, le but est atteint; car, m et n étant entiers, $\varphi_{m+\frac{1}{2}}$ et $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$ s'exprimeront par des exponentielles et des quantités algébriques. Le résultat précédent contient une infinité de formules particulières : en voici une assez remarquable

$$(-1)^n x^n \mathrm{J}_n(xi) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'_{2,2n+1}(x\sin\varphi)\,d\varphi$$

avec

$$\varphi_{2,1} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \varphi_{2,2n+1} = (-1)^n\, 1.3.5\ldots(2n+1)(\mathrm{A}_n\varphi_{2,1} - \mathrm{B}_n\varphi'_{2,1}),$$

A_n et B_n désignant encore les polynomes de Schlæfli.

La même formule donne encore pour un cas spécial

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\cos\varphi)\cos(b\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

qui devient, pour $b = ai$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\cos\varphi)\cos(ai\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{2};$$

cette dernière sera utilisée plus loin.

La formule (7) est susceptible d'une extension remarquable par laquelle je terminerai ces brèves applications. Pour simplifier, nous emploierons la fonction $\varphi_q(x)$, plus maniable que $\varphi_{p,q}(x)$ ou $\mathrm{J}_m(x)$.



[redacted]

$\varphi_{\nu+\mu+q+1}$ et $\varphi_{\nu+\mu+q+2}$, on voit la formule se reproduire sans autre changement que celui de ν en $\nu+1$. Elle est donc générale, et l'on peut trouver sans difficulté la loi des coefficients ρ_ν^μ et σ_ν^μ.

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_0^1 z^\nu z'^{\nu'} \varphi_q(az)\varphi_{q'}(bz')\,dz$$

où l'on a fait, pour abréger, $z' = 1 - z$ et où ν et ν' désignent deux entiers positifs quelconques. D'après ce qui précède, elle est décomposable en un nombre fini d'intégrales de la forme

$$\int_0^1 \varphi_{\nu+\mu}(az)\varphi_{\nu'+\mu'}(bz')\,dz,$$

dont la valeur est assignable par la formule fondamentale.

Autrement dit, l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2n'}\varphi \sin^{m+2m'}\varphi\, J_{n-1}(a\cos\varphi)\, J_{m-1}(b\sin\varphi)\,d\varphi$$

peut s'exprimer rationnellement par des fonctions J de divers indices et d'arguments tous égaux à $\sqrt{a^2+b^2}$: ces fonctions J sont en nombre fini. On suppose m' et n' entiers et positifs; quant à m et n, ils sont quelconques positifs.

On peut, dans le cas où m et n sont entiers, généraliser ce résultat; m' et n' peuvent être alors supposés entiers et négatifs : l'intégrale s'exprime toujours par un nombre fini de fonctions J, d'arguments égaux aux nombres a, b, ou $c = \sqrt{a^2+b^2}$.

Pour prouver ce dernier point, je rappelle que lorsqu'une fonction y vérifie la condition $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ et que ses $(n-1)$ premières dérivées sont nulles pour $x = 0$, on a

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f(z)(x-z)^{n-1}\,dz.$$

Soit alors l'intégrale

$$(17) \qquad X = \int_0^1 \frac{1}{z^\lambda}\varphi_q(az)\varphi_{q'}(bz')\,dz,$$

dans laquelle λ est un entier inférieur ou égal à q, de manière que l'intégrale a une valeur finie. Il est clair que les $(\lambda-1)$ premières

dérivées de X par rapport à la variable a sont nulles pour $a = 0$. Mais on a

$$\varphi_q^{(n)} = q(q-1)\ldots(q-n+1)\,\varphi_{q-n}$$

et

$$\frac{\varphi_q}{x^q} = q(q-1)\ldots(q-n+1)\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\varphi_{q-n}}{x^{q-n}}\right),$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\frac{d^\lambda X}{da^\lambda} &= q(q-1)\ldots(q-n+1)\int_0^1 \varphi_{q-\lambda}(az)\,\varphi_{q'}(bz')\,dz \\ &= \frac{q!\,q'!}{(q+q'-\lambda+1)!}\,\frac{b^{q'}a^{q-\lambda}}{c^\nu}\,\varphi_\nu(c).\end{aligned}$$

On a posé, pour abréger, $\nu = q + q' - \lambda + 1$, $c = a + b$. De la dernière équation l'on tire

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{q!\,q'!}{\nu!\,(\lambda-1)!}\,b^{q'}\int_0^a \frac{\alpha^{q-\lambda}(a-\alpha)^{\lambda-1}}{(\alpha+b)^\nu}\,\varphi_\nu(\alpha+b)\,d\alpha \\ &= \frac{q!\,q'!}{\nu!\,(\lambda-1)!}\,b^{q'}\int_b^c \frac{(\gamma-b)^{q-\lambda}(c-\gamma)^{\lambda-1}}{\gamma^\nu}\,\varphi_\nu(\gamma)\,d\gamma.\end{aligned}\right.$$

Soit de même Y l'intégrale générale

$$Y = \int_0^1 \frac{\varphi_q(az)\,\varphi_{q'}(bz')}{z^\lambda z'^{\lambda'}}\,dz, \qquad \lambda \leqq q, \qquad \lambda' \leqq q';$$

en imitant la marche précédente et posant, pour abréger, $\rho = q + q' - \lambda - \lambda' + 1$, on trouvera sa valeur par une intégrale double, de forme symétrique,


[redacted]

dernières sont à leur tour intégrables, sous forme finie, par la relation (15).

Les formules (18) et (19) ont été démontrées exactes pour λ et λ' entiers : on peut prouver qu'elles subsistent même pour des valeurs fractionnaires. Elles contiennent un grand nombre de résultats intéressants. On a, par exemple, $(c = \sqrt{a^2 + b^2})$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1(a\cos\varphi) J_1(b\sin\varphi)\, d\varphi = \frac{a J_1(a) + b J_1(b) - c J_1(c)}{ab},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, J_1(a\cos\varphi) J_1(b\sin\varphi)\, d\varphi = \frac{c J_1(a) - a J_1(c)}{bc},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, J_1(a\cos\varphi) J_1(b\sin\varphi)\, d\varphi = \frac{c J_1(b) - b J_1(c)}{ac},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cos^2\varphi\, J_1(a\cos\varphi) J_1(b\sin\varphi)\, d\varphi = \frac{ab}{c^3} J_3(c).$$

D'une manière plus générale, on peut obtenir sous forme explicite les intégrales de la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\varphi \cos^{2p'}\varphi\, J_{2m+1}(a\cos\varphi) J_{2n+1}(b\sin\varphi)\, d\varphi,$$

et de là on conclut que si l'on pose en série de Fourier, valable entre $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$J_{2m+1}(a\cos\varphi) J_{2n+1}(b\sin\varphi)$$
$$= \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos 2\varphi + A_2 \cos 4\varphi + \ldots + A_i \cos 2i\varphi + \ldots,$$

tous les coefficients A sont exprimables sous forme finie en fonction des J d'arguments a, b ou c.

J'observe encore, en terminant, que l'équation (5 *bis*) n'est pas la seule équation de Laplace intégrée par des fonctions de Bessel : plus habituellement même, on y substitue cette autre équation

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (2n-1)\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

admettant la solution $y = x^n J_n(x)$, et l'on peut alors poser $\lambda = 2^n \Gamma(1+n) x^n J_n(x)$.

L'équation fondamentale donne ensuite la relation

$$\int_0^1 x^n(1-x)^{n'} J_n(ax) J_{n'}[a(1-x)]\,dx = A\sqrt{\frac{2}{a}}\, J_{n+n'+\frac{1}{2}}(a)$$

dans laquelle A représente la constante

$$A = \frac{\Gamma(2n+1)\,\Gamma(2n'+1)\,\Gamma\left(n+n'+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n'+1)\,\Gamma(2n+2n'+2)}.$$

TROISIÈME PARTIE.

Laissant maintenant de côté toute application particulière je passe à la généralisation de la formule d'Abel. Reprenons la formule fondamentale (5), en supposant désormais le dernier module b_n égal à zéro.

Dans ce cas, si le premier paramètre est différent de $(n-1)$, la dérivée de la fonction $\lambda = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vérifie une équation de Laplace aux modules $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, 0)$ et aux paramètres $a_1+1, a_2+b_1, \ldots, a_n+b_{n-1}$; c'est par cette remarque que les considérations actuelles se rattachent au calcul des différentielles à indices quelconques.

La dérivée λ'_a appartient à l'exposant $n-a_1-2$ et la comparaison des termes du degré minimum fournit la relation

$$\begin{aligned} \lambda'_a &= (n-a_1-1)(a_1+1, a_2+b_1, a_3+b_2, \ldots, a_n+b_{n-1}) \\ &= (n-a_1-1)(a_i+b_{i-1}). \end{aligned}$$

[redacted]

Le résultat précédent n'est démontré ci-dessus que pour $a_1 < n - 1$; toutefois la conclusion demeure exacte, dans le cas limite $a_1 = n - 1$, $a'_1 = n - 1$, ainsi qu'on le voit aisément.

Il s'agit maintenant de déterminer la fonction $[(n - i) b_{i-1}]$. Son premier paramètre étant un entier inférieur à n, c'est une solution double. Pour obtenir cette solution, il faut procéder comme il a été expliqué ci-dessus. Supposons a_1 fort peu différent de $(n - 1)$ ou égal à $n - 1 + \varepsilon$, puis cherchons la limite vers laquelle tend la fonction λ_{a_1} lorsque ε se rapproche de zéro. Soit donc

$$\lambda_a = x^\varepsilon + \alpha_{1+\varepsilon} x^{1+\varepsilon} + \alpha_{2+\varepsilon} x^{2+\varepsilon} + \ldots$$

cette fonction développée en série. Les coefficients doivent être déduits de la récurrence de la page 31, dans laquelle on fera $a_1 = n - 1 + \varepsilon$, $a_i = (n - i) b_{i-1}$: la récurrence contient donc ici $(n - 1)$ termes seulement, à cause des égalités $a_n = 0$, $b_n = 0$.

Les nombres α_r, α_{r-1}, α_{r-2}, ..., α_{r-n+2} s'y trouvent affectés respectivement des coefficients

$$(r - \varepsilon)^2 (r - 1)(r - 2)\ldots(r - n + 2), \qquad (r - 1)^2 (r - 2)\ldots(r - n + 2),$$
$$(r - 2)^2 \ldots (r - n + 2), \qquad \ldots, \qquad (r - n + 2)^2$$

contenant chacun un facteur carré; le dernier terme α_{r-n+1} fait seul exception à cette règle ayant $(r - n + 1)$ comme coefficient. En posant $r = 1 + \varepsilon$, on aura deux termes à considérer : le premier d'entre eux, coefficient de $\alpha_{1+\varepsilon}$ est du premier ordre de petitesse, le second tout connu est du second ordre : leur quotient $\alpha_{1+\varepsilon}$ est donc du premier ordre. De même, en faisant $r = 2 + \varepsilon$, on aura trois termes en présence : les coefficients des lettres $\alpha_{1+\varepsilon}$, $\alpha_{2+\varepsilon}$ sont tous deux du premier ordre, tandis que le terme tout connu est du second ; ainsi $\alpha_{2+\varepsilon}$ sera du premier ordre. En continuant ce raisonnement, on verra que les coefficients $\alpha_{1+\varepsilon}$, $\alpha_{2+\varepsilon}$, ..., $\alpha_{n-2+\varepsilon}$ sont tous infiniment petits du premier ordre. Faisons enfin $r = n - 1 + \varepsilon$; le coefficient de $\alpha_{n-1+\varepsilon}$ est fini, les autres sont infiniment petits du premier ordre. La conséquence s'étend donc au coefficient $\alpha_{n-1+\varepsilon}$ qui est encore du premier ordre : le même fait aura lieu d'ailleurs pour tous les coefficients suivants $\alpha_{n+\varepsilon}$, $\alpha_{n+1+\varepsilon}$, ..., lesquels se déduisent des premiers par une récurrence dont les facteurs sont tous finis.

On a donc

$$\lim \lambda_a = [(n - i) b_{i-1}] = 1$$

et enfin

$$\text{rés.}(\lambda'_a, \lambda_{a'}) = \Gamma(n-a_1)\Gamma(n-a'_1)$$

sous les réserves $a_1 \leqq n-1$, $a'_1 < n$, $a_i + a'_i = 2(n-i)b_{i-1}$. Les inégalités précédentes, combinées avec l'équation $a_1 + a'_1 = 2n-2$, montrent que l'on aura

$$n-2 < a_1 \leqq n-1, \qquad n > a'_1 \geqq n-1.$$

Il est maintenant facile de généraliser la formule d'Abel : les suppositions et les notations précédentes sont strictement maintenues dans ce qui suit.

Je dis que, $f(x)$ et $F(x)$ étant deux fonctions de x dont la première se réduit à zéro pour $x=0$, si l'on a la relation

$$(20) \qquad \int_0^x f'(z)\lambda_a(x-z)\,dz = \Gamma(n-a_1)F(x),$$

on aura aussi cette autre relation

$$(21) \qquad \int_0^x F'(z)\lambda_{a'}(x-z)\,dz = \Gamma(n-a'_1)f(x).$$

Les formules précédentes sont remarquables par leur symétrie presque complète par rapport aux fonctions $f(x)$ et $F(x)$; la formule d'Abel correspond au cas le plus simple $n=1$. On démontrerait aisément l'exactitude de notre proposition en imaginant $f(x)$ développée en série de la forme

$$A''(a''_i) + A'''(a'''_i) + A^{(iv)}(a^{iv}_i) + \dots,$$

[redacted]

ou encore en intervertissant l'ordre des intégrations

$$\int_0^x f'(u)\,du \int_u^x \lambda_{a'}(x-z)\,\lambda'_a(z-u)\,dz$$
$$= \int_0^x f'(u)\,du \int_0^{x-u} \lambda_{a'}(x-u-t)\lambda'_a(t)\,dt.$$

Or la seconde intégrale, aux limites o et $x-u$, n'est autre chose que la résultante des fonctions λ'_a et $\lambda_{a'}$, la variable se nommant maintenant $x-u$ au lieu de x. Cette résultante, on l'a vu, se réduit elle-même au produit constant $\Gamma(n-a_1)\Gamma(n-a'_1)$; la formule à vérifier est donc simplement

$$\int_0^x f'(u)\,du = f(x),$$

ce qui est juste, puisque $f(\text{o})$ a été supposé nul.

Le théorème précédent donne la résolution de l'équation fonctionnelle

(22) $$\int_0^x F'(z)\lambda_{a'}(x-z)\,dz = f(x), \qquad n > a'_1 \geqq n-1,$$

dans laquelle $F(z)$ est la fonction inconnue, sous la forme

$$\Gamma(n-a_1)\Gamma(n-a'_1)F(x) = \int_0^x f'(z)\lambda_a(x-z)\,dz,$$

formule qui devient indépendante de l'hypothèse $f(\text{o}) = \text{o}$ lorsqu'on l'écrit ainsi

(23) $$\Gamma(n-a_1)\Gamma(n-a'_1)F(x) = \int_0^x f(z)\lambda'_a(x-z)\,dz.$$

Si dans l'équation (22) on avait $a'_1 < n-1$, on pourrait, par des différentiations préalables sans influence sur la forme de l'équation, ramener le paramètre a'_1 entre les deux limites $n-1$, n. La solution précédente de l'équation fonctionnelle (22) doit donc être regardée comme générale.

Nous nous contenterons de l'exemple suivant.

Soit à résoudre l'équation fonctionnelle

(24) $$\int_0^x F(x^2-t^2)\cos at\,dt = f(x).$$

Il suffit de faire dans ce qui précède $n = 2$, $a'_1 = \frac{3}{2}$, $a'_2 = -\frac{a^2}{4}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{a^2}{4}$, puis $\lambda_a = \frac{\sin(a\sqrt{x})}{a}$, $\lambda_{a'} = \frac{e^{a\sqrt{x}} + e^{-a\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$, pour obtenir la solution

$$(25) \quad \pi F(x) = f(0)\frac{e^{a\sqrt{x}} + e^{-a\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \int_0^{\sqrt{x}} \frac{f'(\sqrt{x - t^2})}{\sqrt{x - t^2}}(e^{at} + e^{-at})\,dt,$$

solution que nous allons vérifier directement.

Substituons dans (24) les deux parties dont se compose $F(x)$; il y aura deux intégrales à vérifier

$$\int_0^x \frac{e^{a\sqrt{x^2 - t^2}} + e^{-a\sqrt{x^2 - t^2}}}{\sqrt{x^2 - t^2}} \cos at\,dt = \pi$$

et

$$\iint \frac{f'(\sqrt{x^2 - t^2 - u^2})}{\sqrt{x^2 - t^2 - u^2}} \cos at(e^{au} + e^{-au})\,dt\,du = \pi f(x) - \pi f(0);$$

dans l'intégrale double, le point (u, t) doit se déplacer à l'intérieur d'un quart de cercle limité aux axes, de rayon égal à x, le centre étant à l'origine. Remplaçons les coordonnées rectangulaires (u, t) par les polaires $u = \rho\cos\theta$, $t = \rho\sin\theta$ ou $t = x\sin\theta$ selon que l'on se trouve à l'intérieur du cercle ou sur sa périphérie. Les deux intégrales deviennent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(ax\sin\theta)\cos(aix\cos\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

et

[redacted]

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BLUMENTHAL (O.). — UEBER DIE ENTWICKLUNG EINER WIRKÜRLICHEN FUNKTION NACH DEN NENNERN DES KETTENBRUCHES FÜR $\int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{z-\xi}$. Inaugural-Dissertation. In-4°, 57 p. Göttingen, 1898.

Considérant l'intégrale

$$f(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}\,d\xi,$$

où α, β sont des valeurs réelles et $\varphi(\xi)$ une fonction réelle de ξ dans l'intervalle (α, β), qui ne soit jamais négative, et les dénominateurs des réduites $Q_n(z)$ de la fraction continue qui représente $f(z)$, on peut se proposer, en généralisant des propositions bien connues relatives aux fonctions sphériques, deux problèmes distincts :

1° *Étudier le développement d'une fonction analytique* $F(z)$ *en série de la forme*

$$F(z) = \Sigma A_n Q_n(z),$$

et déterminer le domaine de convergence.

2° *Étudier le développement d'une fonction* réelle *dans l'intervalle* (α, β).

A la vérité, cette généralisation de la théorie des fonctions sphériques semble, au premier abord, assez factice; l'auteur la justifie par la théorie de l'interpolation, en utilisant une remarque due à Tchebycheff (*Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 1860).

La loi formelle du développement de cette espèce a été donnée par Heine (*Kugelfunctionen*, t. I, p. 292); M. Blumenthal signale encore, relativement au premier problème, les résultats obtenus par M. Pincherle (*Atti Acc. dei Lincei*, IV, 5; 1889. *Annali di Matematica*, 1884) et, relativement au second, ceux que l'on doit à M. Darboux [*Mémoire sur l'approximation des fonctions de*

grands nombres (*Liouville,* 3ᵉ série, t. IV)]. C'est d'ailleurs de ce second problème qu'il s'occupe principalement.

Le point de départ est dans les recherches de Stieltjes (*Annales de Toulouse,* VIII; 1894) sur les fractions continues de la forme

$$\cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}}$$

où $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ désigne une série divergente à termes positifs : Stieltjes a montré comment une telle fraction convergeait dans tout le plan, sauf sur une portion de l'axe des quantités négatives, et a donné, de la fonction qu'elle représente, une expression, au moyen d'une intégrale définie, que M. Blumenthal modifie un peu.

Si l'on désigne, en général, par $\frac{P_n}{Q_n}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite, les équations $P_n = 0$, $Q_n = 0$ ont toutes leurs racines simples, réelles et négatives. Les racines de Q_{2n} sont séparées par les racines de P_{2n} et de Q_{2n+2}; si donc l'on désigne par A_i le résidu de la fraction $\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$ relative à la racine x_i du dénominateur, A_i sera un nombre positif; on a d'ailleurs $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \frac{1}{a_1}$. A chaque point-racine, on peut attribuer comme masse le résidu correspondant; quand n [redacted]

σ_r sera la masse concentrée au point X_r. Si maintenant on exclut les points X_r de l'intervalle I_1, on pourra définir la densité $\varphi'(\xi)$ en chaque point ξ, et l'on aura

$$f(z) = \lim_{n=\infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \int_{(I_1)} \frac{\varphi'(\xi)\,d\xi}{z-\xi} + \sum \frac{\sigma_r}{z - X_r} :$$

telle est la formule, très voisine de celle de Stieltjes, à laquelle parvient l'auteur : il l'écrit sous la forme symbolique

$$f(z) = \int_{(I_1)} \frac{\varphi(\xi)}{z-\xi} d\xi,$$

en convenant d'écrire toujours, quelle que soit la fonction ψ,

$$\int_{(I)} \psi\varphi'\,d\xi + \sum \psi(X_r)\sigma_r = \int_{(I_1)} \psi\varphi\,d\xi.$$

Les dénominateurs Q_{2n} jouissent des propriétés qu'expriment les équations

$$\int_{(I_1)} Q_{2n} Q_{2m} \varphi\,d\xi = 0, \qquad \int_{(I_1)} Q_{2n}^2 = \frac{1}{a_{2n+1}}.$$

Un théorème de M. Poincaré (*American Journal*, 7) sur la limite, pour n infini, du rapport de deux fonctions p_n, p_{n+1}, définies par une formule de récurrence

$$p_{n+2} + \alpha_n p_{n+1} + \beta_n p_n = 0,$$

fournit ensuite des renseignements importants sur la nature de l'intervalle I_1, qui est formé de l'intervalle I et d'un nombre fini de points isolés.

Un raisonnement bien connu conduit à représenter une fonction arbitraire $F(z)$ par un développement de la forme $\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n Q_{2n}(z)$, où l'on a

$$A_n = a_{2n+1} \int_{I_1} F Q_{2n} \varphi\,d\xi,$$

et à étudier les intégrales de la forme

$$B_n = \int_{(I_1)} \psi\varphi Q_{2n}\,d\xi,$$

où ψ est une fonction arbitraire. Conformément aux notations expliquées plus haut, il convient de dire que $\psi\varphi$ est intégrable dans I_1 quand l'expression

$$\int_I \varphi'\psi \, d\xi + \Sigma\sigma_r \, \psi(X_r)$$

a une valeur déterminée, ce qui exige que $\psi\varphi'$ soit intégrable dans I et que ψ soit fini en tous les points X_r. On doit à M. Darboux (*loc. cit.*) l'expression d'une limite supérieure pour les intégrales B_n, ainsi qu'une méthode de formation pour les sommes

$$S_m(z) = \sum_{n=0}^{n=m} A_n Q_{2n}(z);$$

M. Blumenthal utilise l'une et l'autre et parvient, en particulier, à l'expression

$$S_m(z) = \frac{1}{a_{2n+2}} \int_{(I_1)} F(z) \frac{Q_{2n+2}(z)\,Q_{2n}(\xi) - Q_{2n+2}(\xi)\,Q_{2n}(z)}{z-\xi} \, d\xi.$$

Supposant ensuite que I ne s'étende pas indéfiniment, il impose à la fonction F les conditions suivantes : F est continue dans I_1 et admet en chaque point une dérivée à droite et une dérivée à gauche. La fonction $\varphi(\xi)\left|\frac{F(z)-F(\xi)}{z-\xi}\right|$, où z est un point déterminé, ξ un point arbitraire de I_1, est intégrable dans I_1 ; dans ces conditions la série

La fonction $\varphi\left[\frac{F(z)-F(\xi)}{z-\xi}\right]^2$ est intégrable dans I_1. $F(z)$ est alors développable, si le rapport

$$\frac{|Q_n(z)|}{a_{2n+2}\sqrt{a_{2n+1}}\sqrt{n}}$$

reste fini pour $n=\infty$.

M. Blumenthal développe ensuite diverses applications : les polynomes Q_{2n}, qui proviennent du développement en fraction continue de la fonction

$$f(z)=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{\xi}}{z-\xi}d\xi,$$

et qui ont été considérés par Laguerre (*Œuvres*, p. 428), ne sont pas aptes à fournir le développement d'une fonction arbitraire : ils ne permettent pas, par exemple, le développement de $z^{1-\gamma}\left(0<\gamma<\frac{1}{2}\right)$. La considération des *fonctions génératrices*

$$\Psi(z,x)=\Sigma x^n Q_n(z),$$

et les propositions obtenues par M. Darboux (*loc. cit.*), sur les séries entières à singularité unique sur le cercle de convergence, conduisent à des résultats intéressants. Si l'on suppose, dans la fraction continue,

$$a_{2n-1}=\frac{\Phi(n)}{X(n)},\qquad a_{2n}=\frac{\Phi_1(n)}{X_1(n)},$$

où Φ, Φ_1, X, X_1 sont des polynomes tels que a_{2n}, a_{2n-1} soient positifs, on arrive au résultat simple que voici : une fonction F qui satisfait aux conditions énumérées plus haut (dans le cas où I_1 ne s'étend pas à l'infini) est développable en une série de polynomes Q_{2n}, valable pour tous les points de l'intervalle I_1, lorsque le rapport

$$\frac{\Phi(n)\,\Phi_1(n)}{X(n)\,X_1(n)}$$

reste pour n infini compris entre des limites fixes, non nulles. Les *fonctions de Jacobi*, dénominateurs des réduites de la fraction continue qui représente la fonction

$$f(z)=\frac{1}{\Gamma^2(\beta)}\,\frac{1}{2^{2(\alpha+\beta)-3}}\int_{-\infty}^{0}\frac{(1+\xi)^{\alpha-1}(-\xi)^{\beta}}{z-\xi}d\xi,$$
$$(\alpha>0,\ \beta>0),$$

sont aptes à fournir le développement d'une fonction dans l'intervalle (— 4, o). C'est un résultat que l'on doit à M. Darboux.

M. Blumenthal s'occupe ensuite du développement d'une fonction analytique en une série de polynomes $Q_{2n}(z)$: c'est un cas particulier du problème traité par M. Pincherle (*loc. cit.*), à savoir le développement d'une fonction analytique en une série de polynomes qui vérifient une équation aux différences du $r^{\text{ième}}$ ordre, dans laquelle z entre linéairement. Dans certains cas, il peut exister différents développements d'une même fonction.

J. T.

BERTRAND A. W. RUSSELL, M. A., Fellow of Trinity College, Cambridge. AN ESSAY ON THE FOUNDATIONS OF GEOMETRY. In-8°, 201 p. Cambridge, University Press. London, Clay and Sons, 1897.

L'Ouvrage de M. Russell vient bien à son heure. La Géométrie a fait de tels progrès dans ce siècle, et depuis trente ans surtout la Géométrie non-euclidienne a pris un si grand développement, qu'il devenait nécessaire de critiquer et de systématiser les résultats acquis, et d'en tirer les conséquences philosophiques. Mais, pour mener à bien une tâche aussi délicate et aussi ardue, il fallait une double compétence qui se rencontre bien rarement. Grâce à une organisation universitaire autrement souple et libérale que la nôtre, l'auteur a pu étudier successivement à Cambridge les Mathématiques et la Philosophie et passer maître dans les deux do-

[redacted]

tauré et corrigé la théorie criticiste en la remettant au point de la Science moderne. On peut dire que son œuvre constitue la philosophie de la Géométrie du XIX[e] siècle.

Après une courte introduction destinée à définir le problème par ses rapports avec la Logique, la Psychologie et les Mathématiques, l'auteur commence par résumer l'histoire de la Métagéométrie. A l'exemple de M. Klein, il la divise en trois périodes, et s'attache à faire ressortir les idées directrices de chacune d'elles. Dans la première, Lobatchewski et Bolyaï, probablement inspirés par Gauss, ont voulu prouver que le postulatum d'Euclide est indémontrable, en essayant d'édifier une Géométrie non contradictoire sur sa négation, et cela par la méthode synthétique d'Euclide lui-même. La seconde période, illustrée par les Mémoires de Riemann et de Helmholtz, emploie, au contraire, la méthode analytique pour définir l'espace par ses propriétés métriques (distance, courbure). Enfin, la troisième période, inaugurée par les travaux de Cayley, applique la même méthode à l'étude des propriétés projectives de l'espace, qui sont logiquement antérieures à ses propriétés métriques. L'auteur discute, à ce propos, la Géométrie elliptique de Klein, qui ne lui paraît pas correspondre à un espace distinct, et l'emploi des imaginaires en Géométrie, grâce auquel on réduit les propriétés métriques de l'espace aux propriétés projectives. Il trouve la synthèse et la conclusion de toutes les recherches antérieures dans la théorie des groupes, qui a permis à M. Sophus Lie de réduire les axiomes de la Géométrie à leur plus simple expression et d'en donner la formule définitive. Ce sont ces axiomes qui font l'objet de l'étude critique de M. Russell; il s'agit de savoir quelle en est la valeur, empirique ou *a priori*.

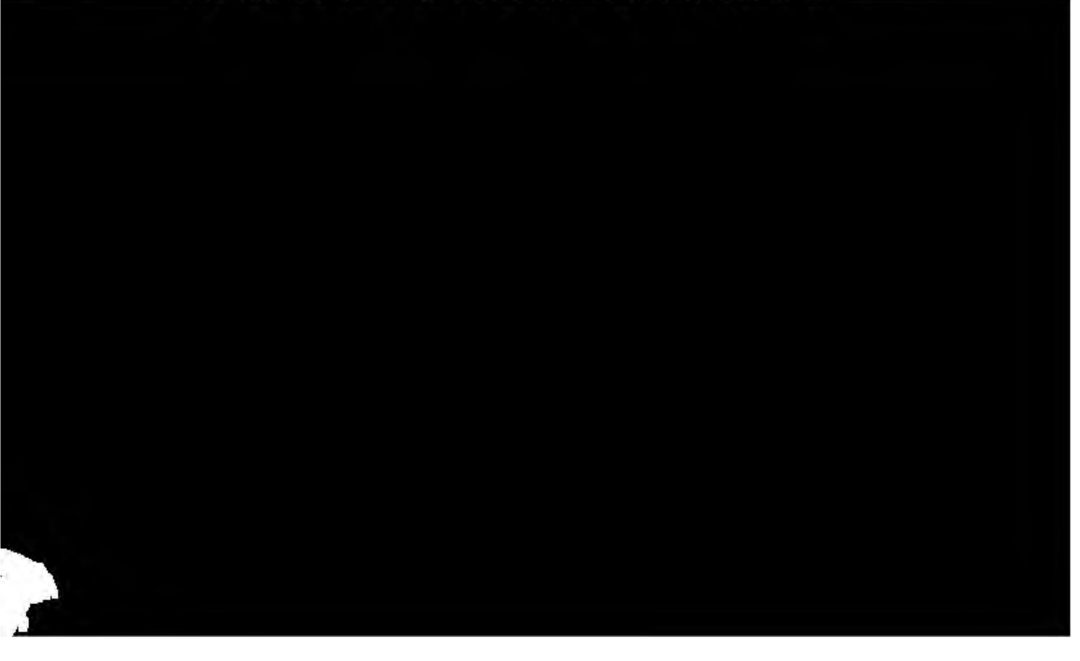
Mais, auparavant, pour préparer cette étude, l'auteur expose et discute quelques-unes des théories philosophiques de la Géométrie qui ont été proposées depuis un siècle. Il recherche d'abord ce qui subsiste de la doctrine de Kant touchant l'espace, et il montre dans quelle mesure elle est compatible avec les découvertes des métagéomètres. Il critique ensuite avec beaucoup de vigueur et d'ingéniosité les théories empiristes de Riemann, de Helmholtz et d'Erdmann. L'auteur réfute, d'autre part, les objections adressées par Lotze et d'autres métaphysiciens à la Géomé-

trie non-euclidienne, en montrant qu'elles proviennent de contresens mathématiques et de l'ignorance du sujet. Il soutient, contre Delbœuf, que l'impossibilité des figures semblables n'implique pas que l'espace ait une grandeur absolue, et que, par suite, l'homogénéité de l'espace (entendue comme indépendance de la grandeur et de la forme) n'est pas un axiome *a priori.* Il passe enfin brièvement en revue les principaux travaux français sur la question (ceux de MM. Poincaré, Calinon, Lechalas et Renouvier), et recueille de toutes ces discussions les résultats positifs déjà acquis, qui vont lui servir à construire sa propre théorie.

En premier lieu, la Géométrie projective est distincte et indépendante de la Géométrie métrique, comme l'a prouvé Staudt, en donnant du rapport anharmonique une définition purement descriptive, et en définissant les coordonnées projectives par la construction du quadrilatère complet, qui n'implique aucune notion de grandeur ni de mesure. Or, comme les espaces non-euclidiens ne diffèrent de l'espace euclidien que par leurs propriétés métriques, ils correspondent à une seule et même Géométrie projective. Les axiomes de la Géométrie projective sont donc communs aux trois genres d'espaces, et, par suite, doivent constituer les axiomes *a priori* de la Géométrie euclidienne. Ces axiomes projectifs sont :

1° L'*axiome du point* (d'où dérivent la continuité et la divisibilité à l'infini de l'espace);

2° L'*axiome des dimensions* (chaque point est défini par ses



[redacted]

2° L'*axiome des dimensions* (entendu cette fois au sens métrique);

3° L'*axiome de la distance* (deux points définissent *une* longueur, et c'est là la grandeur fondamentale qui sert de base à toute mesure).

Seulement, tandis que les axiomes projectifs dérivent des propriétés essentielles de l'espace conçu, en général, comme une pure *forme d'extériorité,* les axiomes métriques se déduisent de la possibilité de la mesure, dont ils sont les conditions nécessaires. Les trois axiomes précédents sont donc doublement *a priori.* Quant aux axiomes spéciaux à la Géométrie euclidienne, à savoir :

1° L'espace a *trois* dimensions;

2° Il n'y a qu'une ligne droite qui passe par deux points donnés *quelconques;*

3° Par un point donné, il ne passe qu'une parallèle à une droite donnée,

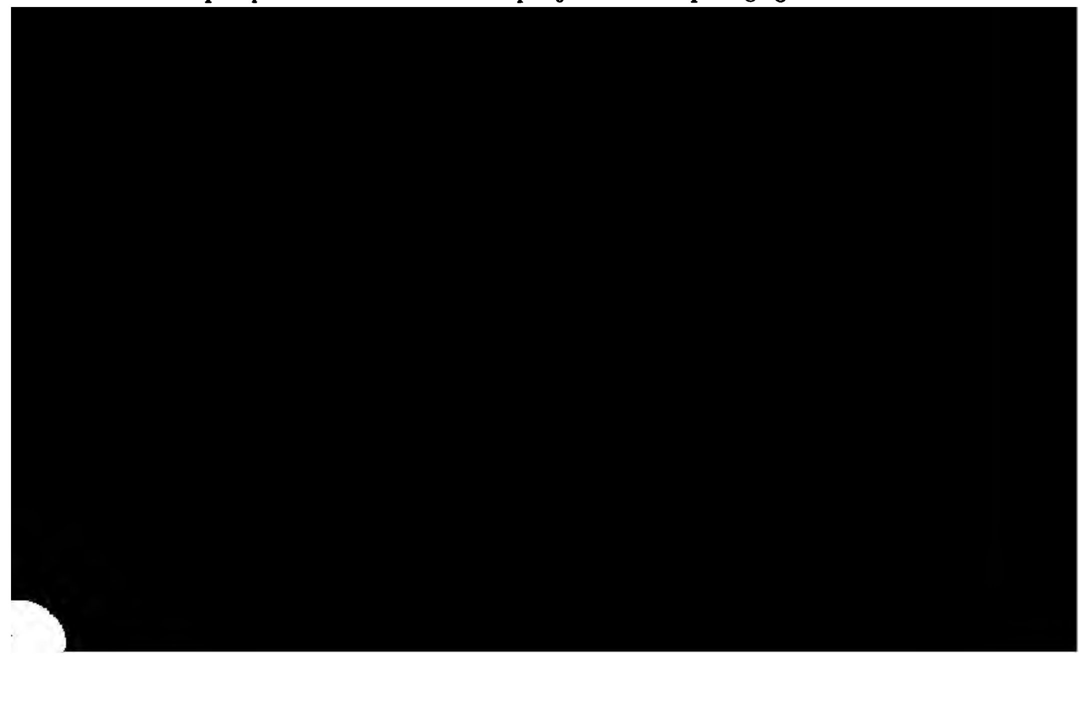
l'auteur les considère comme empiriques (1) attendu que les trois premiers, communs aux Géométries euclidienne et non-euclidiennes, suffisent à assurer la possibilité de la mesure et permettent, par conséquent, de déterminer par expérience les propriétés métriques de l'espace. De ces axiomes empiriques, le premier seul est connu d'une manière exacte et certaine, parce que le nombre des dimensions de l'espace est essentiellement entier, et partant discontinu. Les deux autres ne peuvent être connus et vérifiés qu'approximativement, comme toute loi expérimentale qui repose sur la mesure de grandeurs continues.

Il reste à justifier philosophiquement la nécessité des axiomes *a priori,* par une *déduction transcendentale* à la manière de Kant, c'est-à-dire en montrant que ces axiomes sont les conditions de toute expérience possible. M. Russell part de ce principe (établi par les logiciens modernes, notamment MM. Bradley et Bosanquet) que toute expérience implique la connaissance d'une

(1) *Cf.* RUSSELL. *Les axiomes propres à Euclide sont-ils empiriques?* Ap. *Revue de Métaphysique et de Morale*, novembre 1898 (t. VI, p. 759-776).

multiplicité de choses en relation réciproque; or celle-ci n'est pas possible sans une forme d'extériorité intuitive, et non conceptuelle, jouissant des propriétés énoncées, qui se ramènent à une seule : l'homogénéité. Ainsi un espace homogène est la condition nécessaire de la possibilité de l'expérience, et, par suite, les axiomes qui expriment ses propriétés essentielles ne peuvent être connus qu'*a priori*. L'auteur termine en discutant quelques-unes des contradictions inévitables (analogues aux antinomies kantiennes) qu'impliquent, selon lui, la notion de l'espace et celle du point, ainsi que le cercle vicieux que forment, d'une part, la définition des points par les lignes (ou surfaces), et, d'autre part, la définition des lignes (et surfaces) par les points (en vertu du principe de dualité). Pour résoudre ces difficultés, il propose d'admettre une *matière géométrique*, qui romprait la relativité de l'espace vide, et qui servirait aux figures géométriques de support et de contenu.

Quoi que l'on pense de ces conclusions philosophiques, que nous n'avons pas à discuter ici (¹), cet Ouvrage plein de science et d'idées ne sera pas moins utile ni moins intéressant pour les mathématiciens que pour les philosophes. S'il ne leur apprend pas de faits nouveaux, il sera un guide précieux et sûr pour tous ceux qui veulent s'initier à la Géométrie non-euclidienne et, plus généralement, aux méthodes de la Géométrie moderne : par exemple, il leur révélera l'indépendance logique et l'importance philosophique de la Géométrie projective, trop négligée dans l'ensei-


[redacted]

leur enseignera, par sa critique de Helmholtz et d'Erdmann, que l'expérience n'est possible qu'à de certaines conditions et, par suite, présuppose certaines hypothèses qu'elle ne peut vérifier, puisqu'elle les postule. C'est pourquoi il est illogique de fonder l'homogénéité de l'espace sur l'existence de corps rigides, car comment connaissons-nous la rigidité des corps, sinon par des mesures qui impliquent d'avance l'homogénéité de l'espace? L'hypothèse d'une déformation des corps par le déplacement n'est pas seulement absurde, en tant qu'elle attribue à l'espace vide, au *lieu,* une action physique réelle sur les corps qui l'occupent; elle n'a pas de sens, rigoureusement parlant. En effet, cette supposition, que deux corps, égaux quand ils coïncident, cessent de l'être une fois séparés, est invérifiable, puisqu'on ne peut constater leur égalité que par leur superposition. Si la grandeur des corps variait en fonction du lieu, une telle fonction serait arbitraire et indéterminée; et au fond, comme dit M. Russell, cette indétermination mathématique ne fait que traduire l'absurdité philosophique de l'hypothèse (§ 147). L'*axiome de libre mobilité* (ou *de congruence*) n'est donc pas une vérité d'expérience, comme on le croit trop souvent, mais une condition *a priori* de la mesure, impliquée dans la définition même de l'égalité géométrique. Il s'ensuit que la Mécanique et la Physique reposent sur la Géométrie, et ne peuvent, par conséquent, servir à fonder ni à vérifier les axiomes géométriques (§§ 70-73, 82).

D'un autre côté, on commet une pétition de principe lorsque, comme Riemann, on essaye de donner une définition analytique de l'espace et de ses propriétés. En effet, tout système de coordonnées suppose que l'on conçoit d'avance l'espace comme un ensemble de grandeurs, et postule la possibilité de la mesure, c'est-à-dire du déplacement sans déformation. Or, d'une part, la connaissance de l'espace comme ensemble de grandeurs repose sur la connaissance préalable des *qualités* de l'espace, c'est-à-dire de ses propriétés projectives; et, d'autre part, la libre mobilité exigée par la mesure implique la constance de la courbure, qui est déjà une propriété métrique de l'espace. En résumé, la Géométrie métrique présuppose la Géométrie projective; et la Géométrie analytique repose nécessairement sur la Géométrie synthétique. On ne peut donc sans cercle vicieux donner des propriétés

de l'espace une définition *analytique* et *métrique,* et ce n'est pas là la moindre méprise, ni la moins fréquente, qu'engendre ce que M. Russell appelle la *tendance quantitative* des analystes.

Cette tendance antiphilosophique se rattache à un préjugé non moins répandu, que nous appellerions le *préjugé nominaliste,* et qui porte les mathématiciens à croire que les vérités géométriques, en particulier les axiomes, sont affaire de définition et de convention arbitraire. M. Russell réfute ce préjugé d'une manière lumineuse et décisive, en montrant qu'il ne se justifie, en Métagéométrie, que par une confusion d'idées (§ 33, sqq.). On a cru que toutes les Géométries non-euclidiennes étaient valables pour le même espace, moyennant une modification de la définition de la distance, de sorte que la question de savoir laquelle est vraie n'aurait plus de sens. Mais on n'a pas pris garde que la distance, telle que l'a définie Cayley, est une généralisation *projective* de la distance *métrique,* telle qu'on l'entend d'ordinaire, et qu'elle n'a pas du tout le même sens, attendu que la distance projective exige *quatre* points pour sa définition, tandis que la distance métrique est déterminée par *deux* points seulement. Il en résulte qu'on a attribué aux coordonnées projectives un sens métrique qu'elles n'ont pas, et qu'on s'est flatté à tort de réduire les propriétés métriques de l'espace à des propriétés projectives. Cette réduction n'est qu'un trompe-l'œil ou un tour de passe-passe analytique, et n'a qu'une valeur technique. Au point de vue projectif, diverses définitions de la distance sont possibles, car elles dépendent du choix de la conique ou quadrique fondamentale;

[redacted]

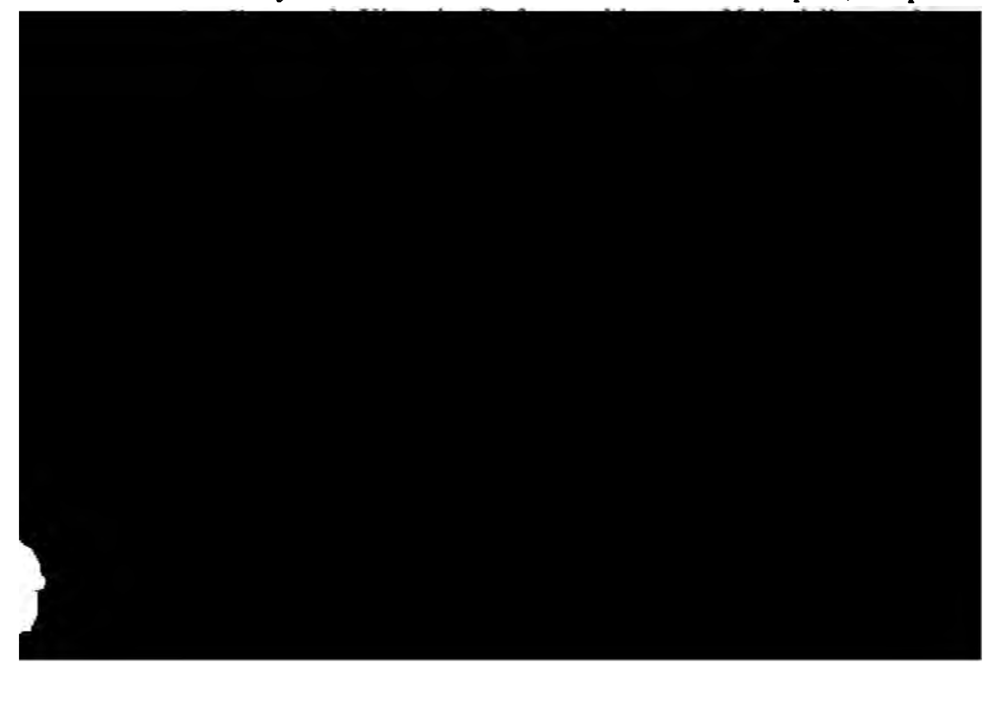
Nous avons déjà vu que l'hypothèse suivant laquelle la grandeur des corps varierait en fonction de leur position est logiquement valable, mais philosophiquement absurde. De même, il y a telle hypothèse de M. Sophus Lie (à savoir que l'axiome de libre mobilité ne vaudrait que pour une certaine région de l'espace), qui est mathématiquement admissible, mais impossible et inconcevable au point de vue philosophique (§ 45); M. Russell a fort bien vu que c'est là l'erreur fondamentale commise par les métagéomètres dans les attaques qu'ils ont dirigées contre la valeur de Géométrie euclidienne. Ils croyaient prouver le caractère empirique de l'espace euclidien en concevant d'autres espaces *logiquement* possibles. Ils oubliaient, d'une part, que la Géométrie n'est pas seulement soumise au principe analytique de contradiction, mais est fondée sur des principes synthétiques (axiomes ou postulats); d'autre part, que les vérités de l'Analyse ne prennent un sens géométrique et, par suite, une valeur objective qu'une fois appliquées à une *intuition*. Il ne suffit donc pas d'établir la validité *logique* des Géométries non-euclidiennes; il faudrait prouver, en outre, l'existence d'une intuition correspondante; or, Helmholtz n'y a pas réussi (§ 68). Aussi, loin de ruiner l'apriorisme kantien, comme ils le prétendaient, les métagéomètres n'ont guère fait que le confirmer. M. Russell remarque spirituellement que les conclusions légitimes de leurs travaux sont ainsi contraires à leurs intentions et à leurs tendances empiristes, et que, plus les mathématiciens se sont désintéressés de la Philosophie, plus leurs recherches ont été intéressantes pour la Philosophie. Il y a là, évidemment, une pointe de paradoxe et d'humour. Ce qui est vrai, c'est que les travaux des mathématiciens gagneraient en justesse et en portée s'ils étaient mieux au courant des problèmes philosophiques qu'ils posent et tranchent parfois sans s'en douter. Cette initiation philosophique fait particulièrement défaut aux savants français, et c'est sans doute pour cela que leurs contributions à la Métagéométrie ont été *relativement* peu importantes, au jugement de notre auteur (§ 100). Aucun livre n'est plus propre que celui de M. Russell à combler cette fâcheuse lacune de notre enseignement scientifique; aussi ne saurions-nous en recommander trop vivement la lecture à tous les mathématiciens qui réfléchissent sur leur science, et qui veulent vraiment la comprendre.

Nous sommes heureux de pouvoir leur annoncer que la maison Gauthier-Villars doit en faire paraître prochainement la traduction. Puisse-t-elle contribuer à développer en France le goût des recherches critiques et *épistémologiques,* à rapprocher les mathématiciens et les philosophes trop longtemps désunis, et à renouer entre les deux ordres d'études ces longues et glorieuses relations qui ont été si fécondes pour la Science et pour la Philosophie.

LOUIS COUTURAT.

VICTOR MORTET. — UN NOUVEAU TEXTE DES TRAITÉS D'ARPENTAGE ET DE GÉOMÉTRIE D'EPAPHRODITUS ET DE VITRUVIUS RUFUS, publié d'après le ms. latin 13084 de la Bibliothèque royale de Munich, avec une Introduction de M. *Paul Tannery* (tiré des *Notices et extraits* des manuscrits de la Bibliothèque nationale et autres Bibliothèques, t. XXXV, 2[e] Partie). 44 p. in-4° (avec 2 Pl. et de nombreuses fig.). Paris, Imp. Nat., 1896.

Comme le dit l'auteur de l'Introduction, le présent travail a pour but de mettre au jour un nouveau document touchant une question très complexe, celle des sources qui ont été utilisées pour deux compilations dont le rôle a été considérable dans l'enseignement pendant le moyen âge, à savoir les deux *Géométries* attribuées, l'une à Boèce, l'autre à Gerbert. Il est parfaitement établi que la plus importante de ces sources se retrouve dans une série de textes qui figurent parmi ceux des agrimenseurs romains, soit anonymes, soit sous les noms de M. Junius Nipsus, d'Epa- [redacted]



Rufus, architecton, dont une partie a été mutilée, ainsi que cela eut lieu aussi pour le *liber* précédent.

Les publications des savants qui ont utilisé le *Codex Arcerianus,* comme André Schott, dans ses *Geometrica et Gromatica vetusti scriptores* (Anvers, 1616) Hase, dans ses *Epistolæ Parisienses* (Paris, 1812) Lachmann, dans son éd. des *Gromatici veteres* (Berlin, 1848), ces publications étaient restées incomplètes. M. Moritz Cantor a été le premier à donner le texte intégral du *liber* d'Epaphroditus et de Vitruvius Rufus, dans son ouvrage *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst, eine historisch-mathematische Untersuchung* (Leipzig, 1875). Enfin, M. Max. Curtze a comblé à très peu près la lacune du feuillet manquant de l'*Arcerianus,* en s'aidant du ms. anonyme de Munich, 14836 (*Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik,* VII, 1895). Mais avant cette publication de M. Curtze, M. V. Mortet, archiviste paléographe, bibliothécaire de l'Université à la Sorbonne, avait reconnu que le ms. que M. Curtze a utilisé était moins ancien et moins complet qu'un autre ms. de la Bibliothèque de Munich (lat. 13084), qui a été signalé par ses soins à l'Académie des Inscriptions : « Ce ms. représente, dit M. Tannery, une source différente de celle de l'*Arcerianus,* mais à certains égards d'une importance au moins égale, surtout parce que l'ordre des matières est beaucoup plus rationnel et plus voisin, semble-t-il, de l'ordre originaire. D'autre part, le texte est souvent plus correct. » C'est ce ms. qui fait l'objet de la publication de M. V. Mortet.

La première Partie (I. *De conditionibus et mensuris agrorum*), après quelques indications métrologiques, donne une suite de problèmes concrets sur des champs. La deuxième (II. *De figurarum diversis speciebus et arearum mensuris*) donne, au contraire, des mesures de surface sous leur dénomination géométrique abstraite ([1]); la troisième Partie enfin (III. *De Geometria columnarum et mensuris aliis*) est beaucoup plus courte; les problèmes y sont de forme concrète, mais exclusivement stéréométriques. Ce ms. établit sans conteste possible que le fragment

---

([1]) On y remarque plusieurs fragments nouveaux, notamment sur la mesure du losange et de l'aire d'un carré dont on connaît la diagonale.

Certains problèmes ne présentent point la faute de formule qui les entache dans l'*Arcerianus*.

publié par Lachmann sous le titre : *De jugeribus metiundis* doit être rattaché aux problèmes similaires de l'*Arcerianus* et qu'il constituait avec eux une partie du *prétendu* liber d'Epaphroditus et de Vitruvius Rufus; on peut bien dire *prétendu,* car on ne saurait soutenir sérieusement l'hypothèse d'une collaboration de ces deux auteurs. Il est clair que la Partie I est l'œuvre d'un arpenteur, que la Partie II est l'œuvre d'un géomètre praticien qui ne vise pas en particulier la mesure des champs, et qui a pu faire suivre ses problèmes abstraits de questions stéréométriques sur les colonnes, etc.

La Partie I serait l'œuvre d'Epaphroditus, les Parties II et III appartiendraient à Vitruvius Rufus. Le nom d'Epaphroditus nous reporterait au IIe ou IIIe siècle; avec Vitruvius Rufus, nous serions au IIIe siècle et plus probablement au IIe, ainsi qu'avec M. Junius Nipsus : « Il est incontestable, dit M. Tannery, que la deuxième Partie représente une source grecque, qu'elle est empruntée à quelque *géodète* de la bonne époque. On pensait naturellement à Héron d'Alexandrie, lorsqu'on était d'accord pour le placer vers l'an 100 avant J.-C.; maintenant qu'on ne peut guère le considérer comme antérieur au IIe siècle de notre ère, il faut plutôt penser que l'auteur suivi par Vitruvius Rufus est un de ceux que Héron a compilés de son côté, et si un nom peut être indiqué à titre de simple conjecture, je n'hésiterai pas à prononcer celui de Philon de Byzance, qui me paraît avoir été le guide principal de Héron pour la Géométrie, comme Ctésibios le fut pour la Mécanique, et dont un architecte romain devait naturellement étudier [redacted]

Chaque paragraphe de ce texte est précédé de références, autant qu'il est nécessaire, soit au texte de Lachmann (*Grom. vet.*), soit à celui de M. Cantor, soit enfin à celui de M. Curtze; on y a joint l'indication de quelques leçons qui n'ont pas été données par ce dernier, pour le ms. 14836 de Munich.

L'intelligence en est facilitée par une soigneuse annotation due à M. P. Tannery, pour la partie mathématique, et à M. V. Mortet, pour la partie historique et philologique.

Deux fac-similés sont placés à la fin de cette publication.

CLAUDII PTOLEMÆI OPERA QUÆ EXSTANT OMNIA. — SYNTAXIS MATHEMATICA edidit J.-L. Heiberg. Pars I, libros I-VI continens. 546 pages in-16. Leipzig, Teubner, 1898.

Après ses éditions d'Archimède, d'Apollonius et d'Euclide, l'infatigable Heiberg a entrepris celle de Ptolémée et nous donne aujourd'hui la première moitié de l'*Almageste*. Jusqu'à présent, le texte grec n'avait paru que deux fois : à Bâle en 1538, à Paris en 1813. Comme la plupart des éditions du XVIe siècle, la première ne reposait que sur un seul manuscrit, et le premier venu; l'abbé Halma, qui a donné celle de Paris, avait, au contraire, collationné d'excellents manuscrits et il a imprimé les variantes des trois principaux, parmi lesquels deux étudiés à nouveau par M. Heiberg, à savoir : A = *Bibl. Nat.*, gr. 2389, et C = 313 de la Bibl. Saint-Marc de Venise. Malheureusement, Halma n'avait ni un sens critique suffisamment exercé, ni une connaissance de la langue grecque qui pût inspirer confiance. La publication d'une nouvelle édition, faite conformément aux règles philologiques actuelles, était donc éminemment désirable, et elle honore également la librairie Teubner et le savant danois dont elle emploie si utilement la précieuse activité.

M. Heiberg a établi son texte en suivant de préférence le manuscrit A, qui est du IXe siècle et paraît provenir de l'Égypte. Il en a relevé avec soin toutes les particularités orthographiques et a donné en même temps la collation complète des manuscrits B = Vaticanus gr. 1594, également du XIe siècle; C, copie du

précédent, et D = Vaticanus gr. 180, du XII[e] siècle seulement, mais conservant parfois seul la vraie leçon à côté d'interpolations audacieuses.

On peut désormais avoir confiance de posséder le texte de Ptolémée, sinon comme il l'a écrit, au moins comme le lisaient les savants d'Alexandrie vers l'an 500, date à laquelle paraissent remonter les prototypes des manuscrits précités.

Le travail ingrat accompli par M. Heiberg est d'autant plus méritoire que le texte n'est pas autant amélioré, par rapport à l'édition de Paris, qu'il aurait pu l'espérer; la vérité est que, quand Halma a été, un jour, assez malencontreux pour lire, au lieu de Αὐγούστου Καίσαρος (*César Auguste*), Αὐγούστου καὶ σάρος, et traduire *Auguste et le saros,* on devait se demander ce que pouvait valoir son texte de Ptolémée. Mais, en fait, ce texte, au moins pour l'*Almageste*(1) était satisfaisant, et relativement très supérieur à la version française, où les erreurs sont fréquentes; c'est qu'en réalité il n'y a pas eu d'altérations graves dans la traduction manuscrite, comme pour tant d'autres auteurs mathématiques, et que, d'un autre côté, l'édition de Bâle avait été déjà assez soigneusement faite (par Simon Grynœus?) pour servir de guide.

Le résultat le plus saillant de la nouvelle édition est peut-être au reste de nous apprendre que l'usage de distinguer par des accents les minutes, secondes, tierces sexagésimales ne remonte pas au temps des manuscrits anciens. Les nombres de chaque ordre se suivent simplement en commençant par celui des degrés, chacun d'eux étant surmonté d'un trait horizontal (comme au reste

[redacted]

passages, particulièrement ceux qui intéressent l'histoire de l'Astronomie, dont le sens est difficile à saisir. Le nouveau texte a un autre inconvénient pour le lecteur : conformément à l'habitude qui règne maintenant pour les éditions critiques, parce qu'elle se rapproche de l'usage des manuscrits, les signes de ponctuation sont aussi rares que possible. Dans l'édition Halma, ils sont, au contraire, prodigués outre mesure, et souvent à faux; cependant, pour mon compte particulier, je trouve plus commode de lire un texte où il y a trop de virgules que celui où l'on rencontre jusqu'à cinq lignes de suite sans un signe de ponctuation. Et je crois devoir d'autant plus protester contre un errement qui me semble fâcheux, que trop souvent (M. Heiberg sait bien que je ne dis pas cela pour lui) l'éditeur évite ainsi trop aisément une des difficultés de sa tâche, qui est de donner un texte facilement intelligible; lorsque la ponctuation est ambiguë, il est commode de laisser au lecteur le souci de la placer où il faut. Mais il préférerait être guidé et avoir au moins devant lui une opinion.

PAUL TANNERY.

WISLICENUS (DR. WALTER F.). — ASTRONOMISCHE CHRONOLOGIE. EIN HÜLFSBUCH FÜR HISTORIKER, ARCHÆOLOGEN UND ASTRONOMEN. In-8°, 163 p. Leipzig, Teubner, 1895.

Cet opuscule est destiné à servir de manuel pour les historiens qui, pour des problèmes chronologiques, ont à effectuer des calculs du ressort de l'Astronomie. Une première Partie donne les définitions et notions indispensables; la seconde expose, sur des exemples numériques, la solution méthodique des diverses questions qui peuvent se présenter lorsque, d'une indication sur le lever ou le coucher d'une étoile, sur une éclipse de Soleil ou de Lune, etc., on espère déduire une date plus ou moins approchée. Le mode de passage d'un calendrier à un autre est, d'autre part, sommairement indiqué.

L'auteur présente avec raison, je crois, son travail comme pouvant être utilisé par les astronomes qui s'occupent de recherches sur l'histoire de leur science; pour des dates très éloignées, les

Tables du Soleil de Le Verrier, par exemple, ne suffisent pas, et les calculs à effectuer peuvent être sensiblement abrégés par les procédés qu'indique le professeur de l'Université de Strasbourg.

Son manuel rendra-t-il de même des services aux historiens? J'en douterais davantage, quoiqu'il soit, en fait, d'un format très commode, qu'il soit très suffisamment clair et n'exige que des connaissances élémentaires. Mais il ne dispense naturellement point de Tables astronomiques; son but est au contraire d'enseigner à tirer des diverses Tables tout le parti possible. Mais tout d'abord les Tables les plus simples et les plus commodes effraient ceux qui ne sont point habitués à en manipuler; puis, s'il faut que l'historien aille dans une grande bibliothèque publique afin de faire un calcul, il y a bien des chances pour qu'il y renonce. La véritable solution serait de mettre à la disposition de ceux qui s'occupent de recherches de ce genre, et cela sous un format commode, un Volume contenant des tables faites spécialement pour eux, avec toutes les instructions nécessaires. Peut-être serait-on amené à en dresser une série pour l'antiquité, et une autre pour le moyen âge. En tout cas, s'il existait un tel Volume bien complet, l'usage à en faire en serait aisé à comprendre dans les diverses techniques que l'historien doit apprendre et dont plusieurs sont notablement plus difficiles.

PAUL TANNERY.



morphes dans leur voisinage; de plus, pour ces mêmes valeurs, le déterminant fonctionnel des F, par rapport aux y, est supposé différent de zéro. Dans ces conditions, les équations (1) définissent un système bien déterminé de fonctions analytiques $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des arguments $x_1, x_2, \ldots, x_p$, qui, pour $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \ldots, x_p = x_p^0$, se réduisent respectivement à $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$, et qui sont holomorphes tant que les modules des différences $x_1 - x_1^0, \ldots, x_p - x_p^0$ restent suffisamment petits.

Pour établir cette proposition fondamentale, on a souvent recours au théorème concernant l'existenee des intégrales des équations différentielles [1]; c'est là un détour qu'on pourrait évidemment éviter en appliquant directement aux équations données la méthode de Cauchy dite *Calcul des limites*.

Une antre démonstration est fondée sur la théorie des résidus de Cauchy; elle a l'avantage de s'étendre facilement au cas des fonctions algébroïdes [2].

On peut encore employer avec succès la méthode des approximations successives, comme l'a fait M. Schwarz dans une question analogue [3].

Ces dernières démonstrations s'appuient sur certains théorèmes généraux de la théorie des fonctions qui ne sont pas tout à fait élémentaires. Nous donnerons ici une démonstration très simple qui ne suppose que les premières notions sur la convergence des séries entières. Ensuite nous montrerons comment, après avoir établi l'existence des fonctions implicites, on en déduit immédiatement celle des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires.

1. Nous considérons d'abord un système particulier de la forme

$$y_i = x f_i(x; y_1, \ldots, y_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

les f désignant des fonctions analytiques de $x, y_1, \ldots, y_n$, et des paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, qui sont holomorphes pour $x = y_j = \lambda_k = 0$.

---

(1) *Voir*, par exemple, GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 18.

(2) É. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. IX.

(3) *Zur Lehre von den unauswickelten Funktionen* (*Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1897).

Soient

$$(3) \qquad y_i = \sum C^{(i)}_{\nu,\nu_1,\ldots,\nu_p} x^\nu \lambda_1^{\nu_1} \ldots \lambda_p^{\nu_p}$$

les séries qui satisfont formellement aux équations précédentes. Pour en démontrer la convergence, nous remplacerons tous les coefficients des développements f par leurs modules. Soit

$$(4) \qquad y_i = x\bar{f}_i(x; y_1, \ldots, y_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$$

le système obtenu. Il admettra comme solutions formelles certaines séries à coefficients *positifs :*

$$(5) \qquad Y_i = \sum \bar{C}^{(i)}_{\nu,\nu_1,\ldots,\nu_p} x^\nu \lambda_1^{\nu_1} \ldots \lambda_p^{\nu_p},$$

et l'on aura évidemment, pour toutes les valeurs des indices i, ν, $\nu_1, \ldots, \nu_p$,

$$|C^{(i)}_{\nu,\nu_1,\ldots,\nu_p}| \leqq \bar{C}^{(i)}_{\nu,\nu_1,\ldots,\nu_p}.$$

Il nous suffit donc de démontrer la convergence des séries (5).

A cet effet, considérons les polynomes

$$(6) \qquad Y_i^{(k,k_1,\ldots,k_p)} = \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{\nu_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{\nu_p=0}^{k_p} \bar{C}^{(i)}_{\nu,\nu_1,\ldots,\nu_p} x^\nu \lambda_1^{\nu_1} \ldots \lambda_p^{\nu_p}.$$

D'après la loi de formation même des séries (5), on aura la formule de récurrence suivante

[redacted]

sitives comprises dans le domaine précédent. Tous les termes des séries $\overline{f}$ et des polynomes (6) étant alors positifs, l'équation (8) nous donne

$$Y_i^{(1, k_1, \ldots, k_p)} \leqq x \overline{f}_i(x; 0, \ldots, 0; \lambda_1, \ldots, \lambda_p) \leqq M x,$$

et, par suite, si nous imposons à la variable x la condition $0 \leqq x \leqq h$, h désignant la plus petite des quantités a et $\frac{b}{M}$,

$$Y_i^{(1, k_1, \ldots, k_p)} \leqq M \frac{b}{M} = b.$$

Il s'ensuit, x restant toujours dans le même intervalle,

$$Y_i^{(2, k_1, \ldots, k_p)} = x[\overline{f}_i(x; Y_j^{(1, k_1, \ldots, k_p)}; \lambda_1, \ldots, \lambda_p)]_{1, k_1, \ldots, k_p} \leqq M x \leqq b,$$

et plus généralement, puisque ce raisonnement s'étend successivement à toutes les valeurs de k,

$$Y_i^{(k, k_1, \ldots, k_p)} < b,$$

inégalité qui subsistera, quels que soient les indices $k, k_1, \ldots, k_p$, pour les valeurs réelles et positives de $x, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ comprises dans les intervalles

$$0 \leqq x \leqq h, \qquad 0 \leqq \lambda_k \leqq c.$$

Les séries (5) sont donc convergentes dans le domaine

$$|x| \leqq h, \qquad |\lambda_k| \leqq c,$$

et, par suite, il en est de même des séries (4).

2. Avant d'arriver au cas général, considérons encore le système

$$(9) \qquad y_i = \alpha_i x + f_i(x; y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les développements des f ne contenant que des termes de degré $\geqq 2$. Pour démontrer la convergence des séries qui le vérifient, nous remplaçons les coefficients des f_i par leurs modules et les constantes α_i par leur plus grande valeur absolue α; soient

$$(10) \qquad y_i = \alpha x + \overline{f}_i(x; y_1, \ldots, y_n),$$

les équations ainsi obtenues. En y substituant $y_i = x(\alpha + z_i)$, on

aura

$$(11)\qquad z_i = x\,\varphi_i(x;\, z_1, \ldots, z_n),$$

où les fonctions

$$(12)\qquad \varphi_i(x;\, z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{x^2}\overline{f}_i[x;\, x(\alpha + z_1), \ldots, x(\alpha + z_n)]$$

sont développables suivant les puissances de x, $z_1, \ldots, z_p$, puisque, après la substitution, tous les termes des $\overline{f}$ contiendront x^2 en facteur.

Admettons que les séries $\overline{f}$ convergent dans le domaine

$$|x| \leqq a, \qquad |y_i| \leqq b,$$

et que le maximum de leurs modules y est égal à M. Les développements des φ seront certainement convergents dès qu'on aura

$$|x| \leqq a, \qquad |x|(\alpha + |z_i|) \leqq b,$$

ou bien

$$|x| \leqq k, \qquad |z_i| \leqq \rho - \alpha,$$

en désignant par ρ un nombre positif quelconque plus grand que α, et par k la plus petite des quantités a et $\frac{b}{\rho}$. Ceci est évident, puisque, pour $x = k$, $z_1 = \ldots = z_n = \rho - \alpha$, on aura

$$x(\alpha + z_i) = x\rho \leqq b,$$

et que, par suite, d'après (12), la somme d'un nombre quelconque

[redacted]

les solutions du système (9) sont certainement convergentes dans le même domaine.

Comme nous l'avons dit, ρ désigne un nombre positif quelconque plus grand que α; on le déterminera facilement dans chaque cas particulier de manière à étendre le plus possible le domaine de convergence.

3. Nous sommes maintenant en état de démontrer le théorème général. Sous les conditions énoncées au début, le système (1) peut toujours être mis sous la forme suivante, où nous avons écrit, pour abréger, x et y, au lieu de $x - x^0$ et $y - y^0$:

$$(13) \quad y_i = \alpha_{i1} x_1 + \ldots + \alpha_{ip} x_p + f_i(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les α désignant des constantes et les f des séries entières en $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_n$, dont les termes sont au moins du second degré. Ces équations sont vérifiées formellement par un système bien déterminé de séries entières en $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Pour la démonstration de la convergence, nous remplacerons toujours les coefficients des séries f_i ainsi que les constantes α par leurs modules. Puis, dans les équations qui en résultent :

$$(14) \quad y_i = |\alpha_{i1}| x_1 + \ldots + |\alpha_{ip}| x_p + \overline{f}_i(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_n),$$

nous substituerons $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = x$ et nous serons ramené à un système

$$(15) \quad y_i = (|\alpha_{i1}| + \ldots + |\alpha_{ip}|) x + \varphi_i(x; y_1, \ldots, y_n),$$

de la forme considérée au numéro précédent.

Supposons que les séries $\overline{f}$ convergent pour

$$|x_j| \leq a, \quad |y_k| \leq b,$$

et soit M leur module maximum dans ce domaine. Les séries φ seront convergentes pour $|x| \leq a$, $|y_k| \leq b$, et auront, pour ces valeurs, le même maximum absolu M. Donc, en désignant par α la plus grande des quantités $|\alpha_{i1}| + \ldots + |\alpha_{ip}|$, et par ρ un nombre positif quelconque plus grand que α, nous sommes assuré, d'après ce qui précède, que les séries vérifiant les équations (15) convergent pour $|x| \leq h$, h désignant la plus petite des quatre

quantités

$$a, \quad \frac{b}{\rho}, \quad \frac{\rho-\alpha}{M}a^2 \quad \text{et} \quad \frac{\rho-\alpha}{M}\left(\frac{b}{\rho}\right)^2.$$

On en conclut que les séries vérifiant les équations (14) et par suite, *a fortiori*, les solutions du système (13), équivalent au système proposé (1), sont certainement convergentes dans le domaine

$$|x_1| \leqq h, \quad \ldots, \quad |x_p| \leqq h.$$

Le théorème que nous avions en vue est donc démontré.

4. Après avoir établi l'existence des fonctions implicites, on peut, en quelques mots, démontrer le théorème fondamental de Cauchy concernant l'existence des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires. Pour cette démonstration, il nous suffit même d'invoquer le résultat du n° **1**.

Considérons, en effet, les équations différentielles

$$(16) \qquad \frac{dy_i}{dx} = F_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les F étant des fonctions analytiques de $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, holomorphes au point $x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$, et proposons-nous de démontrer que ces équations admettent un système d'intégrales qui, pour $x = x_0 + \xi$, se réduisent respectivement à $y_1^0 + \eta_1$, $y_2^0 + \eta_2, \ldots, y_n^0 + \eta_n$, et qui sont développables suivant les puissances entières et positives des quantités $x - x_0, \xi, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$.

Faisons un changement de variables en posant



où les f sont des fonctions analytiques de $x, y_1, \ldots, y_n$ et des paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, holomorphes tant que les modules de toutes ces quantités restent suffisamment petits, admet un système d'intégrales qui s'annulent avec x et qui sont développables en séries suivant les puissances de $x, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Les séries entières en $x, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ satisfaisant formellement aux équations précédentes convergent évidemment en même temps que celles qui vérifient le système

$$(18) \qquad \frac{dy_i}{dx} = \overline{f}_i(x; y_1, \ldots, y_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_p),$$

$\overline{f}_i$ désignant toujours la série obtenue en remplaçant tous les coefficients de f_i par leurs modules. Or, comparons (18) aux équations à termes finis

$$(19) \qquad y_i = x\overline{f}_i(x; y_1, \ldots, y_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_p).$$

On voit immédiatement, en écrivant les équations qui les déterminent, que les coefficients des séries vérifiant (19) sont égaux ou supérieurs aux coefficients correspondants des séries qui vérifient (18). Soit donc, en reprenant la notation du n° 1,

$$|x| \leqq a, \qquad |y_j| \leqq b, \qquad |\lambda_k| \leqq c,$$

un domaine où convergent les séries $\overline{f}$, et soit M la plus grande valeur absolue qu'elles y acquièrent. Nous savons, d'après le n° 1, que les séries qui nous donnent la solution de (19) convergent pour

$$(20) \qquad |x| \leqq h, \qquad |\lambda_k| \leqq c,$$

h désignant la plus petite des quantités a et $\frac{b}{M}$. Par suite, en remontant successivement aux équations (18) et (17), nous pouvons affirmer que les séries entières en $x, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$, qui vérifient formellement le système proposé (17), sont certainement convergentes dans le domaine (20) et qu'elles nous fournissent, par conséquent, les intégrales cherchées. Le théorème de Cauchy est donc démontré.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Carda (K.). — *Zur Geometrie auf Flächen constanter Krümmung.* Gr. in-8°, 18 p. avec 4 fig. Wien, Gerold's Sohn. 40 pf.

Dölp (H.). — *Aufgaben zur Differential und Integralrechnung, nebst den Resultaten und den zur Lösung nöth. theoret. Erläuterungen.* 7e édition, revue par E. Netto. Gr. in-8°, III-216 p. Giessen, Ricker. Relié, 4 m.

Kiepert (L.). — *Grundris der Differential-u. Integralrechnung.* I Thl. : *Differential-Rechnung. 8. Auf. des gleichnam. Leitfadens v. M. Stegmann.* Gr. in-8°, XVIII-660 p. avec 160 fig. Hannover, Helwing. 12 m.

Klug (L.). — *Die Configuration des Pascal'schen Sechseckes im Allgemeinen u. in 4 speciellen Fällen.* Gr. in-8°, 132 p. avec 1 table et 3 planches. Wien, Eisenstein et Co. 3 m.

Le Roy (E.). — *Sur l'intégration des équations de la chaleur.* In-4°, 264 p. Paris, Gauthier-Villars.

Maennchen (Ph.). — *Die Transformation der trilinearen ternären Form in eine theilweise symmetrische. Dissert.* Gr. in-8°, 32 p. Leipzig, Teubner. 1 m. 20 pf.

Nédélec (G.). — *Le Calcul vectoriel et ses applications en Géométrie et en Mécanique.* 1 vol. in-8°, XII-216 p. Paris, Gauthier-Villars.

Nernst (W.) u. Schönflies (A.). — *Einführung in die Mathematische Behandlung der Naturwissenschaften.* Kurzgefasstes Lehrbuch [redacted]

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CESÀRO (E.). — ELEMENTI DI CALCOLO INFINITESIMALE CON NUMEROSE APPLICAZIONI GEOMETRICHE. Un volume in-8°, 400 pages. Napoli, L. Alvano, 1899.

Les *Éléments de Calcul infinitésimal* de M. Cesàro sont divisés en trois Parties : *Théories fondamentales, Calcul différentiel, Calcul intégral*. L'auteur s'est limité aux variables réelles.

Les *Théories fondamentales* comprennent tout ce qui est nécessaire pour élucider et préciser les notions de fonction, de limite, de dérivée, de séries de fonctions; elles se terminent par un Chapitre sur les fonctions de plusieurs variables. Ces théories sont exposées sous la forme abstraite, d'une façon très rigoureuse en même temps que très sobre; tout en multipliant les illustrations géométriques, l'auteur montre, sur des exemples, comment l'intuition géométrique ordinaire est insuffisante : ces exemples sont très bien choisis, intéressants en eux-mêmes et assez simples pour que l'attention ne s'écarte pas de l'objet que l'auteur a en vue. M. Cesàro ne se contente pas d'ailleurs d'enseigner ce qui est essentiel; il tient à éviter les erreurs dans lesquelles tombent facilement les étudiants. On sent chez lui l'habitude et le souci de l'enseignement.

Le Chapitre sur les séries contient : la notion de la convergence uniforme et les propositions qui s'y rapportent, par exemple, le théorème sur la possibilité de différentier terme par terme une série qui donne ainsi naissance à une série uniformément convergente; l'étude de la série de Taylor; un intéressant paragraphe sur les valeurs asymptotiques des séries entières et, en particulier, sur le théorème d'Abel, l'étude de la variation des fonctions. Signalons aussi une exposition élégante des principes de la théorie de l'interpolation, fondée sur la formule d'Ampère. Dans le Chapitre sur les fonctions de plusieurs variables, à propos de la règle pour prendre la dérivée d'un déterminant, l'auteur établit la propriété fondamentale des déterminants wronskiens. Pour la théorie des maxima et des minima, il se limite au cas où leur détermination dépend de la considération d'une forme quadratique définie.

J'ai déjà insisté sur le soin qu'a apporté M. Cesàro au choix des exemples et des exercices; beaucoup mériteraient d'être signalés, mais leur nombre est si considérable qu'on est quelque peu embarrassé pour choisir. Afin de montrer seulement combien il a le souci de faciliter au lecteur ses études ultérieures je cite ceux qui se rapportent à cette théorie des maxima et des minima : longueur des axes d'une conique; cas d'une section centrale dans un ellipsoïde; équation de la surface des ondes; plus courte distance de deux droites; ce dernier problème et les problèmes analogues conduisent à chercher le minimum de la somme des carrés de n variables, liées par m équations linéaires; et cette dernière question permet de donner au lecteur des indications utiles sur la méthode des moindres carrés.

La notation différentielle dont il n'a pas encore été question est introduite au début du *Calcul différentiel;* elle donne l'occasion à M. Cesàro de se moquer des philosophes qui n'entendent pas les Mathématiques. Il développe ensuite la théorie du changement de variables, des fonctions implicites, des déterminants fonctionnels, etc. Les principales applications géométriques sont traitées dans une centaine de pages, avec d'abondants exemples. On est peut-être un peu étonné, au début, de voir que l'auteur, qui a pris tant de soin à établir les principes, admet, sans s'arrêter à la justifier, la notion de la longueur de l'arc d'une courbe. M. Cesàro aura sans doute consenti à ce sacrifice pour ne pas déranger l'ordre qu'il avait adopté et ne pas introduire trop tôt la notion d'intégrale définie. Sans doute cette dernière notion aurait pu être [redacted]

lons une suite d'intégrales définies importantes obtenues, comme limites de sommes, par des décompositions ingénieuses de l'intervalle d'intégration : l'auteur obtient ainsi, en particulier, les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,\quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx,\quad \int_0^1 \log\Gamma(x)\,dx.$$

La notion d'intégrale double, rattachée d'abord au problème de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f(x,y),$$

est ensuite présentée sous forme abstraite, mais seulement avec les indications qui doivent suffire au lecteur pour qu'il se rende compte de la nature de cette notion.

Après avoir développé les procédés classiques d'intégration, l'auteur dit quelques mots des fonctions elliptiques, avec l'intention évidente d'intéresser le lecteur à un sujet qu'il ne peut développer, puis passe aux applications géométriques.

Les parties ultérieures du *Calcul intégral* sont traitées dans le sens pratique; le but de l'auteur est évidemment de mettre l'étudiant à même de traiter quelques exemples simples et de se familiariser avec les méthodes; mais il ne s'attardera plus aux *théorèmes d'existence*. Ainsi le problème de l'intégration des équations différentielles ordinaires du premier ordre est posé géométriquement. Tout en restant dans le même ordre d'idées, il conviendrait peut-être d'apporter quelques restrictions à la méthode indiquée pour la formation de l'intégrale singulière. M. Cesàro explique la méthode de Lagrange pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, à deux variables indépendantes, et termine par des indications rapides sur la méthode des variations.

Le livre de M. Cesàro rendra d'excellents services aux étudiants, les principes y sont établis d'une manière solide; la pratique du calcul y est expliquée avec soin; le lecteur peut se rompre à cette pratique grâce à de nombreux exemples : ces exemples, par la façon dont ils sont traités, lui fourniront des modèles d'élégance et ne manqueront pas d'exciter chez lui, par leur intérêt, la curiosité et le goût de la Science.

J. T.

Mc AULAY (A.). — OCTONIONS A DEVELOPMENT OF CLIFFORD'S BIQUATERNIONS. 1 Vol. in-8°; xiv-253 p., Cambridge, University Press, 1898.

Voici, tout d'abord, quelques définitions nécessaires pour comprendre l'objet de l'auteur. Ces définitions sont empruntées en partie à Clifford.

Un *lator* est une quantité définie par une direction et un nombre positif ou négatif (*scalar*).

Un *rotor* est une quantité définie par une direction, une droite indéfinie, parallèle à cette direction et un *scalar*. La droite indéfinie est l'axe du *rotor*.

Un *motor* est une quantité définie par un *rotor* et un *lator* qui sont parallèles. L'axe du *rotor* est l'axe du *motor*. L'un des éléments peut être supposé nul en sorte qu'un *rotor* pris isolément, ou un *lator*, doit être considéré comme un *motor* particulier. Toutefois, dans le cas d'un *lator*, l'axe du *motor* n'est pas défini; toute droite parallèle au *lator* peut être regardée comme l'axe du *motor*. La supposition faite dans la définition générale du *motor*, à savoir que le *rotor* et le *lator* dont il est composé sont parallèles, n'intervient que pour pouvoir dire que l'axe du *motor* est l'axe du *rotor*. Si on la supprime, on peut dire seulement que l'axe du *motor* est parallèle à l'axe du *rotor*.

Un *octonion* est défini par un *motor* et deux *scalars*, dont l'un est dit le *scalar* ordinaire et l'autre le *convert* de l'*octonion*. L'axe du *motor* est l'axe de l'*octonion*.

[redacted]

Il peut être regardé comme l'ensemble de ces deux quaternions. L'auteur pose

$$Q = q + \Omega r,$$

en désignant par Q l'*octonion;* par q, r les deux quaternions, et par Ω un symbole qui jouera exactement le rôle d'un scalar, si ce n'est que son carré devra être regardé comme nul. C'est de là que résultent les règles pour l'addition et le produit de deux *octonions.*

Le rôle des *lators*, *rotors* et *motors* en Mécanique apparaît suffisamment sur les définitions. Le *motor* coïncide avec ce que Plücker avait proposé d'appeler *dyname* au début de sa *Neue Geometrie des Raumes* et la *Theory of Screws* de sir Robert Ball est, si l'on veut, une théorie des *motors*. Au reste M. Mac Aulay déclare qu'un grand nombre des applications qu'il traite lui ont été suggérées par ce dernier Livre. D'autres se rapportent à la Physique mathématique, où les octonions peuvent rendre des services très analogues à ceux que l'on tire des quaternions.

Dans la partie purement théorique de son Livre, l'auteur développe, outre les opérations fondamentales sur les octonions, la théorie des *motors* comme fonctions linéaires d'autres *motors;* une telle fonction φE d'un *motor* est elle-même un *motor* qui jouit de la propriété

$$\varphi E + \varphi F = \varphi(E + F):$$

à ce degré de généralité, elle n'est pas l'analogue de la fonction linéaire d'un quaternion, définie de la même façon. La fonction linéaire particulière qui conserve l'analogie avec la fonction linéaire de la doctrine des quaternions est désignée par l'auteur sous le nom de *fonction commutative* et ses propriétés sont étudiées en détail. Enfin, un important Chapitre est consacré aux *motors* comme grandeurs du premier ordre, au sens de l'*Ausdehnungslehre.*

Le Livre de M. Mac Aulay est plutôt un Mémoire qu'un Traité didactique; l'auteur a reculé devant cette dernière forme, qui aurait nécessité quelques développements. Il est permis de le regretter et de penser que M. Mac Aulay s'est exagéré la longueur de ces développements : la clarté et la précision de ses idées, la

sûreté avec laquelle il manie les calculs symboliques lui auraient permis de rester concis, dans un Livre qui se serait adressé à un plus grand nombre de lecteurs. J. T.

GENOCCHI (A.). — Differential-Rechnung und Grundzüge der Integral Rechnung, herausgegeben von G. Peano. — Autorisirte deutsche Ueberzetzung, von *G. Bohlmann* und *A. Schepp;* mit einem Vorwort von *A. Mayer*. Erste Lieferung, 224 p. in-8°. Leipzig, Teubner; 1898.

Nous sommes heureux d'annoncer la traduction allemande du Traité de Calcul différentiel et intégral de MM. Genocchi et Peano. Cet excellent Livre a été assurément un des premiers Ouvrages didactiques où plusieurs propositions fondamentales ont été présentées d'une façon entièrement satisfaisante; il est, en outre, simple et clair. Son succès est amplement justifié. J. T.

MÉLANGES.

SUR LES ROTATIONS;

PAR M. C. BURALI-FORTI.

[redacted]

thode de H. Grassmann, on obtient, pour les rotations, une opération bien plus simple que celle qu'on obtient au moyen des quaternions. Je suppose que le lecteur connaisse le contenu de mon Livre : *Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann* (Paris, Gauthier-Villars; 1897) que j'indique avec la notation *m. l.*

1. Nous rappelons ici quelques-unes des propriétés des transformations linéaires.

Soient $u, v, w, \ldots$ des systèmes linéaires d'une même dimension de formes géométriques (*m. l.*, p. 53).

Nous disons que σ est une *transformation linéaire* (ou simplement *transformation*) parmi les u et les v quand, quels que soient les éléments $a, b, \ldots$ de u et le nombre réel x, $\sigma a, \sigma b, \ldots$ sont des éléments bien déterminés de v, et qu'on a

$$\sigma(a+b) = \sigma a + \sigma b, \qquad \sigma(xa) = x(\sigma a).$$

Un nombre réel est toujours une transformation.

Si σ, λ sont des transformations parmi les u et les v, on a $\sigma = \lambda$ quand, quel que soit l'élément a de u, on a $\sigma a = \lambda a$.

Posons, dans les mêmes hypothèses,

$$(\sigma + \lambda)a = \sigma a + \lambda a;$$

et $\sigma + \lambda$ constitue une transformation bien déterminée.

Si σ est une transformation parmi les u et les v et si λ est une transformation parmi les v et les w, nous posons, quel que soit l'élément a de u,

$$(\lambda\sigma)a = \lambda(\sigma a),$$

et $\lambda\sigma$ constitue une transformation bien déterminée parmi les u et les w.

Dans les mêmes hypothèses, nous posons, pour abréger,

$$\lambda\sigma a = (\lambda\sigma)a.$$

Le produit des transformations n'a pas, en général, la propriété *commutative;* mais le produit de trois ou plusieurs transformations a toujours la propriété *associative*. Le produit de deux transformations dont une est un nombre a toujours la propriété commutative.

Soit σ une transformation, parmi les u et les v, fonction d'une variable numérique t, et soit σ_0 une transformation fixe parmi les u et les v. Nous disons que

$$\lim_{t=t_0} \sigma = \sigma_0,$$

lorsque, quel que soit l'élément a de u,

$$\lim_{t=t_0} (\sigma a) = \sigma_0 a.$$

Dans les mêmes hypothèses, nous posons

$$\frac{d\sigma}{dt} = \lim_{h=0} \frac{\sigma(t+h) - \sigma(t)}{h} \quad \text{et} \quad d\sigma = \frac{d\sigma}{dt} dt$$

quand la limite considérée pour $h = 0$ est une transformation bien déterminée. Les règles ordinaires de dérivation subsistent, celles qui dépendent de la propriété commutative exceptées.

Si σ_1, σ_2, σ_3, ... est une suite illimitée de transformations parmi les u et les v, nous posons

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots = \lim_{n=\infty} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \ldots, + \sigma_n)$$

quand le deuxième membre est une transformation bien déterminée.

Une transformation parmi les u et les u est appelée *substitution*. Si σ est une substitution entre les u et n un nombre entier, posons

$$\sigma^1 = \sigma, \quad \sigma^{n+1} = \sigma\sigma^n,$$

[redacted]

soit le vecteur U,

(1) $$(i, \mathrm{I})\mathrm{U} = |\,\mathrm{IU},$$

où (*m. l.*, p. 27) $|\,\mathrm{IU}$ est l'index du bivecteur IU (axe moment du couple IU).

Quand on n'a pas à craindre d'équivoques, nous écrirons, tout simplement, i au lieu de (i, I).

L'opération (i, I) *est une substitution.* En effet, quels que soient les vecteurs U, V et le nombre x, on a

$$i(\mathrm{U}+\mathrm{V}) = |\,\mathrm{I}(\mathrm{U}+\mathrm{V}) = |(\mathrm{IU}+\mathrm{IV}) = |\,\mathrm{IU} + |\,\mathrm{IV} = i\mathrm{U} + i\mathrm{V},$$
$$ix\mathrm{U} = |\,\mathrm{I}(x\mathrm{U}) = x\,|\,\mathrm{IU} = xi\mathrm{U}.$$

Le vecteur $|\,\mathrm{IU}$ est le produit régressif (*m. l.*, p. 49) dans le plan à l'infini des vecteurs $|\,\mathrm{I}, |\,\mathrm{U}$; par conséquent on a

$$i^2\mathrm{U} = i\,|\,\mathrm{IU} = |(\mathrm{I}.|\,\mathrm{IU}) = -\,|(|\,\mathrm{I}.|\,\mathrm{U})\mathrm{I} = -\,|\,\{|\,\mathrm{U} - (\mathrm{I}\,|\,\mathrm{U})\,|\,\mathrm{I}\},$$

d'où l'on tire

(2) $$i^2\mathrm{U} = (\mathrm{I}\,|\,\mathrm{U})\mathrm{I} - \mathrm{U}.$$

En observant que $(i, \mathrm{I})\mathrm{I} = 0$, on a, par l'équation (2),

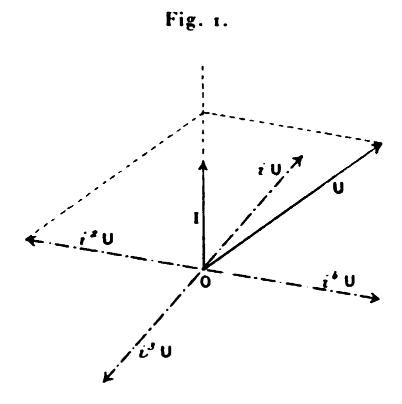
(3) $$i^3\mathrm{U} = -\,i\,\mathrm{U},$$
(4) $$i^4\mathrm{U} = -\,i^2\mathrm{U},$$
(5) $$i^5\mathrm{U} = \,i\,\mathrm{U}.$$

3. Soit O un point fixe, que nous prenons comme origine de tous les vecteurs.

Le vecteur $i\mathrm{U}$ a les propriétés suivantes : il est un vecteur du plan $\mathrm{O}\,|\,\mathrm{I}$ (le plan perpendiculaire à I qui passe par O); il est perpendiculaire au plan OIU; son module est le module du bivecteur IU (le moment du couple IU); son sens est tel que le nombre $\mathrm{OIU}(i\mathrm{U})$ est positif. En observant que $(\mathrm{I}\,|\,\mathrm{U})\mathrm{I}$ est la projection, en grandeur et sens, de U sur I, il résulte par l'équation (2) que $i^2\mathrm{U}$ est le vecteur du plan $\mathrm{O}\,|\,\mathrm{I}$ qu'on obtient en faisant tourner $i\mathrm{U}$ d'un angle droit dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, placée sur le plan $\mathrm{O}\,|\,\mathrm{I}$, et dont un observateur, qui a les pieds en O et la tête en $\mathrm{O}+\mathrm{I}$ regarde le cadran. De ce que nous venons de dire, il résulte que lorsque la substitution (i, I) est appliquée aux vecteurs du plan $\mathrm{O}\,|\,\mathrm{I}$ elle coïncide avec l'opé-

ration qu'on indique, ordinairement et tout simplement, avec le signe i (*m. l.*, p. 20), le sens positif de la rotation restant sous entendu (i^1U est la projection, en grandeur et sens, de U sur le plan O | I).

Fig. 1.



Cela posé, $e^{(i,I)x}$ ou simplement e^{ix} est une opération qui, appliquée à un vecteur du plan O | I, fait tourner ce vecteur d'un angle x dans un sens déterminé (*m. l.*, p. 24). Alors si nous disons que : K *est le vecteur qu'on obtient en faisant tourner* U *autour de* I *de l'angle* x, *lorsque*

$$i\text{K} = e^{ix}\, i\text{U},$$

c'est-à-dire lorsqu'on *obtient la projection de* K *sur le plan* O | I *en faisant tourner de l'angle* x, *sur le même plan, la projection de* U, on a

[redacted]

de l'opération qu'on doit appliquer à un vecteur quelconque pour le faire tourner de l'angle x, en un sens déterminé, autour du vecteur I (¹).

Soient U un vecteur quelconque, x, y des nombres réels et n un nombre entier. On a fort aisément

$$(6) \qquad e^{(i,\mathrm{I})}\mathrm{I} = \mathrm{I},$$

$$(7) \qquad i^n e^{ix} = e^{ix} i^n,$$

$$(8) \qquad e^{ix} e^{iy} = e^{i(x+y)},$$

$$(9) \qquad de^{ix}\mathrm{U} = dx . e^{ix} i\mathrm{U} + e^{ix} d\mathrm{U}.$$

3 *bis*. Soient I, J, K des vecteurs unité. Si nous posons

$$\mathrm{I}_1 = \left| \frac{\mathrm{JK}}{\mathrm{mod\,JK}}, \qquad \mathrm{J}_1 = \left| \frac{\mathrm{KI}}{\mathrm{mod\,KI}}, \qquad \mathrm{K}_1 = \left| \frac{\mathrm{IJ}}{\mathrm{mod\,IJ}}, \right.\right.\right.$$

il résulte que I_1, J_1, K_1 sont des vecteurs unité.

Indiquons avec la notation, par exemple, ang(J, K) le plus petit nombre positif x tel que $\mathrm{K} = e^{(i,\mathrm{I}_1)x}\mathrm{J}$, et nous aurons, si $\mathrm{J} \neq \mathrm{K}$, $\mathrm{ang}(\mathrm{J}, \mathrm{K}) + \mathrm{ang}(\mathrm{K}, \mathrm{J}) = 2\pi$.

Cela posé, et en observant que $e^{(i,\mathrm{I})\pi}$, $e^{(i,\mathrm{J})\pi}$, $e^{(i,\mathrm{K})\pi}$ sont les symétries par rapport aux vecteurs I, J, K, nous avons

$$(10) \qquad e^{(i,\mathrm{J})\pi} e^{(i,\mathrm{K})\pi} = e^{(i,\mathrm{I})2\,\mathrm{ang}(\mathrm{K},\mathrm{J})},$$

et deux autres formules analogues pour les couples K, I et I, J.

En effet, si U est un vecteur complanaire avec les vecteurs J, K, la formule

$$(10') \qquad e^{(i,\mathrm{J})\pi} e^{(i,\mathrm{K})\pi}\mathrm{U} = e^{(i,\mathrm{I}_1)2\,\mathrm{ang}(\mathrm{K},\mathrm{J})}\mathrm{U}$$

est immédiatement vérifiable sur le plan des vecteurs J, K, U.

Si U n'est pas complanaire avec J et K, posons $\mathrm{U} = \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2$, U_1 étant parallèle au vecteur I_1 et U_2 complanaire avec J et K : les deux membres de la formule (10) sont des opérations qui transforment U en U_1, et donc pour la (10′) la formule (10) est, en général, vraie.

En vertu de la propriété associative du produit de substitutions et en observant que le produit d'une symétrie par elle-même est

(¹) *Voir* G. Peano, *Calcolo geometrico*, p. 164. Torino, 1888.

l'identité (le nombre 1), nous avons

$$e^{(i,\,\mathrm{J})\pi}e^{(i,\,\mathrm{K})\pi}e^{(i,\,\mathrm{K})\pi}e^{(i,\,\mathrm{I})\pi}e^{(i,\,\mathrm{I})\pi}e^{(i,\,\mathrm{J})\pi}=1,$$

qui donne, par les formules (10),

(11′) $$e^{(i,\,\mathrm{I}_1)\,2\,\mathrm{ang}(\mathrm{K},\,\mathrm{J})}e^{(i,\,\mathrm{J}_1)\,2\,\mathrm{ang}(\mathrm{I},\,\mathrm{K})}e^{(i,\,\mathrm{K}_1)\,2\,\mathrm{ang}(\mathrm{J},\,\mathrm{I})}=1,$$

ou encore

(11) $$e^{(i,\,\mathrm{I})\,2\,\mathrm{ang}(\mathrm{IJ},\,\mathrm{KI})}e^{(i,\,\mathrm{J})\,2\,\mathrm{ang}(\mathrm{JK},\,\mathrm{IJ})}e^{(i,\,\mathrm{K})\,2\,\mathrm{ang}(\mathrm{KI},\,\mathrm{JK})}=1$$ ([1]),

qui est la formule fondamentale pour la composition des rotations (Möbius, *Calcul barycentrique*).

4. Si nous posons, u étant un bivecteur,

(12) $$(i,\,\mathrm{I})u = |(i,\,\mathrm{I})|\,u,$$

il résulte que $(i,\,\mathrm{I})$ est une substitution pour les bivecteurs.

Par l'équation (12), on a

(13) $$|\,iu = i\,|\,u,$$

qui prouve que les deux opérations $|$, i sont commutables.

Si n est un nombre entier on a

(14) $$i^n u = |\,i^n\,|\,u,$$

et encore

(14′) $$|\,i^n u = i^n\,|\,u,$$

d'où il résulte que x étant un nombre réel

[redacted]

La formule (9) subsiste encore lorsque U est un bivecteur.

Si J, K, U sont vecteurs

(16) $$(e^{ix}\mathrm{J})(e^{ix}\mathrm{K}) = e^{ix}(\mathrm{JK}),$$

(17) $$(e^{ix}\mathrm{J})(e^{ix}\mathrm{K})(e^{ix}\mathrm{U}) = \mathrm{JKU}.$$

5. Voici des applications des formules précédentes :

1° O étant un point fixe et x un nombre réel, nous faisons correspondre à chaque point P le point

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{O} + e^{(i,\mathrm{I})x}(\mathrm{P} - \mathrm{O}).$$

Nous pouvons dire qu'on obtient P en donnant au point P une rotation égale à x autour de l'axe OI. Si P est un point de l'axe, c'est-à-dire si $\mathrm{P} = \mathrm{O} + m\mathrm{I}$, alors

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{O} + e^{ix} m\mathrm{I} = \mathrm{O} + me^{ix}\mathrm{I} = \mathrm{O} + m\mathrm{I} = \mathrm{P},$$

et chaque point de l'axe correspond à lui-même. Si P, Q, R, S sont des points, alors

$$(\mathrm{Q}_1 - \mathrm{P}_1)(\mathrm{R}_1 - \mathrm{P}_1) = e^{ix}[(\mathrm{Q} - \mathrm{P})(\mathrm{R} - \mathrm{P})],$$
$$(\mathrm{Q}_1 - \mathrm{P}_1)(\mathrm{R}_1 - \mathrm{P}_1)(\mathrm{S}_1 - \mathrm{P}_1) = (\mathrm{Q} - \mathrm{P})(\mathrm{R} - \mathrm{P})(\mathrm{S} - \mathrm{P}),$$

d'où l'on déduit qu'à une figure quelconque correspond une figure égale.

2° Si un corps a un mouvement de rotation autour de l'axe OI (O est un point fixe), et si P_0 est la position initiale d'un parmi les points du corps, alors la position P de P_0 à la fin du temps t est

$$\mathrm{P} = \mathrm{O} + e^{(i,\mathrm{I})x}(\mathrm{P}_0 - \mathrm{O}),$$

où x est une fonction de t. Pour la vélocité du point P, nous avons

$$\frac{d\mathrm{P}}{dt} = \frac{dx}{dt} e^{ix} i(\mathrm{P}_0 - \mathrm{O}).$$

Le vecteur $i(\mathrm{P}_0 - \mathrm{O})$ a pour module la distance du point P_0 (ou P) à la droite OI et, par conséquent, $\frac{dx}{dt}$ est la grandeur de la vélocité de tous les points du corps dont la distance à l'axe OI est l'unité ; c'est-à-dire $\frac{dx}{dt}$ est la *vélocité angulaire* du mouvement, qui est indépendante du point P. Pour l'accélération du

point P, nous avons

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}e^{ix}i(P_0 - O) + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 e^{ix}i^2(P_0 - O).$$

Les vecteurs $i(P_0 - O)$, $i^2(P_0 - O)$, de même module, ont respectivement la direction de la tangente et de la normale principale au point P_0 à la courbe décrite par P; par conséquent, la précédente formule donne immédiatement les composantes tangentielles et normales de l'accélération au point P et donne encore l'accélération angulaire totale, tangentielle et normale, indépendante du point considéré P.

3° Posons

$$P = O + e^{(i,\mathrm{I})x}(Q - O) + mx\mathrm{I}.$$

Si Q est un point fixe (ou bien $Q = O + e^{(i,\mathrm{I})x}(R - O) + mx\mathrm{I}$, R étant un point fixe), le point P, x variant de $+\infty$ à $-\infty$, décrit une *hélice* dont l'axe est la droite OI et m est le pas réduit (pour $m = 0$, P décrit une circonférence). Pour la tangente au point P, nous avons

$$\frac{dP}{dx} = e^{ix}i(Q - O) + m\mathrm{I} = e^{ix}[i(Q - O) + m\mathrm{I}],$$

qui donne immédiatement la construction de la tangente à l'hélice au point P en faisant usage du pas réduit.

4° En conservant pour P l'expression précédente, soit Q un point fonction d'une variable y indépendante de x. Le point P décrit une *surface de révolution générale* pour $m = 0$ et une [redacted]

pour le plan tangent au point P, nous avons

$$\frac{dP}{dx}\,\frac{dP}{dy} = e^{ix}\left\{[i(Q-O)+m\mathrm{I}]\frac{dQ}{dy}\right\}.$$

6. Soient m un nombre réel, O et P des points. Définissons le signe d'opération $(i, \mathrm{I}, \mathrm{O})$, en posant

$$(i, \mathrm{I}, \mathrm{O})(m\mathrm{P}) = m(i, \mathrm{I})(\mathrm{P}-\mathrm{O}).$$

Il résulte bien aisément que $(i, \mathrm{I}, \mathrm{O})$ est une transformation des formes du premier ordre en vecteurs. Si, n étant un nombre entier quelconque et x un nombre réel, nous posons

$$(i, \mathrm{I}, \mathrm{O})^n\mathrm{P} = (i, \mathrm{I})^n(\mathrm{P}-\mathrm{O}),$$

$$e^{(i,\mathrm{I},\mathrm{O})x}\mathrm{P} = \mathrm{P} + (i, \mathrm{I}, \mathrm{O})x\mathrm{P} + \frac{(i, \mathrm{I}, \mathrm{O})^2x^2}{2!}\mathrm{P} + \ldots,$$

on a

$$e^{(i,\mathrm{I},\mathrm{O})x}\mathrm{P} = \mathrm{O} + e^{(i,\mathrm{I})x}(\mathrm{P}-\mathrm{O}),$$

et, par conséquent, $e^{(i,\mathrm{I},\mathrm{O})}\mathrm{P}$ représente le point P depuis la rotation x autour de l'axe OI.

Nous pouvons donner une signification analogue aux expressions

$$e^{(i,\mathrm{I},\mathrm{O})}a, \quad e^{(i,\mathrm{I},\mathrm{O})}\alpha,$$

où a est une forme de deuxième ordre et α une forme de troisième ordre. On a ainsi une méthode un peu différente pour la forme de celle que nous avons employée au n° 5, pour étudier les hélices, les surfaces de révolution et hélicoïdales décrites par un point ou par une droite, ou enveloppées par un plan; mais nous laissons aux lecteurs de développer les formules relatives aux notations que nous venons d'indiquer et d'en faire des applications.

7. Soient T, N, B les vecteurs fonctions de la variable numérique s qui paraissent dans les formules de Frenet (*m. l.*, p. 120), formules qui peuvent être considérées indépendamment d'une courbe, et qui sont liées par les relations

$$\frac{d\mathrm{T}}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathrm{N}, \qquad \frac{d\mathrm{N}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{T} - \frac{1}{\tau}\mathrm{B}, \qquad \frac{d\mathrm{B}}{ds} = \frac{1}{\tau}\mathrm{N}.$$

U étant un vecteur constant quelconque, nous avons

$$\frac{d}{ds}(i,\mathrm{T})\,\mathrm{U} = \lim_{h=0}\frac{1}{h}\left[|\mathrm{T}(s+h)\mathrm{U} - |\mathrm{T}(s)\mathrm{U}\right]$$

$$= \lim_{h=0}\frac{1}{h}\Big|\left[\mathrm{T}(s+h)-\mathrm{T}(s)\,\mathrm{U}\right] = \Big|\frac{d\mathrm{T}}{ds}\,\mathrm{U} = \frac{1}{\rho}\Big|\mathrm{N}\mathrm{U} = \frac{1}{\rho}(i,\mathrm{N})\,\mathrm{U},$$

et par suite

$$\frac{d(i,\mathrm{T})}{ds} = \frac{1}{\rho}(i,\mathrm{N}),$$

$$\frac{d(i,\mathrm{N})}{ds} = -\frac{1}{\rho}(i,\mathrm{T}) - \frac{1}{\tau}(i,\mathrm{B}),$$

$$\frac{d(i,\mathrm{B})}{ds} = \frac{1}{\tau}(i,\mathrm{N}).$$

Au moyen de ces formules, on obtient les dérivées successives de l'opération (i,T), mais en forme bien compliquée, sauf dans le cas où ρ et τ sont des constantes.

La dérivée de $e^{(i,\mathrm{T})x}$ se présente aussi sous forme compliquée, car la dérivée, par exemple, de i^2 n'est pas $2i\frac{di}{ds}$, mais $i\frac{di}{ds} + \frac{di}{ds}i$.

La rotation autour d'un axe variable se présente dans le mouvement général d'un corps.



COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MAUNI (LE BARON). — LES BANDAGES PNEUMATIQUES ET LA RÉSISTANCE AU ROULEMENT, étude théorique et pratique. Paris, Dunod, 1899.

On dit, c'est un commun proverbe, qu'une question bien posée est à moitié résolue. On exagère. Les problèmes de la trisection de l'angle et de la quadrature du cercle sont très clairement et très nettement énoncés; leur solution n'en est pas plus avancée. On pourrait déclarer, avec plus de raison, que toute question mal posée devient insoluble,... jusqu'à ce qu'on la pose mieux.

La théorie de la résistance au roulement paraît mériter ce reproche; M. de Mauni, qui l'a beaucoup étudiée, le lui adresse énergiquement; il dénonce, un peu rudement, des contradictions, des omissions et des erreurs commises dans les Ouvrages classiques à l'occasion de « l'une des théories de la Mécanique dont la revision est le plus impérieusement réclamée ».

M. de Mauni est sévère. Les plus illustres ont leur part de blâme. Le nom même de frottement de roulement est condamné; il accuse ceux qui désignent ainsi la *résistance au roulement* « d'un abus de langage devenu intolérable »; il ne dit pas depuis quand. Coulomb est le moins maltraité. « Il n'a jamais songé à traiter à fond la résistance au roulement. » Il est vrai que « ses conclusions sont formulées de manière à donner le change à des lecteurs même assez attentifs ». Coulomb, dit-il ailleurs, « a commis une inadvertance, il n'a pas fait attention aux conséquences que plusieurs générations en tireraient ».

Pour Poncelet seul, M. de Mauni se montre indulgent. Poncelet s'est refusé à traiter la question : « Il faut louer sa réserve si loyale et si scientifique. » Dans le passage cité du Traité de *Mécanique industrielle*, je ne trouve rien à admirer et, si j'avais à signaler dans ce livre excellent et utile la page la moins digne de l'illustre auteur, c'est celle-là que je choisirais. Bien loin d'admirer la réserve de Poncelet, le lecteur a le droit de la blâmer et de s'en plaindre.

Pour faire apprécier l'utilité des roues, Poncelet compare le tirage d'une voiture à celui d'un simple traîneau. Il trouve, par

un calcul minutieusement poussé jusqu'au centième de kilogramme, que l'effort imposé au cheval, dans les conditions qu'il suppose, est $35^{\mathrm{kg}},59$. La grande supériorité de la voiture sur le traîneau étant démontrée par des chiffres, $35^{\mathrm{kg}},59$ contre 2652^{kg}, il ajoute : « Quant au point de vue pratique, il conviendrait encore de considérer : 1° la résistance que l'air oppose au mouvement de la voiture; 2° le frottement circulaire ou latéral qui a lieu contre les épaulements du moyeu des roues.... 3° enfin, le frottement de seconde espèce ou de roulement, qui naît du contact de ces roues avec le sol. » Mais, ajoute l'illustre auteur, « ainsi que nous en avons déjà averti, notre intention ne saurait être de nous étendre ici sur les considérations expérimentales et physiques qui se rapportent à ce genre de questions ».

Non seulement Poncelet ne s'étend sur aucune considération expérimentale ou physique, mais il n'aperçoit pas le contretemps, qu'il aurait pu vérifier en relisant ses leçons de Metz. La force qu'il néglige, se bornant à la mentionner pour mémoire, forme les neuf dixièmes environ de la résistance totale dont il veut faire ressortir la petitesse. Poncelet a, assurément, le droit de glisser sur une théorie qu'il n'entre pas dans son plan d'approfondir en ce moment, non pas celui de laisser croire qu'il a calculé l'effort du cheval à quelques grammes près, alors qu'il a négligé des centaines de kilogrammes. L'inadvertance est petite, mais la faute est grave. M. de Mauni loue également Sonnet, auteur estimable d'un dictionnaire de Mathématiques, d'avoir, à l'article *roulement*, « constaté le dissentiment radical existant sur ce sujet entre les


[redacted]

Quant au général Morin, dont le crédit dans la Science a été grand, M. de Mauni déclare « que ses théories et ses calculs ont été reconnus et démontrés faux, dans toutes leurs parties, excepté quelques détails ».

Le rapporteur académique de la longue discussion entre Morin et Dupuit, l'excellent Coriolis, dont le nom est resté fort au-dessus du commun, a conclu en faveur de Morin. « Grâce à l'autorité de ce rapport, dit M. de Mauni, la théorie de la résistance au roulement est restée un tissu de contradictions et même d'absurdités, sans que pendant un demi-siècle personne ait jugé utile d'y prendre garde. »

M. de Mauni, sans entrer au détail de ces contradictions, comme on aurait le droit de s'y attendre, veut bien déclarer qu'il ne se croit pas infaillible et inviter ses lecteurs à user envers lui de la franchise dont il donne l'exemple. J'en userai pour déclarer ses critiques trop vagues malgré leur énergie, et souvent outrées. J'ai moins que personne, cependant, le droit de les dire sans fondement; plus d'une fois, moi-même, au sujet de la théorie mécanique du roulement, j'ai éprouvé quelque mauvaise humeur.

D'excellents auteurs, et des professeurs très méritants, sans proposer, comme on les en accuse, des raisonnements contradictoires et absurdes, ont pu provoquer, par la négligence de leur langage et l'absence d'explications, l'impatience et le blâme d'un ami de la vérité trop exigeant sur la précision et la rigueur.

Le zèle sans mesure de M. de Mauni me rappelle un vieux souvenir. Lorsque j'étais élève à l'École Polytechnique, Le Verrier, chargé du cours de Mécanique, avait enseigné, sans s'écarter de la tradition, la théorie du frottement de roulement. Je n'y avais rien compris. Le langage me semblait incorrect, les conclusions vagues et obscures. Appelé quelques jours après, selon la coutume de l'École, à une interrogation, une colle, comme nous disions, sur la théorie du frottement de roulement, je me bornai à dire quels embarras, après avoir écouté la leçon de Le Verrier, m'empêchaient de trouver la théorie acceptable. Le répétiteur qui m'interrogeait, c'était Delaunay, sans rien tenter pour débrouiller cet embrouillement, m'accorda la note 20, la plus haute de l'échelle. Quelques années après, devenu professeur, il enseignait, fidèle aux traditions, la théorie du frottement de roulement, abso-

lument comme l'avaient fait ses prédécesseurs, et comme le font aujourd'hui ses successeurs.

Quelles sont donc ces contradictions et ces absurdités, apparentes ou réelles, que, même avertis, les meilleurs esprits acceptent sans y prendre garde? Elles s'expliquent par une langue mal faite, origine captieuse de sophismes, pour les philosophes, et d'équivoques obscures indignes des géomètres. Le nom de *résistance au roulement* est réservé, non à la totalité des actions par lesquelles le sol résiste au roulement d'une roue, mais à une partie seulement, souvent petite, quelquefois négligeable de ces résistances. Aucun maître ne l'ignore, on l'enseigne sans embarras, le langage est libre; mais on a le tort, le plus habituellement, de mal choisir le moment de le dire. Quand on croit, dans les meilleurs livres, étudier la résistance au roulement, la force qu'on apprend à connaître n'est qu'un minimum; d'autres subsistent dans les applications les plus simples, qu'il est impossible d'en séparer. Les auteurs classiques en tiennent compte, mais irrésolus et indécis, au moins en apparence, ils semblent en faire peu de cas. J'en dirai bientôt la raison. On peut citer de nombreux exemples.

Lorsque Poncelet, aujourd'hui leur maître à tous, veut comparer l'effort du cheval qui traine une voiture à celui qu'imposerait la traction d'un traîneau, il nomme *frottement de glissement* la résistance opposée au traîneau qui glisse, mais non pas *résistance au roulement* la résistance opposée à la voiture qui roule. Après avoir évalué cette résistance, Poncelet déclare, comme nous

[redacted]

évidence. Un peu d'agacement est permis, quand on voit des auteurs considérables, on pourrait en citer beaucoup d'autres, sans s'appuyer sur aucune explication antérieure, établir une distinction entre la *résistance* au corps qui roule et la *résistance au roulement* du corps; imposant ainsi, à qui veut raisonner de ces choses, une minutieuse attention à la position des virgules.

Il est, dit la Logique de Port-Royal, des pédants de toutes robes et de tous états. Dans leur louable vouloir de bien dire, quel nom doivent-ils donner à la force opposée au cylindre? Est-ce un frottement? Pas de glissement, le cylindre roule. De roulement? Moins encore, en le calculant on néglige la *résistance au roulement*. Existerait-il un frottement de troisième espèce? Les maîtres de la Science, je veux dire les professeurs de Mécanique, devraient nous en instruire. Cette équivoque embarrasse les esprits délicats, les choque, les irrite même, comme autrefois la grâce suffisante qui ne suffisait pas.

Les auteurs les plus autorisés adoptent les conclusions et les explications de Coulomb. L'action exercée par le sol supposé horizontal est une force verticale égale et contraire au poids de la voiture et appliquée en avant du point de contact.

La *résistance au roulement* étant une force verticale ou, pour parler plus correctement, se réduisant au déplacement du point d'application de cette force, on peut se demander s'il existe une action horizontale. Les géomètres ignorent les réticences. L'étudiant doit croire que, si une telle force agissait, quelquefois ou toujours, sur une roue qui roule, on s'empresserait de le lui dire. Les auteurs ne cachent pas la réponse, mais réservent la question pour un autre chapitre. On l'y abordera correctement, jamais nettement; sans tromper le lecteur, mais sans l'éclairer.

Il faudra se garder, quand cette force interviendra, de l'appeler *résistance au roulement*. Nous avons vu Poncelet et Delaunay l'introduire et la calculer, en plaçant à l'arrière-plan, comme une influence distincte et négligeable, la *résistance au roulement*. Le général Morin prend avec la langue des géomètres des libertés presque divertissantes. Dans les nombreux Tableaux, officiellement approuvés, sur le tirage des voitures, et qu'on a pu appeler réglementaires, on lit, en tête d'une colonne : Résistance au roulement. Cette résistance, évaluée en kilogrammes, est horizon-

tale.... Faut-il donc renoncer à regarder l'action du sol comme verticale? Morin se serait étonné, je n'en doute pas, qu'un lecteur se rencontrât, assez ignorant ou assez peu perspicace, pour lui imputer une telle contradiction. Ne s'est-il pas suffisamment expliqué dans les quelques lignes qui précèdent ses tableaux, en écrivant : « Nous nommerons R la résistance opposée par le sol au roulement, et rapportée à la circonférence de la roue. »

Ce jargon intolérable chez un professeur de Mécanique avait, longtemps avant M. de Mauni, choqué les lecteurs attentifs. Plus d'un s'était demandé comment une résistance peut-elle être *rapportée* à la circonférence d'une roue?

Le général Morin croyait le savoir. La question l'aurait surpris. La force verticale dont la *résistance au roulement* déplace le point d'application forme un couple avec le poids du corps. On peut, Poinsot l'a démontré, faire tourner ce couple à sa guise : l'effet produit ne dépend que de son moment. Quand on déclare la force verticale rapportée à la circonférence de la roue, il faut être bien puriste pour affecter de ne pas comprendre que, maître de la placer comme on veut, on a voulu la faire tangente au point le plus bas de la roue, en donnant à l'autre, pour point d'application, le centre de la roue. Tout cela n'a pas besoin d'être dit. Cette force horizontale, qu'on oppose à la traction du cheval, est-elle réelle ou fictive? La demande n'est pas indiscrète. L'esprit pratique de Morin l'aurait jugée inutile.

Quel doit être l'embarras, quelquefois l'impatience du lecteur, quand il voit un auteur, incontestablement autorisé, regarder, [redacted]

Lorsqu'une locomotive entraîne un train sur un chemin de fer, la force motrice, qui surmonte l'inertie des wagons et les résistances qui les retardent, est exercée par les rails sur les roues que la vapeur contraint à tourner. La roue de la locomotive roule comme les autres, les points de sa circonférence décrivent des cycloïdes, mais la vapeur intervient, et il n'est permis en aucune façon de l'assimiler au rouleau de Coulomb, quoiqu'elle roule comme lui. La force développée par le rail n'est pas une *résistance au roulement*. Pourquoi? Ne s'oppose-t-elle pas énergiquement à la rotation sans laquelle la roue ne roulerait pas? On ne le nie pas; mais la raison doit céder à l'usage. Les conventions sont libres.

Les rails, dont l'action entraîne la locomotive, retardent au contraire les wagons, mais la moindre partie seulement de la force retardatrice reçoit le nom de *résistance au roulement;* l'autre partie doit figurer, quand on analysera les forces, dans une autre colonne du Tableau.

Les roues tournent, en effet, autour d'un essieu, qui, pour les supporter, pénètre dans un moyeu nommé *boîte à graisse;* il exerce sur ce moyeu un frottement de glissement, qui, résultant des actions mutuelles entre deux parties du train, est sans influence *directe* sur le mouvement de son centre de gravité, mais qui, cependant, le retarde. Le frottement de l'essieu tend en effet, très directement, à ralentir la rotation de la roue. Pour que le roulement persiste et ne devienne pas un glissement, qui arrêterait le convoi, il faut que le rail développe la force nécessaire pour maintenir la rotation de la roue; il le faut, cela pourrait ne pas suffire, mais de plus il le peut, nous en dirons la raison. La résistance dont c'est là l'origine *s'ajoute* à la résistance au roulement.

Le premier point à établir dans l'étude du roulement est l'existence d'une force développée à chaque instant par le sol, variable de grandeur entre des limites fort étendues, changeant de direction lorsque cela devient nécessaire, et toujours exactement déterminée par la condition d'assurer une vitesse nulle au point par lequel la roue repose sur le sol. Le mécanicien le plus ingénieux, si cette dispensation immédiate de la force nécessaire ne s'accomplissait pas automatiquement, en trouverait la réalisation pénible.

Le charron ne s'en occupe pas. Le frottement du sol (c'est du frottement de glissement qu'il s'agit) s'oppose sans cesse au mouvement du point en contact avec lui ; si donc une vitesse vient à naître, si petite qu'elle soit, et en quelque sens qu'elle se produise, il la détruit ; le glissement n'est possible que sur un sol assez glissant pour rendre insuffisant le frottement régulateur. On pourra donc, dans la théorie du roulement, déterminer les efforts développés par le sol, par la condition que, associés aux vitesses acquises par les différents points du système, et aux forces agissant sur lui, quelle qu'en soit l'origine, ils assurent une vitesse nulle au point de contact de la roue. On peut conserver un scrupule, sinon, un doute. Comment le sol inerte, le rail si l'on veut, pressé par la même roue, qui tourne avec la même vitesse, peut-il exercer des actions absolument différentes avec une justesse toujours parfaite? Une comparaison, presque une identité, servira de réponse.

Supposons un corps solide pesant, reposant immobile sur le sol ; quelle est sur lui l'action du sol? La réponse est simple : elle est verticale, égale et contraire à la pesanteur ; il n'y a pas d'action horizontale.

Si ce même corps est tiré par une force horizontale trop faible pour l'entraîner, il ne bougera pas, mais le sol développera une force précisément égale et contraire à celle qu'elle doit détruire, et cela aura lieu jusqu'au moment où le frottement de glissement, inférieur à la force de traction, ne pourra plus la détruire. La résistance du sol sur le corps immobile peut donc, la position restant la même, varier depuis zéro jusqu'à une limite supérieure



plus ou moins et met en jeu leur élasticité, qui, pour des déplacements également invisibles, mais très différents, fait naître des résistances inégales.

La *résistance au roulement* ne joue aucun rôle dans les explications précédentes. Si l'on étudie d'après ces principes, dans les différents cas, le mouvement d'une roue, on approchera beaucoup de la vérité. Dans quelques cas cependant, dans celui qu'a choisi Coulomb, par exemple, l'erreur serait grande. Supposons un rouleau ou un cerceau roulant sur un plancher horizontal. Le sol, dans ce cas, *d'après la théorie indiquée,* n'aurait aucune résistance horizontale à exercer; il détruira le poids du rouleau, ce serait tout son rôle. Le corps solide n'étant sollicité par aucune force roulera indéfiniment, sans se ralentir ni s'arrêter jamais.

Cette théorie n'est pas acceptable; la pratique la dément. Le résultat exige une correction. En ne tenant pas compte de la déformation du sol, on a réduit le contact à une ligne mathématique; il se fait, en réalité, sur une petite surface, et la résistance verticale, pour cette raison, est appliquée un peu en avant du centre de gravité. Une correction est toujours nécessaire, mais, dans le cas actuel, elle est considérable.

La force à corriger étant nulle, l'erreur relative serait infinie. Dans d'autres cas, elle est peu importante; comme, par exemple, quand on étudie la chute libre d'un cylindre sur un plan incliné. Souvent, au contraire, la résistance au roulement forme une partie importante de la résistance opposée au corps qui roule, sans en faire la totalité.

Quel que soit le langage adopté, on doit se demander s'il est évident, s'il est démontré, si surtout il est exact qu'on puisse étudier chaque cause de résistance pour en calculer les effets, comme si elle était seule, en négligeant les influences mutuelles. S'il s'agit d'une voiture, par exemple, on évalue la résistance au roulement opposée à chacune des roues, comme s'il s'agissait du rouleau étudié par Coulomb, pour y joindre la résistance due au frottement de l'essieu, *rapportée,* comme dit Morin, à la circonférence de la roue. Cette décomposition du problème est-elle permise? On n'a jamais étudié la question. Il ne semble pas qu'un premier examen soit favorable. Lorsque plusieurs systèmes de forces agissent sur un même corps solide, les accélérations qui en

résultent pendant l'instant qui va suivre sont les résultantes de celles que produirait chaque système, s'il était seul. Les forces qu'il faut appliquer au point qui va se placer en contact avec le sol, et dont la vitesse actuelle est infiniment petite, pour que cette vitesse devienne nulle, sont les résultantes de celle qu'il faudrait appliquer dans chaque système : c'est de ce théorème qu'on déduit le principe; mais, quand on introduit la *résistance au roulement,* due à la déformation du sol, il semble évident que cette déformation, dont le rôle est si grand, sera influencée par toutes les forces qui agissent sur la roue, elle ne peut rien changer aux autres résistances dont leur détermination est un problème de Géométrie dans lequel cette détermination ne joue aucun rôle. La *résistance au roulement* étant la seule qui puisse subir un changement, si la somme varie, il faudra que ce soit par elle. Il n'est pas permis, par conséquent, de l'évaluer par un calcul distinct; les autres la changent en s'y associant, et le principe énoncé sans restriction n'est pas acceptable. Approche-t-il de la vérité dans les cas où on l'a appliqué? La question mérite examen. L'expérience serait difficile à combiner et à exécuter, plus difficile encore à remplacer par une discussion théorique.

On a traité souvent les problèmes relatifs au frottement, sans faire intervenir, sans mentionner même la force horizontale exercée sur la roue par le sol qui la porte. Cette force est grande; ceux qui la négligent ne l'ignorent pas. Pourquoi, dans les explications, lui accorder si petite importance? L'explication est facile.

La tendance des mécaniciens à tout expliquer par la théorie du [redacted]



forces vives et veulent prendre la question par ce biais, il perd tout intérêt. Cette force est grande, on n'en disconvient pas; mais, si rapide que soit l'allure de la voiture, la vitesse du point qui touche le sol est nulle. Il n'en faut pas davantage; la force qui lui est appliquée ne produit pas de travail; ne pouvant, dès lors, engendrer aucune force vive, il importe peu qu'elle soit grande ou petite; le calculateur n'a pas besoin de la connaître. Celui qui raisonne sans calculer comprend difficilement cette indifférence.

Les mécaniciens, pour étudier le mouvement d'une voiture, peuvent invoquer deux principes et, par deux voies, en apparence contraires, atteindre le même but avec une égale certitude. Le premier, que l'on pourrait nommer l'élève de l'ancienne école, disciple de Poinsot, par exemple, prendra pour guide le principe du mouvement du centre de gravité. Le mouvement de ce point est le même que si, toutes les masses y étant concentrées, on y appliquait, en les transportant, avec leur intensité et leur direction conservées, toutes les forces *extérieures* qui agissent sur le système. Ces forces sont la résistance du sol, la traction du cheval et la pesanteur. On peut, sur un terrain horizontal, supprimer la troisième, en même temps que la partie verticale de l'action du sol, *quel qu'en soit le point d'application*. Deux forces seulement devront donc intervenir : l'action horizontale du sol et la traction du cheval.

Si l'on demande au mécanicien qui procède ainsi : « Quel rôle réservez-vous au frottement de l'essieu? » Il répondrait certainement, avec grande raison : « Ce frottement ne figure pas dans mes calculs! » Grand scandale assurément, car on n'ignore pas qu'une roue dont l'essieu est bien graissé roule mieux et fatigue moins le cheval; il n'est pas admissible que ce frottement, qu'il importe tant de diminuer, ne joue aucun rôle. Cela n'est pas admissible, en effet, parce que cela est faux.

Cette force, sans paraître directement dans les calculs, accroît la résistance du sol; elle joue, sous ce rapport, un rôle comparable à celui du poids d'un traîneau, qui, sans opposer aucune résistance au mouvement horizontal, accroît, en même temps que la pression, le frottement qui le retarde.

En résumé, l'action du sol influe seule sur le mouvement. Le frottement de l'essieu est sans influence sur la vitesse du centre de gravité, mais il change l'action du sol.

Supposons le second mécanicien, élève de Poncelet. Pour étudier le mouvement de la même voiture, il lui suffira de calculer le travail. L'essieu glisse sur le moyeu de la roue, c'est une source de travail dépensé, le point de la roue qui touche au sol a une vitesse nulle. Pas de travail à attendre, par conséquent, des actions exercées sur lui, il est inutile d'en parler. Si le point d'application de la résistance verticale se déplace, par suite de la déformation du sol, cette résistance produira un travail, dont il faut tenir compte, c'est *la résistance au roulement;* enfin, bien entendu, il faut évaluer le travail du cheval.

En résumé : Pour celui qui veut suivre la première méthode, aucun besoin de connaître le frottement de l'essieu et la position de la réaction verticale; il pourra dire, sauf à s'expliquer ensuite, que ces deux forces n'influent pas sur la vitesse. La résistance horizontale importe seule. L'élève de Poncelet, au contraire, n'a pas besoin de connaître la résistance horizontale, il pourra dire, sauf à s'expliquer ensuite, que cette force n'influe pas sur la vitesse. Le frottement de l'essieu et le point d'application de la réaction verticale importent seuls. La vérité, qui domine tout, s'accommode des deux solutions. Quand on va jusqu'au bout, les résultats sont identiques. On comprend cependant que la diversité des langages ait fait naître des accusations d'incohérence et de contradiction.

Alors même qu'aucune erreur n'est commise dans la solution d'un problème de Mécanique, la claire vue du phénomène et l'analyse des causes qui le produisent, c'est, pour les esprits



de rotation sur lui-même. Le travail développé par la pesanteur pendant que le centre de gravité du cylindre descend d'une certaine hauteur doit produire, non seulement l'accroissement de force vive de la masse entière du corps supposé concentré en son centre de gravité, mais encore l'accroissement de force vive de ce corps dans son mouvement autour du centre de gravité.

Ces lignes sont irréprochables; les assertions sont exactes, mais, après avoir lu, le lecteur ignore quelle force produit le retard. Cette force ne produisant pas de travail n'a pas droit à la moindre mention. Le plan sur lequel roule le cylindre ne produit aucun travail!

Je crois pouvoir affirmer que peu de lecteurs peuvent comprendre cette assertion qui, cependant, est exacte.

A ceux qui sur ce point se feraient illusion, je demanderai s'ils consentiraient à dire : *La résistance du plan ne travaille pas.* Si la première assertion est fort éloignée de l'évidence, c'est parce que le langage familier à tous repousse la seconde. La résistance du sol détermine et accélère la rotation du cylindre, elle seule retarde le mouvement du centre de gravité; non seulement elle intervient, mais elle produit les deux parties du phénomène : n'est-ce pas travailler cela? Le verbe travailler, dans le dictionnaire de Littré, reçoit vingt-six significations différentes, pas une seule n'autorise à répondre non; mais, parmi les sens assignés au mot travail, il en est un, que d'ailleurs le dictionnaire de l'Académie ne mentionne pas, d'après lequel cette force, qui *travaille utilement* à la marche de la voiture, produit un *travail utile* dont la mesure est zéro. Elle travaille sans rien produire. Le cas n'est pas rare. En adoptant ce langage, accepté par tous les mécaniciens, on pourrait et l'on devrait dire qu'un artiste, en promenant sur une feuille de papier blanc la pointe finement taillée de son crayon, lors même qu'il a fait un chef-d'œuvre, n'a produit aucun *travail.*

Dans la longue discussion entre Dupuit et Morin, j'inclinerais, comme M. de Mauni, à donner raison à Dupuit, en exceptant les cas où ils se trompent tous deux, sans pour cela s'accorder. La thèse de Dupuit, dans les limites des expériences et des conditions habituelles, semble s'écarter moins de la vérité. Tous deux ont étudié l'influence du diamètre des roues, celles des charges et de la largeur des jantes, le meilleur emploi des ressorts, la dété-

rioration et l'entretien des routes et les questions relatives à la police du roulage. Ces questions, si intéressantes qu'elles soient, appartiennent à un autre ordre de travaux.

Je n'aborderai pas davantage l'étude des bicyclettes et des bandages pneumatiques, qui, pour M. de Mauni, donnent à la question une importance toute nouvelle. C'est aux constructeurs de cycles locomoteurs qu'il s'adresse, ainsi qu'à ceux qui font usage de ces véhicules. La théorie du roulement n'est pour lui qu'une préparation nécessaire aux applications qui l'intéressent. L'attention due à ces nouveaux moyens de locomotion impose selon lui la nécessité « de faire jaillir la lumière au milieu des antiques ténèbres ». L'étude des roues de charrette ou de diligence lui paraît de moindre conséquence et moins digne de curiosité.

Sans revenir sur la partie critique des observations de M. de Mauni, je ne puis terminer sans y signaler une accusation regrettable adressée, un peu légèrement, à la mémoire de Dupuit :

> Comme pour augmenter la confusion, dit-il, M. Dupuit, en réfutant ce qu'il croit être la théorie de Coulomb, altère pour les besoins de la cause le texte du Traité des machines simples.

L'accusation est grave. Comme s'il devinait que ceux qui ont connu Dupuit la déclareraient invraisemblable, M. de Mauni reproduit la phrase copiée dans le Mémoire, en la rapprochant du texte de Coulomb. Coulomb a écrit : « A chaque expérience, on commence *par* ébranler le rouleau. » On lit dans Dupuit, qui analyse sans citer textuellement : « Coulomb a soin de prévenir

[redacted]

F. TISSERAND. — LEÇONS SUR LA DÉTERMINATION DES ORBITES, PROFESSÉES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS. Rédigées et développées pour les calculs numériques, par *J. Perchot*, avec une préface de *H. Poincaré*.

Nous devons être reconnaissants à M. Perchot qui nous a conservé les Leçons de Tisserand sur la détermination des Orbites. Les nombreux lecteurs du *Traité de Mécanique céleste* de Tisserand, qui connaissaient la clarté de son exposition et qui appréciaient la simplicité et l'élégance de sa méthode, croyaient sa voix éteinte à jamais. Grâce à M. Perchot, ils auront la joie de l'entendre de nouveau.

Les idées que Tisserand exposait dans les Leçons qu'il professait à la Sorbonne se retrouvent presque toutes dans le grand Traité précédemment publié et qui est maintenant entre les mains de tous les astronomes. Elles n'y sont pas toutes cependant; bien des questions qu'il a traitées dans son Cours ont été laissées de côté dans son Ouvrage. Il faut espérer que M. Perchot et ses autres élèves feront revivre la partie inédite de son Œuvre et sauveront de sa pensée tout ce qu'une mort prématurée permet d'en sauver.

La détermination des orbites des planètes et des comètes, ce problème si important pour l'astronome, n'avait pas été étudiée dans le *Traité de Mécanique céleste* : c'est là le sujet des Leçons recueillies par M. Perchot; le seul Ouvrage écrit en français sur cette question est la traduction du *Traité d'Oppolzer*. Cet utile Volume est consulté tous les jours par les calculateurs; mais il faut reconnaître que la lecture en est difficile et rébarbative.

Les débutants ne seront pas seuls à s'applaudir d'avoir à leur disposition un Traité où ils retrouveront la limpidité française. Grâce à ce Guide, les étudiants avanceront sans fatigue; j'ajoute que ce Guide peut les mener jusqu'au bout, car M. Perchot a fait suivre les Leçons de Tisserand d'un résumé général des formules mises sous leur forme définitive, c'est-à-dire sous une forme propre au calcul et même d'un modèle de calcul où aucun détail n'est omis.

Pour déterminer les six éléments d'une orbite on dispose de trois observations; chacune de ces observations nous fournissant

deux données, nous avons six équations pour calculer nos six inconnues.

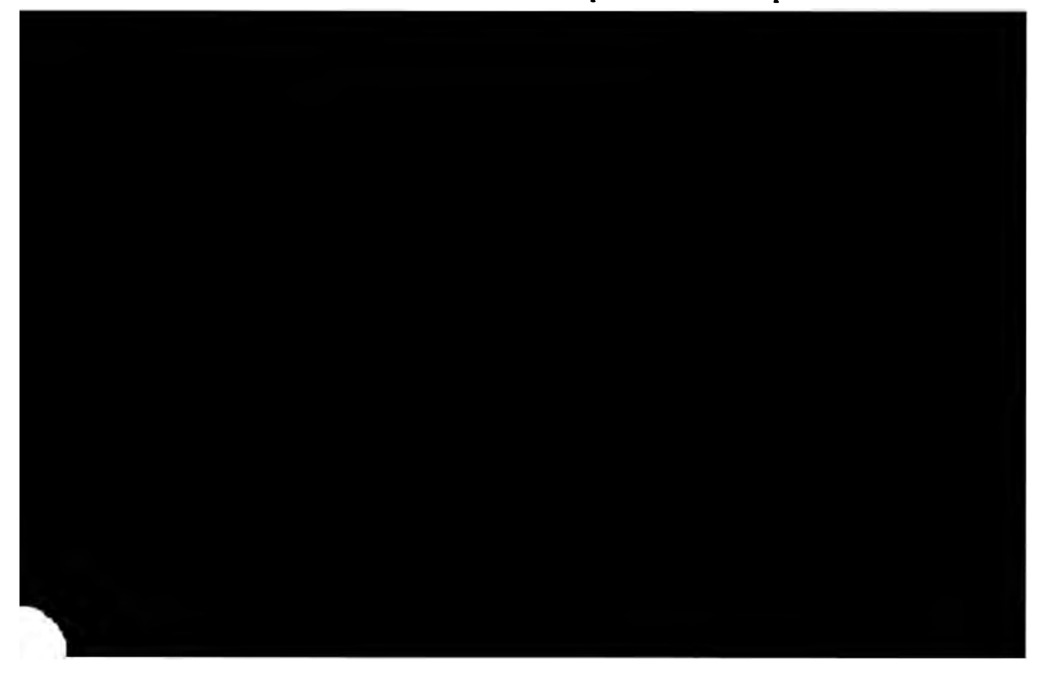
Géométriquement, il s'agit de déterminer l'orbite d'une planète, sachant que cette planète se trouvait à trois instants donnés sur trois droites données dans l'espace.

Dans le cas où l'orbite de la planète serait dans le plan de l'écliptique, on n'aurait plus que quatre éléments au lieu de six. Mais, d'autre part, chaque observation ne fournirait qu'une seule donnée, la longitude. Il faudrait donc quatre observations pour déterminer l'orbite ; ce qui veut dire pratiquement que, si l'inclinaison est faible, il sera plus exact d'employer une quatrième observation de longitude que de se servir des trois observations de latitude. N'insistons pas sur ce point et revenons au cas général.

Comme le nombre des équations est le même que celui des inconnues le problème est théoriquement possible, mais les ressources actuelles de l'Analyse ne permettent pas de le résoudre en toute rigueur et dans toute sa généralité.

Il y a cependant un cas où une solution complète serait possible, c'est celui des orbites paraboliques. Pour la plupart des comètes, on peut admettre, en première approximation, que leur trajectoire est une parabole ; mais une orbite parabolique ne dépend plus que de cinq éléments au lieu de six et, comme nous avons toujours nos six équations, nous avons une équation surabondante. De plus, dans ce cas, nos six équations peuvent être mises sous la forme algébrique.

Cette double circonstance suffit pour rendre le problème réso-


[redacted]

observations, ainsi que des cosinus et des sinus des trois ascensions droites et des trois déclinaisons observées.

Nul doute d'ailleurs qu'un algébriste habile ne puisse arriver à ce résultat beaucoup plus rapidement que par l'application brutale de la méthode que je viens d'esquisser.

Une pareille méthode éviterait l'emploi des approximations successives; elle permettrait d'utiliser non seulement trois observations distantes de peu de jours, mais trois observations quelconques.

Il n'y a aucune raison pour qu'elle soit illusoire, ou moins exacte que les méthodes ordinaires. Serait-elle plus rapide et plus commode pour les calculs numériques? C'est une question sur laquelle il convient de faire des réserves jusqu'à ce que l'on ait entièrement développé les formules auxquelles elle conduirait.

On pourrait aussi supposer que l'on dispose de trois observations : les deux premières très voisines l'une de l'autre, la troisième suffisamment éloignée des deux autres. On pourrait ainsi considérer comme connues : 1° l'ascension droite, la déclinaison et leurs dérivées du premier ordre à l'instant t; 2° l'ascension droite et la déclinaison à l'instant t''. Les cinq éléments inconnus nous seraient encore donnés par six équations algébriques. Comme on aurait encore une équation surabondante, on pourrait appliquer le même procédé qui conduirait cette fois à des calculs plus simples.

Aucune méthode de ce genre n'a jamais été employée.

Dans le cas des orbites elliptiques, une pareille solution n'est plus possible. D'une part, en effet, il n'y a plus d'équation surabondante; d'autre part, les équations sont transcendantes. Pour avoir des équations surabondantes, il faudrait plus de trois observations; mais, pour pouvoir arriver à une solution analogue à celle dont je viens de montrer la possibilité dans le cas des orbites paraboliques, il faudrait éliminer les transcendantes, et pour cela il faudrait six observations (à moins que, se contentant d'une approximation, on remplace les fonctions transcendantes par des fonctions algébriques qui en diffèrent fort peu).

En ne faisant pas intervenir les époques des observations et en écrivant que l'ellipse décrite par la planète rencontre six droites données dans l'espace, on obtiendrait six équations de forme

algébrique entre les cinq éléments qui définissent la forme et la position de l'ellipse. On se trouverait donc dans les mêmes conditions que pour les orbites paraboliques. Inutile d'ajouter qu'une pareille méthode ne saurait être recommandée à aucun point de vue.

Les méthodes rigoureuses sont donc ou inapplicables, ou inappliquées, et il faut bien recourir à des procédés d'approximations successives. Pour que ces approximations soient possibles, il faut supposer que les trois observations se font à des époques très rapprochées l'une de l'autre. Les intervalles des observations sont alors regardés comme de très petites quantités et c'est par rapport aux puissance de ces intervalles que l'on développe.

Il y a là une nécessité qui nous est imposée par les difficultés analytiques du problème. Si l'on n'avait pas à tenir compte de ces difficultés, il est évident qu'on aurait d'autant plus de garantie d'exactitude que les observations employées seraient plus éloignées les unes des autres; mais, si les intervalles étaient trop grands, les méthodes d'approximations successives seraient inapplicables ou trop pénibles.

La première de ces méthodes est celle de Laplace ; aujourd'hui elle n'est plus employée et elle est tombée dans un discrédit peut-être injuste; disons-en quelques mots cependant, pour la comparer avec celle de Gauss et d'Olbers qui sont exposées dans cet Ouvrage.

Avec trois observations, ou en en faisant intervenir un plus grand nombre s'il y a lieu, on calcule par interpolation les va- [redacted]



planète, et ces coordonnées dépendent seulement, d'une part, de ρ, et, d'autre part, de α et de δ qui sont des données. Ainsi, la loi de Newton nous donne les trois composantes en fonctions de ρ. En égalant les deux valeurs de chacune de ces trois composantes, nous obtiendrons un système de trois équations que j'appellerai pour abréger *les équations* (1) *de Laplace*.

Comment tirer de ces trois équations les valeurs des inconnues? Nous commencerons par éliminer $\frac{d\rho}{dt}$ et $\frac{d^2\rho}{dt^2}$. Pour cela, projetons l'accélération sur une droite perpendiculaire à la fois au rayon vecteur qui joint la Terre à la planète à l'instant t, et au rayon vecteur infiniment voisin qui joint ces deux astres à l'instant $t+dt$. Égalons les deux expressions de cette projection, nous obtiendrons une équation que j'appellerai *l'équation* (2) *de Laplace*. Cette équation est algébrique et elle ne contient d'autre inconnue que ρ.

Quand on aura tiré ρ, les équations (1) ne contiendront plus les inconnues restantes $\frac{d\rho}{dt}$ et $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ que sous la forme linéaire. Le calcul de ces deux inconnues se ramènera donc à la résolution d'équations du premier degré.

Telle est la méthode de Laplace, dont l'avantage est de tenir compte, non seulement de trois observations, mais de toutes celles dont on dispose.

Passons à la méthode de Gauss qui est exposée dans le Chapitre II de cet Ouvrage; elle est fondée sur la considération des trois triangles formés par le Soleil et les trois positions de la planète et dont les aires sont désignées (page 12) par

$$\frac{1}{2}[r, r'], \qquad \frac{1}{2}[r', r''], \qquad \frac{1}{2}[r, r''].$$

Ces aires peuvent être développées suivant les puissances des intervalles des observations, ou des petites quantités θ, θ', θ'' que l'on définit page 13 et qui sont proportionnelles à ces intervalles.

En première approximation, ces triangles se confondront avec les secteurs correspondants; ils seront donc proportionnels à θ'', θ et $\theta' = \theta + \theta''$.

L'erreur commise est donc égale au segment compris entre un petit arc d'ellipse et sa corde; elle est donc du troisième ordre.

On verrait aisément que ce segment est sensiblement au secteur correspondant comme l'accélération (qui est toujours dirigée vers le Soleil), multipliée par le carré de l'intervalle correspondant, est à six fois le rayon vecteur. Après cette correction, l'erreur n'est plus que du quatrième ordre. C'est ainsi que s'expliquent les termes en $\frac{\theta^2}{6 r'^3}$ dans les formules qui sont à la fin de la page 14. On aurait pu d'ailleurs, avec la même approximation, remplacer dans la première de ces formules par exemple r' par r'', c'est-à-dire qu'on aurait pu introduire, au lieu du rayon vecteur au commencement de l'intervalle, le rayon vecteur final ou un rayon vecteur intermédiaire quelconque. C'est ainsi que le rayon vecteur r', qui figure au dénominateur du second terme dans nos trois formules, est le rayon initial pour la première formule, un rayon intermédiaire pour la seconde, le rayon final pour la troisième.

L'examen de la seconde formule montre que si les observations sont équidistantes le terme en $\frac{dr'}{dt}$ disparaît. Cela signifie que si dans le calcul du terme correctif on introduit, au lieu du rayon initial ou final, celui qui correspond au milieu de l'intervalle, l'erreur commise n'est plus que du cinquième ordre. Cela revient, dans la première formule, par exemple, à changer r' en $r' + \frac{\theta}{2} \frac{dr'}{K dt}$. Ainsi s'explique l'introduction du second terme correctif en $\frac{dr'}{dt}$.

Telle est la signification géométrique des formules de la page 14. L'examen de ces formules nous apprend encore un autre fait,

[redacted]

arrêtant aux termes du second ordre,

$$\rho = \rho' - \frac{d\rho'}{K\,dt}\theta + \frac{d^2\rho'}{K^2 dt^2}\frac{\theta^2}{2},$$

$$\rho'' = \rho' + \frac{d\rho'}{K\,dt}\theta'' + \frac{d^2\rho'}{K^2 dt^2}\frac{\theta''^2}{2}.$$

Développons de même α', β', α'', β'' et leurs lignes trigonométriques, en nous arrêtant toujours au second ordre. Remplaçons $[r, r'']$, etc. par leurs développements de la page 14 en conservant les deux premiers termes.

Substituons dans les équations (1) : les termes du premier et du second ordre disparaîtront d'eux-mêmes; nous négligerons ceux qui sont du quatrième ordre ou d'ordre supérieur. Quant aux termes du troisième ordre, ils contiendront en facteur le produit $\theta\theta'\theta''$; si l'on supprime ce facteur, on retombera aux notations près sur les équations de Laplace.

Nos équations (1), analogues à celles de Laplace, se traiteront de la même manière; on les combinera de façon à éliminer ρ et ρ''. Quel est le sens géométrique de cette opération? La première des équations (1) est la traduction de l'équation de la page 17 :

$$[r', r'']\,x - [r, r'']\,x' + [r, r']\,x'' = 0.$$

La même équation a lieu évidemment entre les coordonnées y ou z, ou encore entre les projections des rayons vecteurs r, r', r'' sur une droite quelconque. Choisissons cette droite.

Soient

S le Soleil;
P, P', P'' les trois positions de la planète;
T, T', T'' celles de la Terre;
D une droite perpendiculaire à la fois à P'T et à P''T''.

Si nous projetons sur D, les deux distances ρ et ρ'' se trouveront éliminées, et nous tomberons sur l'équation (2) de la page 46 dont le sens géométrique se trouve ainsi défini.

On voit ainsi que K, A, B, C sont entre eux comme le cosinus de l'angle de P'T avec D, et les projections sur D des trois rayons vecteurs SP, SP'' et SP'.

Cette équation (2) correspond à l'équation (2) de Laplace. En

première approximation, il y a identité entre les deux équations. Toutes deux sont linéaires en ρ' et $\frac{1}{r'^3}$ [*voir* les équations (24), page 51, et (26), page 53]; les coefficients sont à peu près les mêmes; la différence provient de ce que la droite D est perpendiculaire aux deux vecteurs PT et P″T″ qui sont très voisins, mais non infiniment voisins. Dans la méthode de Laplace, au contraire, on projette sur la perpendiculaire commune à deux vecteurs infiniment voisins.

Mais, et c'est là l'avantage de la méthode de Gauss, la même équation peut servir dans les approximations suivantes. Dans l'équation (26), les coefficients K, A, B, C, d'après leur définition même, restent les mêmes à toutes les approximations; il n'y a à changer que le coefficient Q, et le changement est d'ailleurs très faible, de sorte que, connaissant la solution de l'équation approchée, on en déduit, par un calcul rapide, celle de l'équation exacte.

Ayant calculé ρ', on obtiendra ρ et ρ'' par des équations linéaires; de même que, dans la méthode de Laplace, le calcul de $\frac{d\rho}{dt}$ et $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, après la détermination de ρ, se ramène à la résolution de deux équations du premier degré.

Ainsi, et c'est là le point que je voulais faire comprendre, la méthode de Gauss en première approximation ne diffère que par la forme de celle de Laplace; l'avantage qu'elle présente c'est qu'il suffit d'un petit changement dans les équations pour passer aux approximations suivantes.

[redacted]

et l'on aurait de premières valeurs approchées de $\frac{d\alpha'}{dt}$, $\frac{d^2\alpha'}{dt^2}$ dont on se servirait pour le calcul. Dans l'expression de $\frac{d^2\alpha'}{dt^2}$, on remplacerait ensuite α', β', ρ', $\frac{d\alpha'}{dt}$, $\frac{d\beta'}{dt}$, $\frac{d\rho'}{dt}$ par leurs valeurs déduites de cette première approximation, et l'on aurait de nouvelles valeurs approchées de $\frac{d\alpha'}{ds}$, $\frac{d^2\alpha'}{dt^2}$ et ainsi de suite.

C'est au reste ce qu'a exposé Laplace au Livre II, n° 32, de sa *Mécanique céleste*. On peut donc se demander si, même à ce point de vue, les deux méthodes ne sont pas équivalentes.

Dans le Chapitre Ier, Tisserand étudie la méthode d'Olbers pour la détermination des orbites paraboliques. Les calculs, d'après cette méthode, se divisent en deux parties.

Dans la première Partie, on ne se sert pas de l'hypothèse que l'orbite est une parabole, et l'on combine les six équations données par les trois observations de façon à en tirer une équation unique.

Dans la seconde Partie, on introduit l'hypothèse de l'orbite parabolique; on n'a donc plus que cinq inconnues, et, si l'on ne veut pas d'équation surabondante, il faut seulement cinq équations. On prendra les quatre équations données par les observations extrêmes et l'on y joindra l'équation finale obtenue dans la première Partie.

Il est clair que, dans la première Partie, on pourrait combiner d'une infinité de manières les six équations dont on dispose et en tirer une infinité d'équations différentes, et l'on ne voit pas bien du premier coup d'œil pour quelle raison on choisira l'une plutôt que l'autre.

Quoi qu'il en soit, voici ce que fait Olbers. Reprenons les équations (1) des pages 17 et 45. Elles expriment, nous l'avons dit, que les projections sur une droite quelconque des trois vecteurs SP, SP', SP'', multipliées respectivement par $[r', r'']$, $-[r, r'']$, $[r, r']$, ont pour somme zéro. Projetons sur une droite perpendiculaire au plan SP'T' les projections des trois vecteurs SP', ST', P'T' seront nulles et ces trois vecteurs se trouveront éliminés.

Les projections de SP'' et de SP sont entre elles comme les triangles SP''P', SPP'. Or le rapport de ces triangles est égal au

rapport des vecteurs, c'est-à-dire à $\frac{\theta''}{\theta}$ au second ordre près; il est encore égal à $\frac{\theta''}{\theta}$ au troisième ordre près, si les observations sont équidistantes.

Pour la même raison, le rapport des triangles ST″T′, STT′, c'est-à-dire le rapport des projections de ST″ et de ST, sera encore égal à $\frac{\theta''}{\theta}$.

Or, si l'on a

$$\frac{\text{proj.ST}''}{\text{proj.ST}} = \frac{\text{proj.SP}''}{\text{proj.SP}} = \frac{\theta''}{\theta},$$

on aura également

$$\frac{\text{proj.P}''\text{T}''}{\text{proj.PT}} = \frac{\text{proj.ST}'' - \text{proj.SP}''}{\text{proj.ST} - \text{proj.SP}} = \frac{\theta''}{\theta}.$$

Connaissant le rapport des projections de P″T″ et PT, il est aisé d'en déduire le rapport de ces deux vecteurs eux-mêmes et, par conséquent, le rapport de ρ'' à ρ.

Tel est le sens géométrique de l'analyse du n° 7, pages 16 et suivantes.

Il est aisé maintenant de comprendre la raison du choix fait par Olbers. L'équation à laquelle il parvient est d'une forme remarquablement simple, et elle conserve cette simplicité en deuxième approximation dans le cas où les observations sont équidistantes.

Passons à la seconde Partie du calcul. Nous avons à résoudre quatre équations à quatre inconnues. Ces équations sont algé- [redacted]

L'avantage de la méthode d'Olbers, c'est que la seule des équations qui pourrait engendrer des difficultés de calcul ne contient d'autre lettre que μ et η.

Elle a donc pu être réduite en Tables à simple entrée qui donnent immédiatement la valeur d'une de ces deux inconnues en fonction de l'autre. H. Poincaré.

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche publicato per cura di Gino Loria. Anno I, 1898. 1 Vol. in-8°, 164 p. Turin, C. Clausen; 1898.

Il est grand temps de souhaiter la bienvenue à cette nouvelle publication, qui a maintenant plus d'une année d'existence; mais le nom de M. Gino Loria, qui la dirige, rendait superflue l'expression de ces souhaits, qui sont aujourd'hui réalisés.

Le *Bollettino* contient surtout des articles bibliographiques (*Recensioni ed annunzi*) sur les livres récents : on trouvera dans le présent Volume des analyses de livres de MM. Maggi, Enriques, Schell, Russel, Simon, Januscke, Webber, Sturm, Laguerre, Nernst et Schœnflies, Laisant, Vailati, Brocart, Picard et Simart, Ricci, Ferraris, Berteu, Darboux, Loria, Lévy, de Pasquale, Schiapparelli, Lazzeri et Bassoni, Weber, Steiner, Klein.

Ces analyses sont intéressantes et se lisent facilement; je me permets de remarquer en passant que ce mérite n'est nullement banal; elles sont en général assez courtes, mais elles caractérisent nettement les livres auxquels elles se rapportent. La plupart sont dues à M. Gino Loria; d'autres sont signées de MM. G. Vivanti, C. Segre, P. Pizzetti, E. Daniele, B. Levi.

Des articles nécrologiques sont consacrés à E. Schering, Brioschi, Schapira, P. Serret. Les deux premiers sont suivis d'une liste des travaux.

La publication des programmes détaillés de certains cours universitaires (¹) me paraît une très heureuse idée : cette publica-

---

(¹) Pavie, *Physique mathématique* (1895-1896) : Prof. Samagliana, Bologne, *Analyse supérieure* (1894-1895-1896-1897) : Prof. Pincherle. Turin, *Histoire de la Mecanique* (1897-1898) : Dr Vailati. Pise, *Géométrie supérieure* (1897-1898) : Prof. Bertini.

tion n'est pas une *annonce,* puisqu'elle se rapporte, au moins en partie, à des cours déjà faits : elle n'en constitue pas moins un renseignement très précieux.

De courtes Notes sur des sujets intéressants et variés terminent chaque numéro. Qu'il me soit permis de remercier ici M. Gino Loria (¹) pour ce qu'il a bien voulu dire de l'École Normale et de son Centenaire.

Signalons enfin deux articles d'un autre caractère : l'un de M. Gino Loria, sur l'histoire de la strophoïde qui, outre le nom qui semble devoir survivre et qui lui a été donné par Montucci (*Nouvelles Annales*, t. V, 1846), a été désignée sous les noms de *ptéroïde*, d'*ala*, de *focale, focale régulière, focale à nœud,* de *kukumaéide*, de *courbe logocyclique* et de *courbe harmonique*. L'autre, assez étendu, est dû à M. Vassilief. Il est écrit en français et est consacré à Tchebychef : l'œuvre scientifique de l'illustre géomètre y est analysée de la façon la plus intéressante. Il se termine par la liste des travaux de Tchebychef. JULES TANNERY.

MÉLANGES.

TROIS FORMULES TRÈS GÉNÉRALES RELATIVES AUX COURBES DANS L'ESPACE;

PAR M. N.-J. HATZIDAKIS.

[redacted]

de l'autre et par la *position mutuelle* des deux courbes. Le procédé le plus simple est peut-être le suivant. Soit u la variable indépendante dont dépend le point sur chacune des deux courbes. Par les points correspondants M, M_1, de c et de c_1, menons deux droites parallèles à la perpendiculaire commune aux deux tangentes en M et M_1 et considérons-les comme les axes des z et des z_1 de deux trièdres dont les axes des x, y et des x_1, y_1 soient aussi parallèles respectivement; supposons de plus, pour simplifier les formules, que l'axe des x coïncide avec la tangente à la courbe c. Si l'on remarque maintenant que ces deux trièdres peuvent être considérés comme appartenant à deux surfaces, d'ailleurs quelconques, mais passant respectivement par les courbes données et ayant, le long de ces courbes, des normales parallèles (les axes des z et des z_1), on conçoit qu'on peut appliquer à chacune des courbes les formules de M. Darboux, relatives aux courbes tracées sur une surface (*Surfaces*, t. II, pp. 354 et 357); en effet, ces formules ne sont que le résultat de la comparaison du mouvement d'un certain point (du point 1 sur la parallèle menée d'un point fixe à la tangente ou à la binormale) par rapport à deux trièdres : le trièdre *principal* de la courbe (tangente, normale principale, binormale) et le trièdre xyz de la surface, lequel est d'ailleurs quelconque avec la seule condition que l'axe des z soit perpendiculaire à la tangente de la courbe.

Appliquons donc les formules (17), (18) et (22) à chacune des deux courbes successivement; nous aurons évidemment, pour la courbe c,

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{ds}{\rho}\cos\varpi = \dfrac{ds}{\rho_n} = -q\,du, \\[2ex] \dfrac{ds}{\rho}\sin\varpi = \dfrac{ds}{\rho_g} = r\,du, \\[2ex] \dfrac{ds}{\tau} - d\varpi = \dfrac{ds}{\tau_g} = -p\,du; \end{cases}$$

car la courbe c a été choisie comme une des courbes $v=$ const. sur la surface (*voir* aussi p. 392, même Ouvrage et Volume): ϖ signifie l'angle de l'axe des z avec la normale principale de la courbe. Pour la courbe c_1 on aura de même, ϖ_1 étant l'angle de

l'axe des z_1 avec la normale principale de c_1,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{ds_1}{\rho_1}\cos\varpi_1 = \frac{ds_1}{\rho_{1n}} = \sin\omega\, p\, du - \cos\omega\, q\, du,\\ &\frac{ds_1}{\rho_1}\sin\varpi_1 = \frac{ds_1}{\rho_{1g}} = d\omega + r\, du,\\ &\frac{ds_1}{\tau_1} - d\varpi_1 = \frac{ds_1}{\tau_{1g}} = -\cos\omega\, p\, du - \sin\omega\, q\, du, \end{aligned}\right.$$

où ω signifie l'angle de la tangente de c_1 avec l'axe des x_1 (ou des x); les rotations du trièdre $x_1 y_1 z_1$ sont évidemment les mêmes que celles du trièdre xyz. En substituant maintenant les valeurs de $p\,du$, $q\,du$, $r\,du$, tirées de (1), dans (2), on a les formules définitives

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{ds_1}{\rho_{1n}} = \frac{ds}{\rho_n}\cos\omega - \frac{ds}{\tau_g}\sin\omega,\\ &\frac{ds_1}{\rho_{1g}} = \frac{ds}{\rho_g} + d\omega,\\ &\frac{ds_1}{\tau_{1g}} = \frac{ds}{\rho_n}\sin\omega + \frac{ds}{\tau_g}\cos\omega, \end{aligned}\right.$$

qui sont évidemment les relations cherchées; on en trouve, en effet, $\frac{ds_1}{\rho_1}$, $\frac{ds_1}{\tau_1}$ par les formules

$$\frac{ds_1}{\rho_1} = \pm\sqrt{\left(\frac{ds_1}{\rho_{1n}}\right)^2 + \left(\frac{ds_1}{\rho_{1g}}\right)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{ds_1}{\tau_1} = \frac{ds_1}{\tau_{1g}} + d\varpi_1;$$

mais on exprime aussi $\tang\varpi_1$ par les éléments de c et les angles ϖ et ω; ω et ϖ seuls sont donc les deux éléments de la position mu-

[redacted]

sont vraies pour deux courbes *quelconques*. En effet, de ces formules on déduit, comme des cas particuliers, une foule de relations connues, mais trouvées par des voies très variées et quelquefois assez longues ([1]). On en déduit, par exemple, par les spécifications convenables, les formules relatives à une courbe et le lieu des centres de ses sphères osculatrices, ou à une courbe et l'arête de rebroussement de sa surface *rectifiante* ou *cyclifiante* ([2]), ou à une courbe et ses développoïdes (ou ses développées), ou à une courbe et le lieu des sommets des cônes osculateurs, etc. En même temps on s'explique pourquoi *trois* formules, *à peu près* les mêmes, se présentent dans tous ces problèmes différents ([3]). On en déduit aussi les relations d'une courbe et de son image sphérique, d'une courbe et de l'arête de rebroussement de la développable circonscrite, le long de la courbe, à une surface quelconque passant par la courbe ([4]); on en conclut aussi que deux courbes ayant normales principales parallèles ont l'angle ω des deux tangentes constant ([5]), que deux courbes ayant tangentes ou binormales parallèles ont nécessairement parallèles et les deux autres directions principales, etc. ([6]).

([1]) *Voir* par exemple avec quel long calcul sont trouvées les formules (1), (2) et (3) de la page 261 dans : KNOBLAUCH, *Flächen;* et elles ne sont cependant qu'un cas particulier des (2).

([2]) MOLINS, *De la surface développable etc.* (*Journal de Mathématiques p. et appl.*, 2e série, t. I, p. 265).

([3]) *Voir* par exemple SCHELL, *Curven doppelter Krümmung*, 2e éd., 1898, pp. 66, 77, 145, 160, 57, 69, respectivement.

([4]) M. SCHÖNFLIES, *loc. cit.*, p. 74.

([5]) En effet, les axes des z et des z_1 seront ici les normales principales parallèles (c'est-à-dire que les courbes seront alors des géodésiques des deux surfaces citées plus haut); alors $\frac{ds}{\rho_g} = 0$, $\frac{ds_1}{\rho_{1g}} = 0$ et l'on a bien de la deuxième des formules (2)

$$d\omega = 0, \qquad \omega = \text{const.}$$

Voir aussi BIANCHI, *Geometria differenziale*, p. 32.

([6]) 1° Si les tangentes sont parallèles, on aura $\omega = 0$, c'est-à-dire (2) :

$$\frac{ds_1}{\rho_{1n}} = \frac{ds}{\rho_n}, \qquad \frac{ds_1}{\rho_{1g}} = \frac{ds}{\rho_g}, \qquad \frac{ds_1}{\tau_{1g}} = \frac{ds}{\tau_g};$$

mais, comme les axes des z et des z_1 sont maintenant arbitraires dans les plans perpendiculaires à x et x', on peut prendre pour z la normale principale de c,

3. Au lieu de considérer les éléments de deux courbes par rapport *à leur image sphérique commune*, comme dans le cas précédent, on peut chercher les relations entre les éléments pris par rapport à deux axes perpendiculaires entre eux, c'est-à-dire par rapport à deux images sphériques perpendiculaires entre elles. Prenant d'ailleurs, aussi dans ce cas, les deux trièdres parallèles, on aura les deux cas : $xyz' \| x'_1 y_1 z_1$ ou $xyz' \| x_1 y'_1 z_1$, ou réciproquement, où l'accent signifie l'axe par rapport auquel on prend les éléments différentiels. Alors il faut permuter, dans les formules (α), circulairement $+\frac{ds}{\tau_g}$, $+\frac{ds}{\rho_n}$, $-\frac{ds}{\rho_g}$, dans le premier cas, et $+\frac{ds}{\tau_g}$, $-\frac{ds}{\rho_g}$, $+\frac{ds}{\rho_n}$, dans le second, et laisser invariables les éléments de c_1, ou réciproquement (¹). Le premier cas, par exemple, se présente dans

---

par exemple, ce qui donne

$$\frac{ds_1}{\rho_{1n}} = \frac{ds}{\rho}, \qquad \frac{ds_1}{\rho_{1g}} = o;$$

c'est-à-dire que les normales principales sont parallèles et par suite aussi les binormales.

2° Si les deux binormales sont parallèles, on doit prendre ces deux droites pour axes des z et des z_1 (elles sont évidemment perpendiculaires aux deux tangentes); alors les courbes c et c_1 sont des lignes asymptotiques des deux surfaces citées plus haut, et l'on aura

$$\frac{ds_1}{\rho_{1n}} = o = \frac{ds}{\rho_n}\cos\omega - \frac{ds}{\tau_g}\sin\omega = -\frac{ds}{\tau}\sin\omega,$$

d'où l'on déduit ou $\frac{ds}{\tau} = o$ ou $\sin\omega = o$; la première hypothèse donne les

[redacted]

la considération d'une courbe et du lieu de ses centres de courbure $\Big[$ici l'on permutera, dans les formules (α), $+\frac{ds}{\tau_g}$, $+\frac{ds}{\rho_n} = 0$, $-\frac{ds}{\rho_g}$; et on trouve ainsi les formules des pages 89 et 90 dans SCHELL, *Curven* $\left(\omega = \frac{\pi}{2} - \mu\right)\Big]$; on a de même le premier cas, quand on considère une ligne de courbure c d'une surface et la géodésique correspondante sur la nappe *associée* de la surface lieu des centres de courbure. On trouve alors des formules (α) $\left(\omega = \frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{ds}{\rho_n} = -\frac{ds_1}{\rho_1}$, $\frac{ds}{\rho_g} = -\frac{ds_1}{\tau_1}$, $\frac{ds}{\tau_g} = -\frac{ds_1}{\rho_{1g}} = 0$, formules que l'on peut aussi trouver, comme un cas spécial, des formules que M. Darboux donne pour une courbe quelconque sur la surface lieu des centres (*Surfaces*, t. III, pp. 340, 341), et qui du reste pourraient être trouvées des formules (β) citées plus bas.

4. Plus généralement, on peut chercher les éléments différentiels de deux courbes et les relations mutuelles, par rapport à deux trièdres xyz et $x_1y_1z_1$ dont les angles mutuels sont constants et connus. Nous aurons d'abord, α, β, γ, ... étant les cosinus de ces angles,

$$p_1 = \alpha p + \beta q + \gamma r, \qquad q_1 = \alpha' p + \beta' q + \gamma' r, \qquad r_1 = \alpha'' p + \beta'' q + \gamma'' r;$$

pour la première courbe c on a ensuite (axe de x = tangente de c)

$$(1') \qquad \frac{ds}{\rho_n} = -q\,du, \qquad \frac{ds}{\rho_g} = r\,du, \qquad \frac{ds}{\tau_g} = -p\,du,$$

et pour la seconde

$$(2') \quad \begin{cases} \dfrac{ds_1}{\rho_{1n}} = \sin\omega(\alpha p + \beta q + \gamma r)\,du - \cos\omega(\alpha' p + \beta' q + \gamma' r)\,du, \\ \dfrac{ds_1}{\rho_{1g}} = d\omega + (\alpha'' p + \beta'' q + \gamma'' r)\,du, \\ \dfrac{ds_1}{\tau_{1g}} = -\cos\omega(\alpha p + \beta q + \gamma r)\,du - \sin\omega(\alpha' p + \beta' q + \gamma' r)\,du; \end{cases}$$

avec la courbe c_1 jusqu'à ce que l'axe des x'_1 ou des y'_1 devienne parallèle à l'axe des z', les éléments de c_1 resteront évidemment invariables, mais les axes $x'_1y_1z_1$ ou $x_1y'_1z_1$ prendront une position parallèle à celle des axes $z'xy$ ou $yz'x$ respectivement, ce qui montre que l'on doit appliquer aux rotations p, q, r la permutation circulaire une ou deux fois, respectivement, en avant; ou bien, ce qui revient au même, une fois en avant ou une fois en arrière, respectivement.

d'où il vient, en remplaçant,

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{ds_1}{\rho_{1n}} &= \sin\omega\left(\alpha\frac{ds}{-\tau_g}+\beta\frac{ds}{-\rho_n}+\gamma\frac{ds}{\rho_g}\right)\\ &\quad -\cos\omega\left(\alpha'\frac{ds}{-\tau_g}+\beta'\frac{ds}{-\rho_n}+\gamma'\frac{ds}{\rho_g}\right),\\ \frac{ds_1}{\rho_{1g}} &= d\omega+\alpha''\frac{ds}{-\tau_g}+\beta''\frac{ds}{-\rho_n}+\gamma''\frac{ds}{\rho_g},\\ \frac{ds_1}{\tau_{1g}} &= -\cos\omega\left(\alpha\frac{ds}{-\tau_g}+\beta\frac{ds}{-\rho_n}+\gamma\frac{ds}{\rho_g}\right)\\ &\quad -\sin\omega\left(\alpha'\frac{ds}{-\tau_g}+\beta'\frac{ds}{-\rho_n}+\gamma'\frac{ds}{\rho_g}\right). \end{aligned}\right.$$

Ces formules comprennent évidemment toutes les précédentes comme des cas particuliers. Toutefois, il est bon de remarquer que toutes les relations précédentes contiennent $\frac{ds_1}{ds}$ (ou, l'on peut dire, $\frac{ds_1}{du}$, si l'on pose $ds = du$); il faudra donc, dans chaque cas particulier, trouver ds_1 en fonction de ds, ρ, τ par un procédé spécial.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HARKNESS (J.) ET MORLEY (F.). — INTRODUCTION TO THE THEORY OF ANALYTICAL FUNCTIONS. Un volume in-8°, xv-356 p. Londres, Macmillan; 1898.

Cette *Introduction à la théorie des fonctions analytiques* doit être regardée comme un livre classique (*text-book*) pour les commençants. L'exposition y est claire, facile et rigoureuse, et bien conforme au but que se sont proposé les auteurs. Malgré leur souci de la rigueur, ils n'ont pas craint de faire continuellement appel à la représentation géométrique, en quoi ils ont parfaitement raison : il importe sans doute à l'étudiant de savoir et de comprendre qu'on peut se passer de cette représentation, et il peut être utile, pour l'en convaincre, d'exposer, sans y recourir, certaines parties fondamentales de la théorie; il y a quelque puérilité à vouloir s'en priver alors qu'elle apporte tant de clarté et de commodité. Après tout, les lettres et les formules de l'Analyse sont aussi des figures. Voudra-t-on s'en passer, sous prétexte de ne faire aucun appel à l'intuition de l'espace? Il n'y a aucun inconvénient, même philosophique, à s'aider, dans une démonstration, d'une représentation géométrique toutes les fois que cette représentation peut être traduite en termes analytiques.

Après quelques brèves indications sur la notion de nombre (au point de vue ordinal), les auteurs introduisent les nombres complexes et leur représentation géométrique : ils consacrent trois Chapitres à la représentation bilinéaire, qui permet déjà d'introduire plusieurs idées essentielles, et à l'étude géométrique des fonctions exponentielle et logarithmique. Une digression nécessaire sur les notions de limite et de continuité est traitée avec un grand souci de la rigueur. L'étude des fonctions entières et des fonctions rationnelles amène le lecteur au seuil de la théorie générale qui va être fondée, d'après la doctrine de Weierstrass et de M. Méray, sur les séries entières et, en particulier, sur la notion de prolongement : celle-ci conduit à la notion de fonction analytique, au sens propre de Weierstrass, comme ensemble de séries entières, qui se déduisent, par prolongement, de l'une d'entre elles : les fonctions

exponentielle, logarithmique, circulaires (directes et inverses) fournissent des applications indispensables. Notons le soin avec lequel la signification de ces diverses fonctions est précisée. Ainsi les auteurs emploient deux notations différentes pour représenter la fonction plurivoque arc $\sin x$, et la branche univoque de cette fonction, dont la partie réelle est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

MM. Harkness et Morley montrent ensuite le rôle des points singuliers et expliquent comment il y a lieu de les distinguer. Un Chapitre est consacré au théorème de Weierstrass sur la décomposition en facteurs primaires, et aux exemples concernant les fonctions circulaires et la fonction Γ.

Le théorème fondamental de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires se ramène immédiatement à la notion de fonction primitive, du moment qu'on ne veut avoir affaire qu'à des séries de puissances. Les auteurs en déduisent le théorème de Laurent. La *partition-function*

$$G(z) = \prod_{n=0}^{n=\infty} (1 - r^n z)$$

sert d'introduction aux fonctions $\mathfrak{S}$. Deux Chapitres sont consacrés aux propositions fondamentales de la théorie des fonctions elliptiques. Après avoir donné l'idée de la surface de Riemann et en avoir expliqué la construction sur quelques exemples simples, les auteurs établissent les propriétés élémentaires les plus fonda-

[redacted]

toute autre méthode que la considération des séries entières n'est qu'un instrument *bon pour la recherche*. Si parfait et si systématique que soit le mode d'exposition adopté par MM. Harkness et Morley, une exposition fondée sur les conceptions de Cauchy reste parfaitement défendable. Est-il bien certain que la notion de série soit essentiellement plus simple que celle d'intégrale définie? Ces deux notions ne dérivent-elles pas de la notion de limite et ne puisent-elles pas dans la même origine le même caractère transcendant? N'y a-t-il pas quelque excès à regarder les théorèmes relatifs aux séries entières comme des théorèmes d'Algèbre? Ce théorème, par exemple : « *Sur le cercle de convergence d'une série entière il y a au moins un point singulier* », est-il un théorème d'Algèbre, et la démonstration en est-elle algébrique? La vérité n'est-elle pas que certaines propositions se groupent naturellement autour de certains principes, et d'autres propositions autour d'autres principes? Pour n'en citer qu'un exemple, la notion d'intégrale définie n'est-elle pas la source évidente du théorème de Cauchy sur la limite supérieure des valeurs absolues des coefficients d'une série entière dont la somme reste, en valeur absolue, inférieure à un nombre fixe, tout le long d'un cercle, et si les démonstrations que Weierstrass et M. Méray ont données de ce théorème sont très ingénieuses, ce qu'elles ont d'ingénieux, alors que la démonstration de Cauchy ne demande aucun effort, n'est-il pas la preuve de ce que je viens de dire?

Quoi qu'il en soit, disons un mot des difficultés que les auteurs signalent dans la définition des fonctions monogènes. Il y en a d'abord qui sont tout à fait verbales, et sur lesquelles il ne convient guère de s'arrêter : dira-t-on, par exemple, ou ne dira-t-on pas que la fonction $\frac{1}{x}$ est monogène dans une région qui comprend le point o? Le fait, mis en lumière par Weierstrass, qu'une même expression analytique peut représenter deux fonctions différentes, constitue une contribution importante à la théorie des fonctions, il gardera son importance à quelque point de vue qu'on se place : il n'empêche pas qu'on puisse définir comme le fait Cauchy une fonction *synectique* dans une région déterminée. D'ailleurs, il ne viendra à personne l'idée de nier ce qu'a d'essentiel la notion de prolongement; quel que soit le point de départ, il faudra bien la

faire intervenir et faire, des séries entières, l'étude que cette notion suppose. La seule question est de savoir s'il n'est pas légitime, pour ceux qui le trouvent commode, de placer, au début de la théorie des fonctions, les définitions adoptées par Cauchy. Que les points singuliers jouent dans cette théorie un rôle prépondérant, c'est ce que personne non plus ne contestera; mais ce rôle ne se manifeste-t-il pas bientôt, dans la théorie de Cauchy, par les faits eux-mêmes, et faut-il, pour cela, mettre en avant un examen des *possibilités logiques attachées à l'étude des points singuliers?*

Pourquoi voir *une difficulté* dans cette condition, imposée à la définition de la dérivée d'une fonction $f(z)$, que le rapport

$$\frac{f(z') - f(z)}{z' - z}$$

doit tendre *uniformément* vers sa limite quand z' tend vers z? Il suffira, comme le font d'ailleurs les auteurs, de donner une définition de la dérivée qui implique cette condition. On dira, par exemple, que la fonction $f(z)$ admet une dérivée pour $z = z_0$, s'il existe un nombre $f'(z_0)$ tel que la quantité

$$\left| \frac{f(z') - f(z_0)}{z' - z_0} - f'(z_0) \right|$$

puisse être supposée plus petite que n'importe quel nombre positif ε, pourvu que la quantité $|z' - z_0|$ soit moindre qu'un nombre positif correspondant ε'; et il sera inutile de s'appesantir *ici* sur les difficultés que présente la notion de l'uniformité de la con-

[redacted]

culté de la théorie devient, sous leur plume et avec raison, une preuve de la profondeur de cette théorie. Cette observation est aussi la preuve de la sincérité des auteurs et montre assez que ce mot de *difficultés,* sur lequel je me suis trop arrêté, ne pourra tromper les lecteurs qui liront le livre de MM. Harkness et Morley avec le soin qu'il mérite assurément. J. T.

TAIT (PETER-GUTHRIE). — SCIENTIFIC PAPERS. Vol. I; in-4°, XIV-498 p. Cambridge at the University Press; 1898.

C'est avec une grande satisfaction que, dans ces derniers temps, nous avons eu à signaler la réunion en un corps homogène et la publication des Œuvres et des Mémoires scientifiques écrits par des physiciens ou des géomètres. Sans remonter à Lagrange, à Gauss, à Jacobi, à Fourier, nous avons eu dans ces derniers temps à signaler à nos lecteurs la publication des Œuvres de Hesse, de Kronecker, de Möbius, de Plücker, de Cayley et de bien d'autres. Il y a là un mouvement qui va en s'accentuant chaque jour. Il semble que les Recueils de Mémoires originaux et les journaux périodiques se fassent du tort les uns aux autres, tant il sont devenus nombreux. Les Mémoires y sont, pour ainsi dire, perdus et l'on peut dire que l'œuvre entreprise par la Société Royale, le dessein qu'elle a formé de publier un répertoire bibliographique scientifique répondent à des nécessités urgentes et évidentes pour tous les chercheurs. Le temps approche, il est déjà venu, où il sera impossible aux particuliers de se former une bibliothèque suffisamment complète sur les branches mêmes dont ils s'occupent plus spécialement. Au commencement du siècle, Laplace, Lagrange, Ampère savaient toute la Science. Combien y a-t-il de géomètres sachant aujourd'hui toutes les Mathématiques?

C'est pour cela, sans doute, que les Recueils des Mémoires scientifiques écrits par un même savant rencontrent une faveur croissante auprès des étudiants et des personnes compétentes. D'abord, par leur nature même, ils sont relativement homogènes; puis ils dispensent souvent de longues et pénibles recherches. Enfin l'auteur, quand il dirige lui-même la publication, peut faire un

choix, élaguer par exemple les parties qui font double emploi ou qu'il a utilisées dans les Ouvrages didactiques et dans les Traités.

Le Volume que publie M. Tait comprend une suite de quarante Mémoires s'étendant depuis 1859 jusqu'à 1881. L'auteur y a suivi régulièrement l'ordre chronologique. Il n'a fait dans tout le Volume qu'une seule exception se rapportant aux recherches si originales qu'il a publiées sur les *Nœuds*. Il a voulu avec raison rapprocher de ses premières recherches sur ce sujet, publiées en 1876-1877, celles par lesquelles il les a complétées en 1884-1885. La lecture des trois Mémoires que M. Tait a consacrés à ce curieux sujet sera certainement une des plus suggestives de ce premier Volume. Il serait difficile de grouper, de rapporter à un petit nombre de divisions les quarante Mémoires de ce premier Volume. On sait avec quelle originalité et quelle indépendance les géomètres anglais ont toujours appliqué les Mathématiques à bien des sujets trop souvent délaissés sur le continent. On trouvera, par exemple, dans ce Volume, des Mémoires sur les Jeux, les Arrangements, les Probabilités; il y en a d'autres qui appartiennent à la Physique, d'autres à la Mécanique ou à l'Analyse pure. On peut cependant caractériser beaucoup de ces travaux, les premiers surtout, en disant qu'ils constituent des applications de la Théorie des Quaternions aux sujets les plus variés, la Surface des ondes, l'Électrodynamique et le Magnétisme, le Calcul intégral, etc. Comme le dit M. Tait dans sa Préface, les *Lectures* publiées, en 1853, par Sir W.-R. Hamilton, « a fascinating book », avaient exercé sur lui une très grande impression. Il semble d'ailleurs que [redacted]



WEBER (H.). — LEHRBUCH DER ALGEBRA. Zweite Ausgabe. Zweiter Band. Braunschweig, F. Vieweg and Sohn; in-8°, xvi-856 p.; 1899.

Il nous suffira évidemment de signaler, à nos lecteurs, l'apparition de ce nouveau Volume, qui complète la seconde édition du Traité d'Algèbre de M. H. Weber. La rapidité avec laquelle cette seconde édition a dû succéder à la première prouve bien la valeur du travail que nous devons au savant géomètre; nos lecteurs savent d'ailleurs que cette œuvre doit être traduite en français et que le premier Volume de la traduction a déjà paru, il y a quelque temps, chez Gauthier-Villars. Le Traité d'Algèbre de M. Weber, amélioré à chaque édition nouvelle, aura, nous en sommes assuré, comme l'Ouvrage de notre regretté maître J.-A. Serret, l'influence la plus heureuse sur le développement des études algébriques. Sa lecture sera très utile à tous les géomètres, même à ceux qui se dirigeront d'un autre côté. L'étude approfondie des méthodes algébriques est éminemment propre à donner à l'esprit cette solidité et cette précision qui, aujourd'hui plus que jamais, sont nécessaires à tous les mathématiciens et, plus peut-être qu'à tous les autres, à ceux qui s'occupent de Géométrie, de Mécanique et de Physique mathématique.

HEUSCH (F. DE). — COURS D'ANALYSE : CALCUL DIFFÉRENTIEL. 1 volume in-8°, 278 p., Bruxelles, A. Castaigne; 1898.

L'auteur présente très modestement son Livre, qui résume les leçons qu'il fait à l'École militaire de Bruxelles, en disant que ces leçons ont été « puisées aux sources des meilleurs Traités d'Analyse parus jusqu'à ce jour » et que leur publication n'a d'autre but que d'être utile à ses élèves. Ce but sera certainement atteint, car l'exposition est, en général, claire, simple et bien appropriée à la catégorie de lecteurs auxquels s'adresse M. de Heusch.

L'auteur rappelle au début les notions indispensables à toute exposition rigoureuse. Si, d'ailleurs, il a le souci de la rigueur, et

s'il le montre au début, en insistant, par exemple, sur ce que la continuité d'une fonction n'implique pas l'existence de la dérivée, il ne se laisse pas hypnotiser par des scrupules qui seraient assurément déplacés dans un enseignement dont le but essentiel est d'apprendre à ses auditeurs le maniement de l'outil.

Tout au plus peut-on regretter, ici et là, l'absence d'un mot qui, sans rien changer aux démonstrations, éveillerait l'attention sur ce qui manque. Par exemple, je trouve très naturel que, dans un livre tel que celui de M. de Heusch, on admette l'existence des fonctions implicites et de leurs dérivées, mais pourquoi ne pas le dire? Par exemple encore, l'auteur donne des démonstrations très simples des théorèmes qu'expriment les égalités

$$\lim \frac{\Delta^n u}{\Delta x^n} = \frac{d^n u}{dx^n}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

en s'appuyant sur une proposition qu'il énonce ainsi : Si une fonction $f(x, a)$ contient, outre la variable x, un paramètre a et que cette fonction reste continue, ainsi que sa dérivée $\frac{df(x, a)}{dx} = f'(x, a)$, pour les valeurs de x comprises entre deux limites x_0 et X; si, de plus, la fonction $f(x, a)$ s'annule pour $a = a_0$, quel que soit x, la dérivée $f'(x, a)$ s'annulera également, quel que soit x, pour $a = a_0$. Pourquoi ne pas dire : *la dérivée $f'(x, a)$ tendra vers 0 quand a tendra vers a_0, et cela pour n'importe quelle valeur de x?* C'est, bien entendu, cette dernière proposition qu'établit l'auteur et c'est sur elle qu'il s'appuie

[redacted]

indépendantes adjointes aux premières, et la différentielle d'une fonction comme une forme de ces variables, linéaire s'il s'agit des différentielles du premier ordre. L'importance de cette forme linéaire consiste dans son caractère d'invariance, quand on fait un changement de variables. Il n'y a, bien entendu, dans l'énoncé de cette opinion, aucune critique de l'exposition de M. de Heusch.

Les propositions élémentaires relatives aux séries sont présentées d'une façon claire : mais pourquoi traiter si dédaigneusement la proposition de Cauchy sur la convergence des séries, dans lesquelles la somme des p termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ terme tend vers zéro, quel que soit p, quand n augmente indéfiniment, et pourquoi embrouiller l'énoncé de cette proposition, en spécifiant *que p doit pouvoir être choisi, soit constant, soit fonction de n, soit infini?* Que l'auteur ne démontre pas cette proposition, qu'il dise qu'elle n'est guère utile pour reconnaître si une série donnée est convergente ou non, cela, sans doute, est légitime; mais qualifier d'insignifiante une proposition qui pénètre aussi profondément dans la notion de limite, ou plutôt qui est identique à cette notion même, cela est vraiment excessif.

Dans un livre comme celui de M. de Heusch, la théorie des fonctions d'une variable imaginaire ne peut être qu'effleurée; on conçoit cependant que l'auteur ait voulu définir les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$, ... pour les valeurs imaginaires de z; l'introduction de $\operatorname{arctang}\frac{y}{x}$ dans la définition de $\log(x+yi)$, rend cette définition quelque peu incomplète; mais c'est là un détail sur lequel il n'y a pas lieu d'insister.

Les applications analytiques du Calcul différentiel (développements en séries, recherches des vraies valeurs, détermination des minima et des maxima) et les applications géométriques (tangentes, normales, asymptotes, concavité et convexité, points d'inflexion, points singuliers, courbure et osculation des courbes planes, plan osculateur, courbure, cercle osculateur, sphère osculatrice, torsion des courbes gauches, surfaces enveloppes, surfaces développables, surfaces gauches, plan tangent, courbure des lignes tracées sur une surface, indicatrice, etc.) sont traitées simplement.

Les exercices, assez nombreux, que M. de Heusch a joints à son livre permettront aux lecteurs de s'assurer qu'ils ont bien compris les théories exposées par l'auteur.

Les quelques imperfections que j'ai cru devoir signaler, qui ne sont, le plus souvent, que des imperfections de forme, et qu'il sera bien aisé de faire disparaître dans une seconde édition, n'empêcheront pas le livre de M. de Heusch de rendre de grands services à une catégorie très intéressante de lecteurs, qui veulent apprendre l'Analyse, non pour en scruter les profondeurs et les subtilités, mais seulement pour en appliquer les procédés élémentaires à la solution des problèmes simples que posent les Sciences pratiques.

J. T.

WILCZYNSKI (E.-J.). — HYDRODYNAMISCHE UNTERSUCHUNGEN MIT ANWENDUNGEN AUF DIE THEORIE DER SONNENROTATION. (Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde von der philosophischen Facultät der Friedrich-Wilhelms. Universität zu Berlin). In-4°, 35 pages. Berlin, Mayer und Müller; 1897.

Tandis que la recherche de la figure des planètes dépend des conditions d'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation commun à toutes ses parties, l'étude du Soleil conduit à un problème analogue, mais plus compliqué. L'observation ne permet pas, en effet, d'admettre que la vitesse angulaire de la rotation solaire soit la même pour les différents points de l'astre. Le mouvement à étudier est donc celui d'un fluide dont tous les points tournent autour d'un même axe, la vitesse angulaire n'étant pas la même sur les différents cercles ainsi décrits.



[redacted]

apparu peu à peu avec la suite des siècles tout en restant affecté d'inégalités périodiques que le frottement tend à atténuer progressivement.

L'auteur se demande si ces oscillations périodiques ne seraient pas dans un rapport étroit avec les variations bien connues des phénomènes solaires.

2° M. Wilczynski observe également que l'influence du frottement ne peut être que très faible, sans quoi elle aurait, à la longue, fait disparaître toutes les inégalités de vitesse angulaire qui existent entre les différentes couches. La théorie qu'il développe cadre bien avec cette indication ; elle conduirait (du moins en faisant, sur la température et la densité de l'atmosphère solaire, les hypothèses qui paraissent les plus vraisemblables dans l'état actuel de nos connaissances) à ce résultat que la diminution de vitesse angulaire due au frottement ne dépasserait pas deux minutes d'arc par jour en vingt-sept millions d'années.

L'analyse employée par l'auteur est tout à fait analogue à celle qui a servi à Legendre et à Laplace, dans l'étude de la figure de la Terre. On suppose que le carré de la vitesse angulaire de rotation est une fonction linéaire du carré du rayon du parallèle. Les formules obtenues fournissent pour l'aplatissement une valeur moindre que les quantités accessibles aux mesures; et, en effet, les observations n'ont jamais mis en évidence jusqu'ici d'aplatissement sensible.

Comme, d'autre part, les observations relatives à la rotation solaire ont porté sur trois régions différentes, à savoir la région des taches, la région des facules et la région qui donne naissance aux raies spectrales, la théorie doit permettre de déterminer les différences de niveau qui existent entre ces trois couches. Malheureusement, les observations faites à ce sujet présentent entre elles de singulières contradictions Adoptant, parmi les résultats trouvés, ceux dont l'exactitude lui semble le plus vraisemblable, M. Wilczynski arrive à des conclusions qui tendent à modifier sur plusieurs points les idées actuellement reçues. J. H.

APPELL (P.), Membre de l'Institut. — **ÉLÉMENTS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE A L'USAGE DES INGÉNIEURS ET DES PHYSICIENS.** 1 volume grand in-8°, 719 p. et 224 fig. Paris, 1898; G. Carré et C. Naud.

Lorsqu'un ingénieur ou un physicien, pour s'initier à quelque théorie mathématique ou pour apprendre quelque procédé de calcul nécessaire à ses travaux, ouvrait, jusqu'ici, un de nos Traités d'Analyse contemporains, il commençait par y trouver une belle définition de l'intégrale et une étude serrée des conditions d'intégrabilité d'une fonction, faite avec toute la rigueur que l'on sait mettre aujourd'hui dans cette question.

Si cette première lecture ne l'avait pas rebuté par son abstraction, il y avait de grandes chances pour qu'il s'arrêtât quelques pas plus loin; ne fût-ce qu'à la démonstration de l'existence de l'intégrale d'une équation différentielle ordinaire.

Il maugréait contre les mathématiciens, et peut être n'avait-il pas tout à fait tort, car ceux-ci, en France du moins, cantonnés dans la Science abstraite, avaient quelque peu négligé de se mettre à sa portée.

Depuis les *Éléments de Calcul infinitésimal* de H. Sonnet, livre excellent jadis mais maintenant insuffisant, on n'avait plus écrit aucun Ouvrage dans lequel un technicien puisse trouver aisément l'outil mathématique indispensable à ses travaux, sans risquer de se perdre dans les méandres de développements, admirables en eux-mêmes, mais inutiles pour lui.

[redacted]

fonctions les plus simples, les applications géométriques classiques, les évaluations d'aires et de volumes et les intégrations des types courants d'équations différentielles. Dans chaque cas, l'auteur a toujours adopté le mode d'exposition le plus rapide et le plus clair.

Lorsque surgit une de ces difficultés que l'on ne saurait surmonter, avec rigueur, sans se livrer à de longs développements abstraits, au lieu de l'escamoter, M. Appell la met, au contraire, en lumière en se contentant d'énoncer sans démonstration les faits qu'il ne veut pas établir. Parfois, lorsque le sujet est important (tel celui de la rectification des courbes, l'intégration et la différentiation des séries), il ajoute en petit texte les démonstrations volontairement omises; en tous cas, il ne laisse jamais subsister aucun doute dans l'esprit du lecteur et évite ces jongleries peu scrupuleuses et dangereuses par lesquelles certains écrivains masquent les sujets délicats.

D'une façon générale toute théorie est suivie d'applications judicieusement choisies. Le nombre considérable des exemples traités a eu pour effet d'allonger le Volume, qui a plus de 700 pages; mais, loin d'être un défaut, c'est là une des qualités de l'Ouvrage dont la lecture est ainsi singulièrement facilitée pour un public habitué à raisonner dans le concret plutôt que dans l'abstrait.

Immédiatement après les définitions fondamentales des infiniment petits, des différentielles, des fonctions primitives et des intégrales définies, l'auteur en donne l'application à l'évaluation des aires planes, à la cubature des volumes à bases parallèles et des solides de révolution qui n'exigent qu'une intégration simple, à la rectification des courbes planes et gauches, à l'évaluation des aires des surfaces de révolution et des surfaces coniques. Ce n'est qu'après avoir traité de nombreux exemples d'applications et avoir fait toucher du doigt au lecteur l'utilité de ce calcul, qu'il donne au Chapitre V les procédés élémentaires d'intégration.

A cet exposé de méthodes de calcul, succèdent les développements en séries des fonctions d'une variable : séries de puissances entières, séries trigonométriques, représentation d'une expression au moyen de ses valeurs moyennes. Puis, fidèle à sa règle, M. Appell s'en sert immédiatement pour étudier les intégrales dans lesquelles l'élément différentiel devient infini, ou dont une

des limites est infinie, et pour exposer tout ce qui est relatif à la théorie du contact dans les courbes planes ou gauches.

Il recommence ensuite, pour les fonctions de deux ou plusieurs variables, ce qu'il vient de faire pour les fonctions d'une seule variable.

Aux développements des fonctions de deux variables succèdent les théories du contact et des enveloppes des courbes et des surfaces, celles de la courbure et de la torsion dans les courbes gauches, l'étude de la courbure des lignes tracées sur une surface et des indications sommaires sur les lignes de courbure, asymptotiques, géodésiques, de niveau et de plus grande pente sur une surface.

Nous revenons ensuite au Calcul avec la théorie de la différentiation et de l'intégration sous le signe $\int$ et celle des intégrales prises le long d'un contour qui servent d'introduction à la définition des intégrales multiples et à leur application à l'évaluation des aires et des volumes.

La préoccupation constante et visible de l'auteur est toujours de montrer l'utilité des faits qu'il expose. Il varie les applications et les multiplie. Les unes sont prises dans le domaine de la Géométrie pure ou de la Géométrie descriptive, d'autres dans celui de la Mécanique, d'autres encore dans la Thermodynamique. L'universalité de la puissance de la *Mathématique,* cette science primordiale, en découle indiscutablement, et le lecteur se pénètre de la nécessité de sa connaissance.

[redacted]

peu de livres, même parmi les plus complets, où cet exposé soit aussi net, aussi clair et aussi nourri de résultats utiles.

Sept types pour les équations du premier ordre, trois pour les équations d'ordre supérieur au premier forment, avec les équations linéaires classiques, tout le bagage de ceux que nous savons manier aisément.

Un Chapitre sur les équations différentielles simultanées, un autre contenant des aperçus sur les équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre et un dernier sur les méthodes d'approximation, les intégrateurs et les intégraphes, terminent ce Volume, qui, sans aucun doute, va rendre de grands services.

Il est même à présumer, et ce n'est pas là le moindre éloge qu'on puisse en faire, qu'il ne sera pas utile qu'à ceux pour lesquels il a été écrit. Un étudiant de nos Facultés, candidat au certificat d'Analyse, trouverait certainement dans la lecture facile de ce bel Ouvrage un premier fonds de connaissances qui l'aideraient considérablement dans une étude ultérieure, plus approfondie, du Calcul différentiel et intégral. C. BOURLET.

VIRGILII E GARIBALDI. — INTRODUZIONE ALLA ECONOMIA MATEMATICA (collection des Manuels Hœpli). 1 vol. in-16, XII-210 p. Hœpli; Milan, 1899.

Voici, dans la collection de ces Manuels Hœpli dont nous avons eu plusieurs fois l'occasion de parler, une tentative curieuse et intéressante à plusieurs égards : MM. Virgilii et Garibaldi se sont proposé de rassembler, dans un très petit Volume, l'ensemble des connaissances mathématiques nécessaires pour la lecture des Ouvrages et des Mémoires d'Économie politique. Cela n'est pas peu de chose, car on voit figurer dans leur petit Livre, outre les notions élémentaires d'Algèbre, la formule du binome, des indications sur la théorie des probabilités, des éléments de Trigonométrie et de Géométrie analytique, de Calcul différentiel et intégral; on y trouvera par exemple la formule des accroissements finis, l'équation aux dérivées partielles que vérifie une fonction homogène, la règle pour prendre la dérivée d'une intégrale définie.

Tout cela tient en cent trente pages in-16, et les auteurs ne se sont pas contentés de donner des définitions et des règles; ils y ont joint des explications suffisantes, toutes les fois que cela était utile et possible. En outre, ils ont donné plusieurs applications à la Science qu'ils avaient en vue, tirées des Ouvrages de Pantaleoni, Perozzo, Pareto, Barone, Walras, etc., et se trouvent ainsi avoir établi des formules fondamentales de l'Économie politique mathématique. Une très intéressante Introduction, qui occupe le tiers du Livre, expose le développement historique et les principaux résultats de cette science; d'après les auteurs, l'Économie politique a été élevée à la dignité de science exacte par les publications de Cournot, Gossen, Jevons, Walras, Edgeworth, Pareto, mais elle attend encore son Laplace.

Comme le disent très justement les auteurs, ce n'est pas au point de vue mathématique qu'il faut se placer pour juger leur Livre, mais uniquement au point de vue des services qu'il peut rendre à la catégorie spéciale des lecteurs auxquels ils ont pensé en le composant; il n'est pas inutile de remarquer que la publication même de ce Livre prouve que, en Italie, cette catégorie de lecteurs est nombreuse.

PRACTICA GEOMETRIÆ. — Ein anonym Tractat aus dem Ende der zwölften Jahrhunderts, nach clm. 13021, herausgegeben von Maximilian Curtze. Separat-Abdrück aus *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1897, 32 p. in-8°.

[redacted]

grand'chose; cependant, en tenant compte de ces circonstances que l'opuscule peut être approximativement daté de la seconde moitié du XIIe siècle, que la forme en indique assez clairement qu'il a été rédigé pour l'enseignement dans une Université, qu'enfin le prénom de Hugues appartient surtout à la France, on est amené à identifier l'auteur avec un *Hugo physicus* (Hugues le Médecin), qui, après avoir, comme maître ès arts, professé le *quadrivium* (les Mathématiques) à Paris, se consacra à la Médecine, y acquit une certaine réputation, et mourut en 1199. La *Practica Hugonis* peut donc être revendiquée pour la France.

L'intérêt que présentent ces quelques pages pour l'histoire de la Géométrie provient de ce qu'elles marquent un moment singulier de son enseignement. Euclide a déjà été traduit de l'arabe (par Adélard de Bath), depuis un demi-siècle au moins; mais si notre Hugues n'ignore plus, comme les écolâtres du XIe siècle, qu'il y a une Géométrie théorique, ce doit être pour lui quelque chose comme, de nos jours, la Géométrie supérieure pour nos instituteurs d'école primaire. Il n'a, de fait, aucune teinture de la science gréco-arabe; il ne sait même pas encore, par exemple, mettre des lettres sur ses figures, pour en désigner les points. Il représente donc la pure tradition latine, à l'instant où son évolution normale, dans notre Occident, va se trouver brusquement déviée par les apports des doctrines orientales.

A la vérité, cette tradition latine a déjà adopté, au cours du XIe siècle, un instrument d'origine grecque, rapporté en Espagne par les Maures. Cet instrument, qui sert à toutes fins, à prendre l'heure comme à pratiquer l'arpentage, c'est l'*astrolabe*. Hugues n'en parle que pour son usage sur le terrain, c'est-à-dire comme d'un cercle qu'on tient dans un plan vertical, au moyen d'un anneau de suspension, et qui porte, mobile autour de son centre, une règle de visée (*mediclinium* ou *alhidada*, suivant la transcription de l'arabe, que Hugues emploie deux fois, et qui est passée en français). Mais la graduation dont on se sert pour l'arpentage n'est pas celle du limbe du cercle. Elle est marquée sur les côtés (horizontaux et verticaux) d'un carré inscrit (chaque demi-côté étant divisé en douze parties). C'est dire que la théorie sur laquelle repose l'usage de l'instrument est uniquement celle des triangles rectangles semblables.

Quant aux sources écrites, notre auteur en utilise deux principales : la première est un Recueil que l'on peut désigner par ses premiers mots, *Geometricales diversitates,* Recueil dont l'origine n'a pu, jusqu'à présent, être reconnue. Il paraît avoir été formé au XIe siècle et a été incorporé dans la compilation connue sous le nom de *Geometria Gerberti*. Il consiste en descriptions de procédés d'arpentage, conçues principalement au point de vue instrumental. Hugues a pris ce Recueil comme base des deux premières parties qu'il distingue dans la Géométrie pratique, à savoir, l'*altimetria* et la *planimetria*. Il développe surtout la première de ces deux parties, après l'avoir fait précéder de quelques définitions et des énoncés théoriques nécessaires. C'est un esprit méthodique, qui se rend bien compte de ce qu'il enseigne, et qui indique avec soin tout ce qui est essentiel. A cet égard, son écrit tranche singulièrement sur les Œuvres similaires du moyen âge.

Mais Hugues n'échappe point au grand défaut de son temps, la science *livresque*. Avant de le montrer plus amplement à propos de la dernière partie de son Opuscule, je prendrai comme exemple le dernier Chapitre de son *Altimétrie*. Pour mesurer la profondeur d'une eau, il décrit gravement le procédé suivant : on a une sphère métallique creuse, munie d'un anneau, et qui, seule, flotterait sur l'eau ; on la fait immerger en y suspendant une masse, laquelle, en se décrochant au fond de l'eau (grâce à un dispositif assez simple), laissera remonter la sphère. On mesurera le temps entre l'immersion et l'émersion, avec l'astrolabe (c'est-à-dire, de [redacted]

texte écrit, car il est ignorant de bien des choses. Cependant il a à moitié conscience de son ignorance : il voit bien qu'il faut expérimenter, mais il ne sait point s'y prendre, ou ne pense qu'à des expériences impossibles.

La *Planimétrie* de Hugues, à la différence de son *Altimétrie*, est très écourtée; elle se réduit à peu près à parler de la visée de l'extrémité d'une longueur, à un bout de laquelle se tient l'arpenteur. C'est la taille de celui-ci qui servira de troisième terme connu dans la proportion, les deux premiers étant, par exemple, fournis par l'astrolabe; au moins Hugues a-t-il soin de dire, sur les opérations de ce genre, qu'il faut chaque fois mesurer, avec une règle verticale, la hauteur à assigner à la taille.

Comme troisième partie de la Géométrie pratique, il ajoute la *Cosmimetria,* c'est-à-dire la mesure des dimensions du Monde. Cette singulière addition paraît être de son propre cru. Martianus Capella avait bien rempli, avec une nomenclature géographique, la plus grande partie du Livre qu'il consacrait à la Géométrie, comme s'il entendait ce mot dans le sens de mesure de la Terre, et comme si cette mesure était inséparable d'une description; mais si cet exemple peut bien faire comprendre jusqu'à quel point l'objet véritable de la Géométrie était perdu de vue dans l'Occident latin, si, d'autre part, aux compilations d'arpentage étaient déjà venues se mêler des mentions de la célèbre mesure d'Eratosthène, nul, avant Hugues, ne semble avoir eu l'idée de détacher de l'Astronomie, et de rattacher à la Géométrie, comme en constituant une branche spéciale, tout ce qui concernait la mesure des dimensions du Monde.

Dans cette troisième partie de son Opuscule, notre auteur suit, en le nommant, Macrobe (*Commentaire sur le songe de Scipion*). C'est dire que les données qu'il peut utiliser seront très maigres et singulièrement fautives. Mais l'histoire des erreurs de l'esprit humain est peut-être aussi importante que celle de ses progrès vers la vérité : je m'arrêterai donc sur ce point.

Hugues commence par expliquer, assez intelligemment, le principe de la mesure d'Ératosthène; il en déduit, en employant le rapport d'Archimède, la longueur en stades du diamètre de la Terre. Il calcula de même la circonférence de l'orbite solaire et le diamètre de cet astre, en procédant toujours avec une rigueur qu'il croit absolue, en mélangeant, de façon assez bizarre, les frac-

tions romaines et les fractions exprimées à la moderne, et en opposant ses résultats à ceux de Macrobe, qui ne donne que des nombres approchés.

Mais Macrobe, qui semble avoir disposé de sources très anciennes (prétendûment égyptiennes), avait combiné entre elles des données contradictoires. Ainsi il admet, d'une part, que l'extrémité du cône d'ombre de la Terre atteint précisément l'orbite solaire, ce qui revient à supposer que le diamètre du Soleil est double de celui de la Terre. En second lieu, il admet que la distance du Soleil est de soixante fois le diamètre de la Terre, ce qui correspond très probablement, avec l'approximation primitive $\pi = 3$, et en tenant compte du premier postulat, à l'hypothèse que le diamètre apparent du Soleil est de 2°. Que cette donnée fantaisiste ait réellement eu cours dans l'antiquité, qu'elle ait même eu une certaine vogue, nous le savons du reste, car elle est précisément celle qu'adopte numériquement un auteur qui cependant en connaissait certainement toute l'exagération, Aristarque de Samos, dans son Traité des *Grandeurs et distances du Soleil et de la Lune*.

Mais Macrobe ajoute une troisième donnée inconciliable avec les précédentes. D'après lui, en observant avec la clepsydre le temps que dure le lever du Soleil, on aurait constaté que son diamètre occupe la 216[e] partie de son orbite (c'est-à-dire 100'). S'il s'agit d'une opération réellement faite, et non de quelque combinaison aussi chimérique que les précédentes, on ne peut évidemment que supposer une grossière erreur de transcription;

[redacted]

sensiblement inférieur au double de celui de la Terre, et que, par suite, l'ombre de la Terre doit dépasser l'orbite solaire.

C'est ainsi que se termine la *Practica Hugonis*. Ce n'est certainement pas à notre niveau qu'il faut la comparer, mais elle n'en est pas moins en progrès énorme sur les écrits géométriques antérieurs. Il y a au moins constitution d'un enseignement pratique, raisonné, et visant un but précis. Cependant, comme connaissances théoriques, nos ancêtres du XIIe siècle ne savent guère plus que les Grecs avant Pythagore. S'ils peuvent utiliser quelques résultats de la Science hellène, comme le rapport d'Archimède, ils sont sans doute incapables de concevoir comment ces résultats ont pu être atteints. Quant à ce qu'ils trouvent dans Martianus Capella ou dans Macrobe, cela leur est plus nuisible qu'utile; leur respect pour la Science antique ne leur permet au plus que d'y relever des contradictions flagrantes. Il est bien difficile de deviner ce qui fût advenu sans l'infiltration de la Science arabe, puisque le génie d'invention géométrique ne s'est pas révélé, en Occident, avant la fin du XVIe siècle, et une fois connus, non seulement Euclide, mais encore Archimède, Apollonius et Pappus [1].

PAUL TANNERY.

MAITRE ROBERT ANGLÈS. — LE TRAITÉ DU QUADRANT (Montpellier, XIIIe siècle), texte latin et ancienne traduction grecque, publiés par M. PAUL TANNERY. — (*Notices et extraits des Manuscrits*, XXXV₂). — 80 pages in-4°. Paris, Klincksieck, 1897.

Pendant que M. Curtze publiait une *Practica Geometriæ*, qui, comme je l'ai dit, doit avoir été composée, dans la seconde moitié du XIIe siècle, par un maître ès arts de l'Université de Paris, du nom de Hugues, j'éditais un Ouvrage analogue, rédigé un siècle plus tard, mais par un maître de Montpellier.

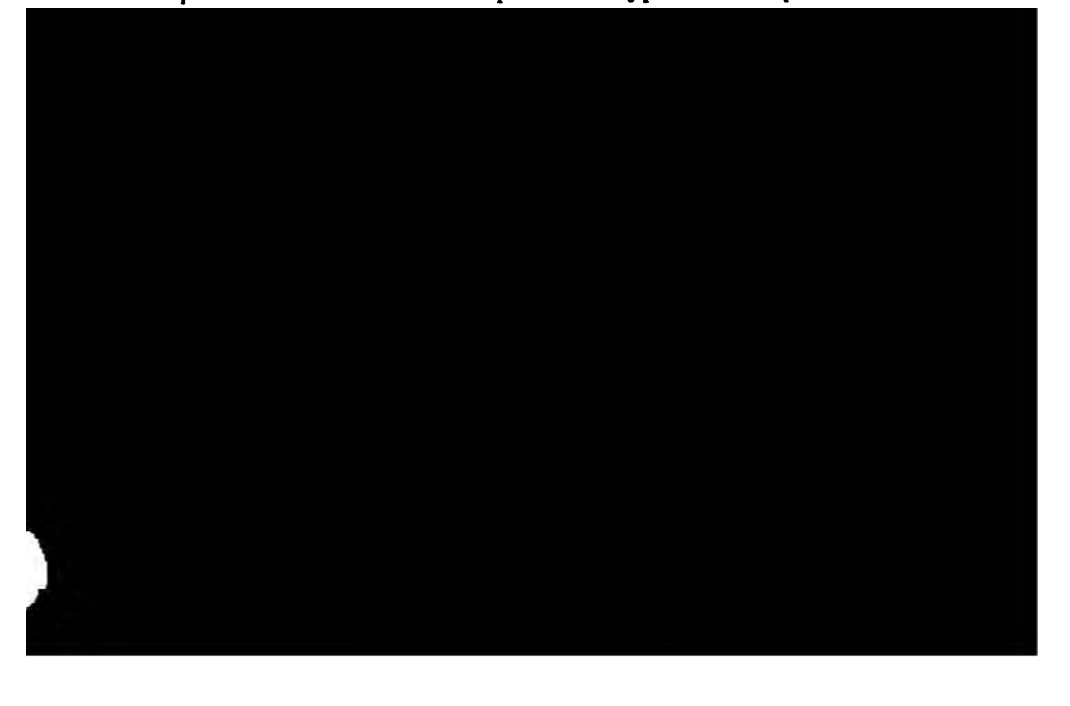
---

[1] Je viens de constater, ces jours derniers, que le même Traité se trouve, avec une continuation de la dernière partie, et avec l'annonce d'un Livre lui faisant suite et consacré à l'Astronomie, dans les manuscrits latins, Bibliothèque nationale 15362, et Bibliothèque Mazarine 717. Ce dernier (du XIIIe siècle) est exclusivement un Recueil d'œuvres de Hugues de Saint-Victor, et suppose donc une attribution (que je crois erronée) de la *Practica geometriæ* au célèbre théologien (mort en 1140). Cette attribution, admise par Hauzéau, doit provenir de l'identité des prénoms.

Le *Quadrans secundum modernos* est, en effet, malgré son titre, un Traité de Géométrie pratique, qui, comme l'Opuscule du XIIe siècle, enseigne les opérations d'arpentage (*altimétrie et planimétrie*), en y ajoutant, toutefois, les formules élémentaires pour la mesure des surfaces, et en substituant à la *cosmimétrie* une *stéréométrie*, c'est-à-dire une série de formules pour la mesure des solides. On voit, par là, qu'Euclide commence à être connu; mais le progrès réel n'est pas, malgré cela, très sensible. Si le Traité de Montpellier est pour nous plus facilement lisible que celui de Paris, il n'accuse guère plus de connaissances géométriques et semble l'œuvre d'un esprit moins original.

Mais, en dehors de l'intérêt documentaire que, surtout si on les compare l'un à l'autre, présentent ces deux Ouvrages à qui veut se rendre compte du caractère de l'enseignement de la Géométrie pendant le moyen âge, le Traité du Quadrant mérite l'attention sous un point de vue spécial. Tandis que Hugues, pour l'arpentage, se sert de l'astrolabe et qu'il n'en indique que les dispositifs utiles pour son objet, le maître de Montpellier emploie un autre instrument, également à toutes fins; il le décrit complètement et assez clairement pour permettre de le restituer entièrement; il en enseigne les usages astronomiques (trouver le degré de longitude du Soleil pour un jour donné et inversement; trouver la déclinaison du Soleil; mesurer la latitude du lieu; prendre l'heure).

Cet instrument, ainsi susceptible de remplacer l'astrolabe de tous points, est évidemment une invention arabe, quoiqu'on n'ait pas exactement retrouvé, parmi les types décrits par les auteurs


[redacted]

de perle) que porte le fil à plomb. Il faut, toutefois, régler chaque jour cet index, qui peut, à cet effet, glisser à frottement dur sur le fil à plomb; mais l'opération à faire pour cela est très simple, soit que l'on connaisse par des Tables la déclinaison du Soleil pour le jour de l'observation, soit que l'appareil porte un curseur, gradué en mois et jours, et donnant cette déclinaison sur le limbe.

En somme, cette solution du problème de trouver l'heure est très ingénieuse, et l'usage de l'appareil, dans ce but, était beaucoup plus rapide et plus commode que celui de l'astrolabe. C'était un véritable cadran solaire portatif, et c'est même évidemment le nom de cet instrument (*quadrans,* ce qui signifie quart de cercle) qui a passé aux cadrans solaires fixes, puis aux cadrans des horloges mécaniques.

Quant au nom de l'auteur du *Quadrans,* en transcrivant *Robert Anglès* (sous la forme méridionale actuelle) le nom *Robertus Anglicus* donné par la tradition manuscrite la plus autorisée ([1]), je n'ai nullement voulu trancher la question de nationalité; mais j'ai tenu à indiquer au moins la possibilité que le surnom ait été patronymique.

J'ai, en effet, en Appendice au *Traité du Quadrant*, complété la publication partielle faite par Sédillot, dans son *Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes,* d'un Traité de l'*Astrolabe universel* ou *Saphea* d'Arzachel, écrit en 1231 par un *Guillermus Anglicus,* lequel, dans la souscription que j'ai donnée, se qualifie de citoyen de Marseille, médecin de profession et, grâce à sa science, surnommé *l'Astronome*. Cet Opuscule est également des plus intéressants, en ce qu'on y saisit le moment où un savant de l'Occident latin arrive de lui-même, non sans peine (il avoue naïvement qu'il y a mis six ans), à s'assimiler le principe de la construction des instruments arabes. Or il est particulièrement remarquable que, dans cet astrolabe universel, le mode de détermination de l'heure soit, au fond, le même que dans le quadrant décrit par *Robertus Anglicus*. En tous cas, il est bien clair que ce *Guillaume l'Anglais* a pu faire souche dans le Midi et laisser son surnom à ses enfants.

([1]) Plusieurs manuscrits portent, au contraire, le nom de *Johannes*, par suite d'une erreur dont j'ai montré l'origine probable.

Tant que les archives de l'Université de Montpellier ne seront pas classées de façon à permettre des recherches utiles, l'origine de celui que j'ai appelé *Robert Anglès* peut, en tous cas, rester en suspens; mais on a de lui un autre Travail, encore inédit: c'est un *Commentaire sur le Traité de la sphère de Jean de Sacrobosco,* commentaire daté de 1271, et expressément mentionné comme écrit pour l'usage des étudiants de Montpellier. L'époque où il vivait est donc bien déterminée.

Quant à la date du *Traité du Quadrant*, j'ai dit, dans l'Introduction très détaillée dont je l'ai fait précéder, qu'un manuscrit de la bibliothèque de l'Université de Cambridge (n° 1767) étant, d'après le Catalogue, daté de 1276, le Traité devait être antérieur. Depuis, j'ai pu examiner ce manuscrit à Cambridge et reconnaître que l'indication du Catalogue est inexacte; la date de 1276, inscrite au folio 139 verso, est, non pas celle de la copie du manuscrit, mais celle de l'achèvement des *Canones* (Tables astronomiques) qui commencent au folio 117. Quant au Traité du *Quadrant,* il occupe les feuillets 56-60 ou folio 57 verso; la petite Table qui donne la longitude du Soleil, au commencement de chaque mois, est expressément marquée comme prise *ab almanac anni* 1299. Mais il est certain que cette indication est due au copiste qui a voulu substituer des nombres plus exacts à ceux que portait le manuscrit qu'il reproduisait. Le manuscrit de Cambridge, qui est tout entier d'une même main, semble donc exécuté vers 1299, mais il ne permet pas de préciser davantage la date du Traité du *Quadrant*.

[redacted]

D'un autre côté, dans mon Introduction, j'ai remarqué que la partie géométrique (et non la description du quadrant) se trouvait assez souvent dans les manuscrits isolée et anonyme, et que, si elle n'avait pas été extraite du Traité de Robert Anglès, elle pouvait représenter un Opuscule antérieur qu'il aurait compilé. J'indiquais, comme pouvant peut-être permettre de trancher la question, un manuscrit de la Bodléienne d'Oxford (*Digbeianus* 174), catalogué comme de la fin du XIIe siècle. J'ai pu également examiner ce manuscrit et constater que le fragment visé ne contient en fait qu'un feuillet et demi (folio 145-146) d'une écriture du XVe siècle seulement, intercalé au milieu d'une traduction d'Euclide, d'une date très antérieure. Quant au texte de ce fragment, il est très voisin de celui du *Digbeianus* 147 (du XIVe siècle) qui est intitulé : *Practica Geometriæ,* ne contient pas la description du quadrant, et est d'ailleurs incomplet. La question que j'ai soulevée ne peut donc être tranchée au moyen de ces manuscrits ; ils semblent plutôt dériver du texte du Traité de Robert Anglès, remanié et plus ou moins augmenté. Il est particulièrement remarquable que, dans cette recension, la troisième Partie de la Géométrie pratique soit appelée *steriometria vel cosmimetria,* par une malheureuse réminiscence de la subdivision introduite dans la *Practica Hugonis.*

Comme l'a remarqué M. Curtze dans la *Deutsche Litterarzeitung* (17 décembre 1898), le Traité de Robert Anglès peut être regardé comme ayant été classique au moyen âge. Si j'en ai signalé onze manuscrits ([1]), rien qu'à la Bibliothèque nationale de Paris, et, d'après des Catalogues, vingt-quatre autres, dont plusieurs m'avaient d'ailleurs été indiqués par M. Curtze, il pourrait aujourd'hui, dit-il, donner facilement une liste double. Si j'ai été amené à m'en occuper par le fait, assez bizarre, qu'il en existe une traduction grecque sans nom d'auteur, dont j'ai voulu chercher l'original latin, il y a, de même, d'anciennes traductions en hébreu et en allemand. Enfin, ce Traité a été singulièrement démarqué sous le titre de *Scenographia practica* et inséré presque textuellement par Waldseemüller dans une des éditions de la *Margarita philosophica* (celle de Strasbourg, 1508). C'est

---

([1]) Je viens d'en rencontrer un douzième (anonyme). Ms. lat. 15125 (XIVe siècle), f° 40 à 55.

dire qu'il a été de même utilisé par la plupart des auteurs du moyen âge qui ont traité, après Robert Anglès, soit du Quadrant, soit de la Géométrie pratique. Son importance historique dépasse donc de beaucoup sa valeur propre, mais il méritait ce succès par sa clarté et sa parfaite adaptation aux besoins de l'enseignement de son temps.

PAUL TANNERY.

MÉLANGES.

SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE;

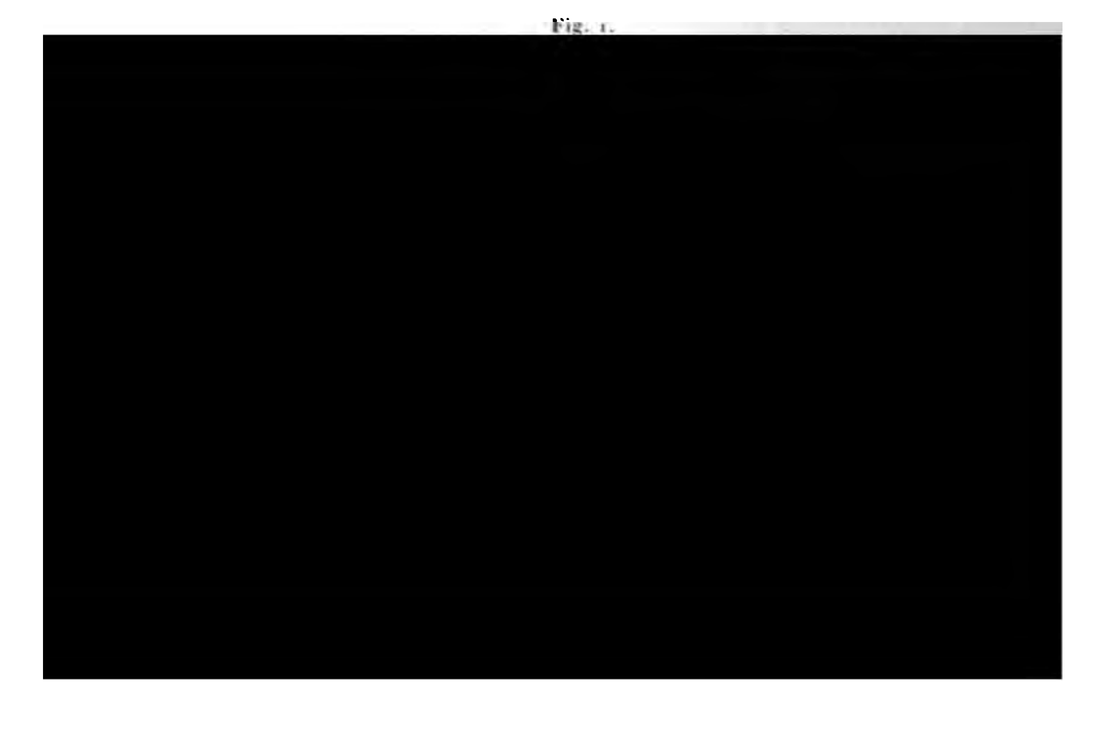
PAR M. ÉMILE PICARD.

Je me suis occupé autrefois (*Journal de Mathématiques*, 1890, et Note dans le tome IV des *Leçons* de M. Darboux) des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre du type hyperbolique

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz,$$

où a, b, c sont des fonctions réelles et continues des deux variables réelles x et y dans la région du plan où vont rester ces variables. Des méthodes d'approximation successives donnent,

Fig. 1.

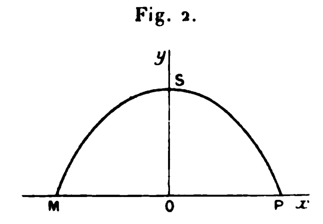


une fois par toute parallèle à l'axe des x et à l'axe des y, et que l'on se donne les valeurs de z et de $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur cet arc de courbe, une intégrale de l'équation aux dérivées partielles sera complètement définie par ces données dans le rectangle MM'PP'; elle y sera continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre.

Ayant repris récemment ces questions dans mon cours, j'ai eu l'occasion de faire quelques remarques très élémentaires que je reproduis ici.

Il est important de remarquer la nécessité de l'hypothèse faite que l'arc considéré n'est rencontré qu'*en un seul point* par une parallèle aux axes de coordonnées. Considérons, en effet, pour prendre un exemple très simple, un arc MP dont les extrémités soient sur Ox de part et d'autre de l'origine et supposons que le point S de cet arc où la tangente est parallèle à Ox soit sur l'axe des y. Si l'on

Fig. 2.



se donne sur l'arc MSP une succession continue de valeurs pour z et $\frac{\partial z}{\partial x}$, ou encore pour $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en se donnant en plus la valeur de z en S, *il n'existera pas en général d'intégrale de l'équation, continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre dans le segment* MOPS, *et répondant à ces données*. On aura, en effet, une intégrale déterminée dans la partie OSP, une autre intégrale déterminée dans la partie OSM; ces deux intégrales *ne se raccordent pas* en général le long de OS.

On sait le rôle que jouent dans l'étude de l'équation les parallèles aux axes qui sont ici les caractéristiques. Considérons un segment AB de droite parallèle à Ox. On ne peut pas sur ce segment se donner, pour une intégrale z, la valeur de z et celle de $\frac{\partial z}{\partial y}$, car les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial y}$ sur AB sont déterminées, à une constante

près, en fonction des valeurs de z ; c'est ce qui résulte de l'équation

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz,$$

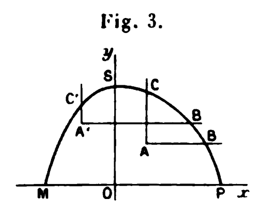
qui montre que sur AB les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial y}$ sont déterminées par une équation linéaire du premier ordre. Si donc, pour une intégrale, z est donnée le long de AB, et si $\frac{\partial z}{\partial y}$ est donné au point A, les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial y}$ seront connues tout le long de AB. Cette remarque peut être utile pour décider dans certains cas du raccordement de deux intégrales. Ainsi, soient un segment BB′ de l'axe des y comprenant l'origine O, et le segment OA de l'axe des x ; si l'on se donne une intégrale par ses valeurs le long de BB′ et de OA, elle sera déterminée dans le rectangle de base BB′ et de hauteur OA. On a, en effet, deux intégrales définies l'une dans le rectangle construit sur OA et OB, l'autre dans le rectangle construit sur OA et OB′ ; la remarque précédente montre que ces deux intégrales se raccordent (c'est-dire ont mêmes dérivées premières) le long de OA, et par suite n'en font qu'une.

On connaît la méthode célèbre développée par Riemann au sujet de l'équation (1). Dans l'exposition de cette méthode, on laisse généralement de côté la question inverse, je veux dire qu'après avoir obtenu la formule de Riemann on ne démontre pas que réciproquement *elle donne la solution de l'équation répondant aux*

[redacted]

points, si l'on applique la méthode de Riemann en prenant d'abord le point A dans la partie OSP, et en menant les parallèles AC

Fig. 3.



et AB aux axes, on aura pour cette partie OSP l'intégrale correspondant aux données initiales le long de l'arc SP; mais si l'on poursuit *par continuité* cette intégrale, en mettant A en A' dans OSM, il faudra mener les parallèles A'C' et A'B'; cette *continuation* ne coïncidera nullement avec l'intégrale relative à OSM et répondant aux données initiales sur l'arc MS.

SUR LA DÉFORMATION DES QUADRIQUES DE RÉVOLUTION;

PAR M. TZITZÉICA.

M. Guichard a trouvé un théorème qui a été démontré et complété dernièrement par M. Darboux. Il a énoncé, en particulier, la proposition suivante :

Si l'on fait rouler une quadrique Q de révolution sur une surface applicable, les foyers de Q décrivent des surfaces à courbure moyenne constante.

On est naturellement conduit à se poser la question suivante :

On a une surface Θ qu'on fait rouler sur une surface applicable Θ_1; dans quel cas un point M, lié invariablement à Θ, décrit-il dans ce mouvement une surface Σ telle qu'en remplaçant Θ_1 par toute autre surface Θ'_1 applicable sur Θ, la nouvelle surface Σ' décrite par le point M ait aux points correspondants la même courbure moyenne que Σ?

Le théorème de M. Guichard montre que cette question

comporte au moins une solution, nous voulons démontrer que c'est la seule.

Nous adoptons les notations employées par M. Darboux dans le Chapitre intitulé : *Roulement de deux surfaces l'une sur l'autre,* du quatrième Volume de ses *Leçons,* et nous supposons le point M au sommet du trièdre lié invariablement à Θ. Les rayons principaux de courbure de Σ sont alors les racines de l'équation

$$\begin{aligned}\rho^2 \left| \frac{\partial x}{\partial u} - \xi, \frac{\partial x}{\partial v} - \xi_1, x \right| &+ \rho \sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(\left| \frac{\partial x}{\partial u} - \xi, \xi_1, x \right| + \left| \xi, \frac{\partial x}{\partial v} - \xi_1, x \right| \right) \\ &+ (x^2+y^2+z^2) \left| \xi, \xi_1, x \right| = 0,\end{aligned}$$

où les expressions comprises entre deux barres représentent des déterminants dont nous avons écrit seulement la première ligne. Il s'agit d'exprimer que

$$\frac{\left| \frac{\partial x}{\partial u} - \xi, \xi_1, x \right| + \left| \xi, \frac{\partial x}{\partial v} - \xi_1, x \right|}{\left| \xi, \xi_1, x \right|}$$

est la même fonction de u et v, quelle que soit la surface Θ_1.

On trouve alors

$$(1)\quad \frac{\left(S x \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 - E S x^2}{D} = \frac{\left(S x \frac{\partial x}{\partial u} \right)\left(S x \frac{\partial x}{\partial v} \right) - F S x^2}{D'} = \frac{\left(S x \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 - G S x^2}{D''},$$

[redacted]

et prendre

$$E = 1 + \varphi'^2(u), \qquad G = u^2, \qquad D = \varphi''(u), \quad D'' = u\varphi'(u).$$

Les équations (1) se réduisent alors à

$$\frac{(u + \varphi\varphi')^2 - (1 + \varphi'^2)(u^2 + \varphi^2)}{u\varphi''} = -\frac{u^2 + \varphi^2}{\varphi'},$$

qui intégrée nous donne

$$u^2 + \varphi^2 = (a\varphi + b)^2,$$

a et b étant deux constantes arbitraires, ce qui prouve que Θ est une quadrique de révolution et le point M un de ses foyers.

On peut continuer et démontrer complètement le théorème de M. Guichard. En effet, il suffira de démontrer que la surface Σ est à courbure moyenne constante pour une surface Θ_1 particulière pour qu'en vertu de ce qui précède elle le soit toujours. Or, la surface Θ étant de révolution, elle est applicable sur une droite. Nous prendrons cette droite Δ pour surface Θ_1. Le roulement de Θ sur Δ a encore un sens parfaitement déterminé, et la surface Σ sera une surface de révolution dont la méridienne est le lieu d'un des foyers de la conique méridienne de Θ lorsque cette conique roule sans glisser sur Δ. Comme on sait, Σ est dans ce cas une surface à courbure moyenne constante. On voit en même temps que dans le cas où Θ est un paraboloïde de révolution, Σ est une surface minima, car le lieu du foyer d'une parabole qui roule sur une droite est une chaînette.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

ANDOYER (H.). — *Leçons élémentaires sur la théorie des formes et ses applications géométriques.* In-4°, 190 p. Paris, Gauthier-Villars. 8 fr.

BAKER (W.-M.) — *Examples in Analytical Conics for Beginners.* 96 p. London, Bell. 2 sh. 6 d.

BAER (K.). — *Die Kugelfunktion als Lösung einer Differentialgleichung.* In-4°, 25 p. Berlin, Mayer et Müller. 1 m. 50 pf.

Cantor (M.). — *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* 3 (Schluss-) Bd. Vom J. 1668 bis zum J. 1758. 3. Abthlg. Gr. in-8° avec 70 fig. Leipzig, Teubner. 12 m.

Forsyth (A.-R.). — *Memoir on the Integration of Partial Differential Equations of the second ordre in three independent Variables, when an intermediary Integral does not exist in general.* In-8°, 86 p. London, Dulau. 4 sh.

From *Philos. Transactions*, 1890, Vol. 191.

Furle (H.). — *Ueber die Verwendung des Faber'schen Rechenstabes zur Lösung quadratischer, kubischer und biquadratischer Gleichungen.* 1 Thl. In-4°. Berlin, Gaertner. 1 m.

Gutjahr (W.). — *Die Diakaustik des Kreises.* In-4°, 28 p. avec 2 tableaux. Berlin, Gaertner. 1 m.

Heun (K.). — *Die Vektoren der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des Punktes und der geraden Linie.* In-4°, 28 p. Berlin, Gaertner. 1 m.

Lafouge. — *Essai synthétique sur la formation du système solaire.* Ire Partie : *Formation du système.* In-8°, IX-238 p. Châlons-sur-Marne, Martin frères.

Lévy (M.). — *Leçons sur la théorie des marées, professées au Collège de France.* Ire Partie : *Théories élémentaires; Formulaire pratique de prévisions des marées.* In-4°, XII-298 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 14 fr.

Ostwald's *Klassiker der exakten Wissenschaften.* N° 12. In-8°. Leipzig, Engelmann. Cart. 2 m. 40 pf.

[redacted]

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

JACQUES DERUYTS, Chargé de Cours à l'Université de Liége, Membre de l'Académie Royale de Belgique, etc. — ESSAI D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE DES FORMES ALGÉBRIQUES. Un vol. in-8°, VI-157 pages. Bruxelles, Hayez; Paris, Hermann, 1891.

Ce Mémoire contient les résultats principaux des recherches que l'auteur a publiées sur la Théorie des formes à plusieurs séries de n variables.

Les séries de variables employées sont représentées par

$$\begin{matrix} x1_1, & x1_2, & \ldots, & x1_n, \\ x2_1, & x2_2, & \ldots, & x2_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots; \end{matrix}$$

elles sont toutes de même espèce (et correspondent aux coordonnées de points de l'espace à $n-1$ dimensions). Les quantités, qui sont ordinairement considérées comme des variables d'espèces différentes, n'ont pas été introduites spécialement, à cause de leur réduction aux variables (x). Dans ces conditions, les fonctions invariantes dépendent seulement de $(x1)$, $(x2)$, ... et des coefficients d'un système quelconque de formes algébriques.

Quand on effectue sur toutes les variables la substitution linéaire S, de module

$$\delta = (\pm \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{nn}),$$

les variables $(x1)$, $(x2)$, ... sont remplacées par d'autres $(X1)$, $(X2)$, ...; les coefficients a, b, ... des formes deviennent des fonctions linéaires A, B, ... de a, b, ... Si

$$p = p(x1, x2, \ldots a, b, \ldots)$$

est une fonction entière et homogène,

$$p(X1, X2, \ldots, A, B, \ldots)$$

est la *transformée* de p par la substitution S.

Le développement du Mémoire a pour base l'étude directe des transformées, qui est mise en corrélation avec la théorie des fonc-

tions invariantes. Notamment, l'analyse des transformées conduit à la réduction des fonctions invariantes à certaines d'entre elles, qui sont appelées *covariants primaires*.

Ces fonctions primordiales contiennent $n-1$ séries de variables $(x1)$, $(x2)$, ... $(x\overline{n-1})$ et sont caractérisées par les équations de polaires

$$x1\frac{d}{dx2}=0,\qquad x2\frac{d}{dx3}=0,\qquad \ldots,\qquad x\overline{n-2}\frac{d}{dx\overline{n-1}}=0.$$

Les propriétés des covariants primaires, ainsi que leur loi régulière de formation, font l'objet d'études détaillées. Pour le cas de $n=2$, on retrouve les résultats que MM. Cayley, Sylvester, Clebsch et Gordan ont établis comme fondements de la théorie des formes binaires.

Les Préliminaires comprennent d'abord les définitions et l'exposé d'un système uniforme de notation approprié à la généralité du sujet. La représentation symbolique se trouve rattachée à la détermination des transformées.

Chapitre I. — *Relations entre les fonctions invariantes et les systèmes transformables*. (15-31).

En admettant les définitions ordinaires des systèmes cogrédients et contragrédients, on a les énoncés suivants :

1° Toute fonction invariante est la somme des produits des termes correspondants de deux systèmes contragrédients et réci-[redacted]



substitutions S_h, S_{hl} définies par :

$$x_h = \varepsilon X_h, \qquad x_k = X_k, \qquad (k \gtrless h), \qquad \ldots, \qquad (S_h)$$
$$x_l = X_l + \lambda X_h, \qquad x_i = X_i, \qquad (i \gtrless l), \qquad \ldots, \qquad (S_{hl})$$

h, l ayant toutes les valeurs distinctes comprises dans la suite $1, 2, \ldots, n$. Les fonctions isobariques et de poids $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ pour les indices $1, 2, \ldots, n$, sont caractérisées par la propriété de se reproduire multipliées par ε^{π_h}, après la substitution S_h.

La substitution S_{hl} conduit à introduire un opérateur différentiel (h, l) tel que la transformée de p par S_{hl} s'écrit

$$p + \frac{\lambda}{1}(h, l)p + \frac{\lambda^2}{1.2}(h, l)^2 p + \ldots.$$

Les opérateurs (h, l) ont différentes propriétés utiles pour la suite.

Chapitre III. — *Propriété des fonctions invariantes et des fonctions semi-invariantes.* (46-74).

1° Les fonctions invariantes sont caractérisées par leurs propriétés d'être isobariques, de même poids pour tous les indices $1, 2, \ldots, n$, et d'être solutions des $n - 1$ équations $(i + 1, i) = 0$. — Propriétés diverses.

2° Les fonctions *semi-invariantes* sont définies par les conditions d'être isobariques et solutions des équations $(i + 1, i) = 0$.

Elles peuvent être caractérisées par la propriété de se reproduire multipliées par des puissances de $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}$, après la substitution définie par les formules

$$x_i = \alpha_{ii} X_i + \alpha_{i,i+1} X_{i+1} + \ldots + \alpha_{in} X_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les fonctions semi-invariantes, indépendantes des variables, sont appelées *semi-invariants*.

3° Les fonctions semi-invariantes sont représentables symboliquement par des agrégats de formes linéaires et de certains déterminants d'ordres $1, 2, \ldots, n$. On obtient, comme cas particulier, l'expression symbolique des fonctions invariantes. On trouve de même plusieurs propriétés des semi-invariants qui sont employées dans la suite.

4° La *source* d'une fonction invariante est le coefficient des plus hautes puissances de $x1_1, x2_2, \ldots, xn_n$. Toute fonction homogène et isobarique est la source d'une fonction invariante. Toute fonction invariante se déduit de la transformée de sa source, dans laquelle on a remplacé les paramètres a_{ij} de la substitution S par les variables x_{ji}. Applications.

5° Les *covariants primaires* sont définis comme les fonctions invariantes, aux variables $x1, x2, \ldots, x\overline{n-1}$, qui ont pour sources les semi-invariants. Quelques propriétés.

Chapitre IV. — *Réduction des fonctions invariantes.* (75-97).

1° Toute fonction invariante est une somme de covariants identiques, multipliés par des polaires de covariants primaires relatives aux variables.

2° Les covariants primaires sont réductibles à des fonctions entières d'un nombre limité d'entre eux.

Chapitre V. — *Étude des covariants primaires.* (98-118).

1° Équations aux dérivées partielles, caractéristiques.

2°-3° Propriétés des coefficients et des polaires.

4° Les covariants primaires, qui servent à exprimer une fonction invariante φ, sont des quotients de polaires de φ par des puissances de $(\pm x1_1, x2_2, \ldots, xn_n)$.

Une fonction invariante n'est développable que d'une seule [redacted]

La seconde partie comprend la démonstration de ce théorème : Les covariants primaires, de degré t par rapport à f, sont des sommes de covariants dérivés de f et de covariants primaires φ, de degré $t-1$ par rapport à f.

On déduit de là un procédé général pour former toutes les fonctions invariantes.

Chapitre VII. — *Détermination du nombre des covariants primaires linéairement indépendants, de degrés donnés.* (131-147).

1° Réduction au cas de formes à $n-1$ séries de variables.

2° Nombre des covariants primaires, exprimé au moyen de nombres de partitions.

Chapitre VIII. — *Particularités essentielles des formes.* (148-156).

Des formes f, f', ... ont une particularité essentielle s'il existe entre leurs coefficients des relations algébriques entières $g=0$, ..., indépendantes de la substitution S des variables. Toute particularité essentielle est caractérisée par l'identification à zéro de certains covariants primaires.

Une fonction algébrique entière est une *fonction invariante de la particularité,* si elle ne diffère de sa transformée que par une puissance du module δ de la substitution S.

Dans ces conditions, la propriété d'invariance pourrait résulter des équations $g=0$, ... L'auteur établit que les particularités essentielles ne donnent lieu à aucune fonction invariante spéciale; le même résultat est indiqué pour les covariants primaires.

É. PICARD, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — Traité d'Analyse, T. III. — Des singularités des équations différentielles. Étude du cas où la variable est réelle. Des courbes définies par des équations linéaires; analogies entre les équations algébriques et les équations linéaires. 1 vol. gr. in-8° de 568 pages. Paris, Gauthier-Villars; 1896.

Les deux premiers Tomes du Traité de M. Picard ont mis le lecteur en possession des instruments analytiques qu'exige l'étude

approfondie des équations différentielles. Les notions et propriétés fondamentales des intégrales simples et multiples (dans le domaine réel et complexe), des fonctions analytiques, etc., ont reçu l'ample développement qu'elles comportent. Les théorèmes d'existence des intégrales d'un système différentiel ont été établis (tant pour les valeurs réelles que pour les valeurs imaginaires des variables) par trois méthodes différentes qui offrent chacune leurs avantages propres. Montrer le parti qu'on peut tirer de ces notions, une fois acquises, pour la discussion des intégrales d'une équation différentielle, tel est l'objet principal du troisième Volume du Traité.

« J'ai eu pour but, dit l'Auteur dans sa Préface, d'exposer quelques-unes des questions qui intéressent particulièrement aujourd'hui les analystes, et dont l'étude peut être utilement poursuivie. » C'est évidemment, en de telles matières, le but le plus utile d'un Ouvrage didactique; c'est aussi le plus difficile à atteindre. Mais M. Picard est passé maître dans l'art de donner une forme achevée aux choses qui n'en semblent point comporter encore, et cela sans ralentir ni dissimuler la suite naturelle des idées et la marche de l'invention. Nulle part cette faculté ne s'est mieux affirmée que dans le Volume que nous analysons.

L'Auteur revient d'abord sur l'existence des intégrales d'un système différentiel qui correspondent à des conditions initiales données. Les démonstrations du Tome II ne conviennent qu'à des conditions initiales *régulières* : qu'arrive-t-il quand les conditions initiales sont *singulières*? Le cas à la fois le plus général et le

[redacted]

et de compléter la discussion de Briot et Bouquet. Vient enfin (Chapitre III) une élégante théorie des *intégrales singulières* que l'Auteur avait déjà indiquée dans son cours lithographié (1886-1887) et qu'il étend, d'après M. Goursat, à un système différentiel quelconque.

La nature des intégrales étant ainsi élucidée dans le voisinage des valeurs initiales (régulières ou non), comment poursuivre leur étude dans un domaine quelconque? Ce problème, qui (joint au problème analogue concernant les équations aux dérivées partielles) embrasse à peu près toutes les Mathématiques, peut être traité à deux points de vue : au point de vue *analytique* (où l'on donne à la variable des valeurs complexes) et au point de vue *réel*. A ces deux points de vue correspondent deux Sections considérables de l'Ouvrage.

Le brillant essor de la théorie des fonctions imaginaires a fait longtemps négliger les problèmes où tous les éléments considérés sont *réels*. Il y avait là un danger véritable : en s'écartant de plus en plus des applications naturelles immédiates, les Mathématiques risquaient de se réduire à une Science de curiosité. C'est seulement dans ces dernières années que l'étude du domaine réel a été reprise, grâce surtout à l'influence des travaux de M. Poincaré et de M. Picard. En rassemblant, sous une forme systématique, les résultats les plus généraux qu'on ait obtenus jusqu'ici dans cette voie, le Traité de M. Picard donnera à ce mode de recherches une nouvelle impulsion : on ne saurait trop s'en féliciter.

Trois Chapitres (Chapitres V, VI et VII) sont d'abord consacrés aux travaux bien connus de l'Auteur sur les équations réelles du second ordre dont l'intégrale est définie par ses valeurs pour deux valeurs numériques de la variable. De telles conditions aux limites [tout à fait distinctes de celles où l'on se donne, pour $x = x_0$, les valeurs des y et des $\frac{dy}{dx}$] se rencontrent dans une foule de problèmes naturels : l'exemple le plus simple est celui des géodésiques d'une surface passant par deux points donnés. L'Auteur indique d'abord des restrictions (très larges, d'ailleurs) moyennant lesquelles de telles conditions aux limites définissent une intégrale et une seule : cette intégrale peut être alors calculée

par la méthode d'approximations successives de M. Picard. La discussion de cette intégrale entraîne, pour une classe étendue d'équations du second ordre, l'existence de solutions périodiques. Mais c'est surtout aux équations de la forme

$$(E) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + A(x)y = 0$$

que s'attache l'Auteur et dont il effectue une étude complète. Un des résultats les plus importants qu'il obtient concerne les équations (E) où $A(x)$ dépend linéairement d'un paramètre k: il existe alors une infinité *discontinue* de valeurs de k pour lesquelles l'équation (E) admet une intégrale $y(x)$, différente de $y \equiv 0$, et qui s'annule pour $x = a$ et $x = b$. Cette particularité bien remarquable, établie dans le Chapitre VI *en toute rigueur*, se représente sous une forme plus compliquée dans la théorie de certaines équations aux dérivées partielles qu'introduit la Physique mathématique, notamment dans la théorie des sons propres à un espace donné. L'élégance et la netteté des méthodes font d'ailleurs, de cette partie de l'Ouvrage, une des plus attrayantes, et les idées qu'elle renferme prêtent à maint développement fécond.

Les trois Chapitres suivants (Chapitres VIII, IX, X) traitent de la théorie des intégrales *réelles*, d'après M. Poincaré. L'existence et les propriétés des solutions périodiques, des solutions asymptotiques, l'étude des courbes réelles définies par un système différentiel : voilà les principaux objets de cette théorie. Les tra-

[redacted]

Chapitre consacré aux solutions périodiques et aux solutions asymptotiques est d'une remarquable simplicité. L'application au problème des trois corps s'y trouve indiquée dans ses grandes lignes. Les solutions périodiques de l'espèce de celles qui se présentent dans le voisinage d'une position d'équilibre d'un système matériel y font l'objet d'une discussion aussi élégante que précise.

Les points singuliers des équations différentielles du premier ordre et du premier degré

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

(cols, nœuds, foyers, centres) sont étudiés en détail (Chapitre IX), dans le cas le plus général : j'entends dans le cas où les deux courbes $P = 0$, $Q = 0$ n'ont au point considéré qu'un point commun. L'auteur complète notamment les résultats de M. Poincaré relatifs aux *cols*, en montrant que par un col ne passent que deux courbes intégrales réelles. Pour ce qui est des équations du premier ordre de degré supérieur, l'Auteur, après quelques indications générales, examine à fond, par une méthode qui lui appartient, les équations du second degré

$$A(x, y)y'^2 + B(x, y)y' + C(x, y) = 0,$$

dans le voisinage d'un point commun simple aux courbes $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ Cette discussion trouve une application naturelle dans l'étude des lignes de courbure d'une surface au voisinage d'un ombilic.

En ce qui concerne la *forme* des courbes réelles que définit un système différentiel, M. Picard se limite exclusivement (Chapitre X) aux équations du premier ordre et du premier degré. C'est là un cas très élémentaire, sans doute, mais qui permet d'introduire simplement les notions fondamentales de *cycle*, d'*indice de cycle*, de *cycle limite*, etc., et qui met nettement en évidence le sens et la portée de ces notions. Si cet exposé est loin d'embrasser tous les résultats déjà acquis à la Science en ces matières, sa lecture permettra, du moins, d'aborder sans effort l'étude des Mémoires originaux de M. Poincaré.

Signalons enfin les quelques pages du Chapitre X (p. 243-248) qui traitent de la représentation des intégrales, à l'aide d'un para-

mètre, dans tout leur domaine réel, et la belle application faite par l'auteur au mouvement le plus général du corps solide.

La théorie analytique des équations différentielles occupe à peu près la moitié de l'Ouvrage. Un Chapitre est consacré aux équations de Briot et Bouquet [équations $F(y', y) = 0$ dont l'intégrale est uniforme], à une généralisation de ces équations indiquée par M. Picard $\left[\text{équation } F\left(\frac{y''}{y'^2}, y\right) = 0 \text{ dont l'intégrale est uniforme}\right]$, enfin aux équations du premier ordre à points critiques fixes, d'après MM. Fuchs et Poincaré. Mais c'est la théorie des équations différentielles *linéaires* qui occupe toute la fin de l'Ouvrage. Il est inutile d'insister sur l'importance de cette théorie, sur les problèmes qu'elle soulève, sur les découvertes qu'elle a engendrées.

Un substantiel exposé des propositions fondamentales, aujourd'hui classiques, relatives à ces équations (théorèmes de M. Fuchs, intégrales régulières, intégrales irrégulières, groupe d'une équation linéaire), est suivi d'une application aux fonctions hypergéométriques et au problème de Riemann (Chapitre XII). En étudiant l'inversion du quotient de deux intégrales de l'équation différentielle hypergéométrique, l'Auteur se trouve conduit naturellement (Chapitre XII) aux fonctions uniformes de M. Schwarz, classe remarquable des fonctions appelées *fuchsiennes* par M. Poincaré. Les fonctions de M. Schwarz comprennent comme type le plus remarquable la fonction modulaire déjà étudiée dans un Tome précédent, mais dont les propriétés se trouvent ainsi complétées

[redacted]

séries divergentes, mais divergentes à la façon de la série de Stirling, et qui représentent *asymptotiquement* la fonction étudiée. Le Chapitre XIV résume les principaux résultats obtenus par MM. Poincaré, Thomé, Liapounoff sur les intégrales irrégulières à l'infini, et sur leur représentation asymptotique déduite de la méthode de Laplace.

Un autre Chapitre est consacré à une revision rapide des équations linéaires intégrables : équations à coefficients constants, équations à coefficients rationnels et à intégrale générale uniforme; équations à coefficients algébriques et à intégrale uniforme pour tout point d'une surface de Riemann. Quand le genre p de cette surface est égal à 1, ces équations coïncident avec la classe des équations à coefficients doublement périodiques et à intégrale uniforme, dites *équations de M. Picard*. C'est dans cette classe que rentre, ainsi qu'il est bien connu, l'équation de Lamé.

Ces types une fois étudiés, l'auteur aborde, dans sa pleine généralité, le problème de la *réduction* des équations différentielles linéaires.

La profonde analogie qui existe, au point de vue de l'irréductibilité, entre les équations algébriques et les équations linéaires, a été depuis longtemps mise en évidence par M. Picard, et c'est cette analogie qui a servi de point de départ aux brillantes recherches de M. Vessiot sur l'intégrabilité des équations linéaires. La puissance de la doctrine créée par le génie de Galois n'est pas limitée, en effet, aux seules questions d'*Algèbre arithmétique;* elle domine tous les problèmes du *continu transcendant* où apparaît l'idée de groupe. C'est aux équations linéaires (à une variable) que cette doctrine a été étendue tout d'abord; mais cette première extension, par ce fait qu'elle mettait en évidence la portée abstraite des principes de Galois, devait en entraîner d'autres. C'est ainsi que la théorie de la réductibilité des équations linéaires *aux dérivées partielles* du premier ordre (homogènes ou non) a été fondée récemment par M. Drach et par M. Vessiot.

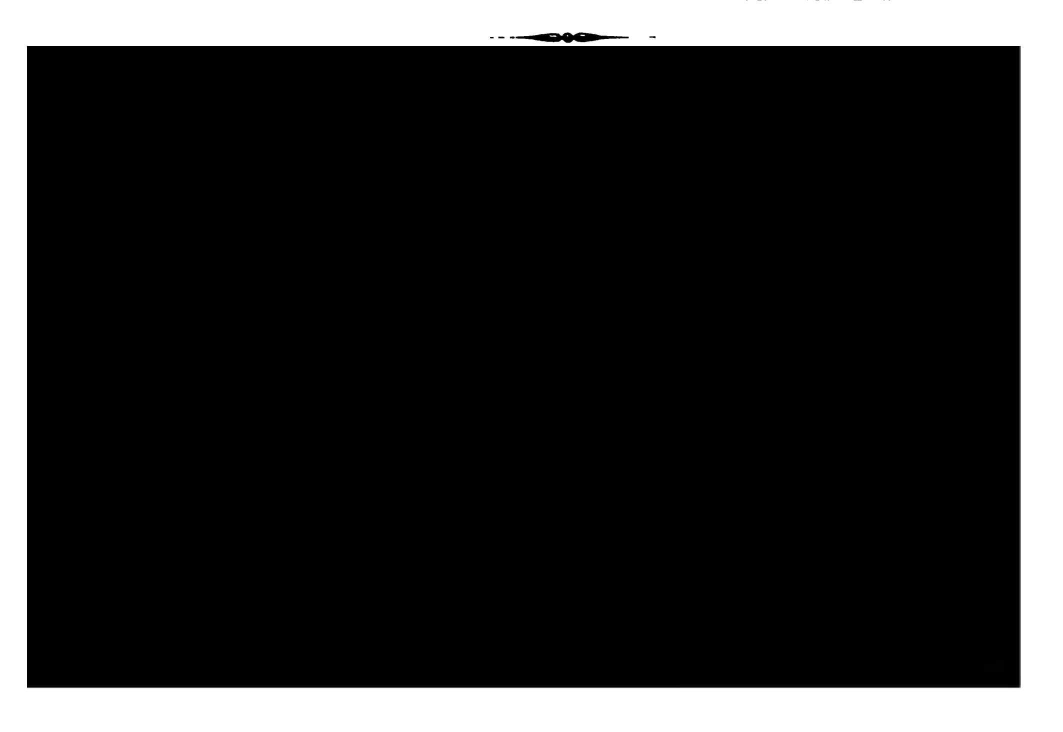
Dans son exposition, M. Picard consacre deux Chapitres parallèles à la théorie algébrique de Galois, et à la théorie de la réductibilité des équations différentielles linéaires. Ces deux Chapitres font ressortir, avec une rare netteté, la parfaite symétrie des deux théories, et laissent prévoir les généralisations possibles. Les no-

tions de groupe d'une équation algébrique et de groupe de transformations d'une équation linéaire sont introduites d'une manière identique. Après une brève digression sur la notion de réductibilité d'une équation différentielle, telle que la définissent M. Frobenius et M. Kœnigsberger, l'Auteur donne de la réductibilité et l'irréductibilité d'une équation linéaire une définition précise, où le groupe de transformations joue le même rôle que le groupe de Galois pour les équations algébriques.

Comme application, l'Auteur étudie notamment les équations du troisième ordre dont trois intégrales sont liées par une relation algébrique homogène, et retrouve, d'une façon particulièrement élégante, les importants résultats de M. Fuchs. Enfin la discussion de la réductibilité du groupe de transformations conduit aux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation linéaire soit intégrable par quadratures. C'est sur ce beau résultat, dû à M. Vessiot, que se ferme l'Ouvrage.

Par l'étude de ce Livre, le lecteur se trouve conduit, sur bien des points divers, aux confins mêmes de la Science analytique, et cela sans avoir conscience de l'effort accompli, tant les chemins suivis lui semblent aisés et naturels. Possédant en même temps toutes les ressources indispensables, il ne lui reste plus qu'à s'efforcer d'aller plus loin dans la direction qui le tente le plus. Le Traité de M. Picard a déjà provoqué bien des recherches nouvelles. Cette influence ne fera que grandir.

PAUL PAINLEVÉ.



vrage, les qualités par lesquelles il se distinguait des Ouvrages de même nature qui, chaque jour, sont publiés dans les différents pays. Ces qualités subsistent dans la traduction qui, à bien des égards, peut être considérée comme une nouvelle édition dans laquelle bien des points de détail ont été améliorés, bien des indications utiles et précieuses ont été fournies au lecteur. L'exposition n'est pas toujours complète; il ne s'agit pas ici d'un traité complet, mais plutôt d'une introduction à l'étude des Mémoires et des Ouvrages approfondis, mais chacun pourra tirer profit de l'étude et de la lecture des différents Chapitres. Nous signalerons en particulier les suppléments consacrés respectivement à la Logique mathématique, aux définitions de l'Arithmétique, à la formule de Taylor, à la définition de l'intégrale et aux nombres complexes. De nombreuses indications historiques et bibliographiques sont aussi fournies sur tous les points essentiels.

R.-O. BESTHORN et J.-L. HEIBERG. — CODEX LEIDENSIS 399,1. EUCLIDIS ELEMENTA EX INTERPRETATIONE AL-HADSCHSCHASCHII CUM COMMENTARIIS AL-NARIZII. Partis I Fasciculus II. Copenhague, F. Hegel et fils, 1897.

MAXIMILIAN CURTZE. — EUCLIDIS OPERA OMNIA. SUPPLEMENTUM. ANARITII IN DECEM PRIORES LIBROS ELEMENTORUM EUCLIDIS COMMENTARII, ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata. In-16. xxx-390 p. Leipzig, Teubner, 1899.

Dans le numéro de décembre 1893 de ce *Bulletin*, j'ai signalé l'intérêt qui s'attache à la publication, entreprise par MM. Besthorn et Heiberg, du texte arabe (avec traduction latine) de ce manuscrit de Leyde sur lequel j'avais ici même, en mai 1887 (1), appelé l'attention, et qui renferme, avec la plus ancienne version arabe d'Euclide (celle d'el Hajjàj-ben-Yusuf-Matar), un commentaire d'Aboul-Abbas-el-Fadl-ben-Hàtim-an-Nirizi (2), en grande

(1) *Voir* aussi ma *Géométrie grecque*, p. 165-178. Paris, Gauthier-Villars, 1887.

(2) Je transcris *Nirizi*, et non *Narizi* (le manuscrit ne portant d'ailleurs aucun signe de voyelle), parce que ce nom désigne notre commentateur comme originaire de la ville de *Niriz* en Perse (dans la partie occidentale du Kerman). Il vivait à la fin du IXe siècle de notre ère.

partie puisé à des sources grecques. Cette publication suit son cours, malheureusement un peu lent. Le deuxième fascicule (p. 89-191) termine le premier Livre des Éléments. Le manuscrit s'arrête après le sixième Livre.

Entre temps, l'infatigable Maximilian Curtze a eu la bonne fortune de découvrir à Varsovie un manuscrit latin contenant la version, faite au XIIe siècle par Gérard de Crémone, du commentaire du Nirizi (*Anaritius*), et il vient de procurer l'impression de ce texte dans un volume de la *Bibliotheca Teubneriana*, formant supplément à l'édition complète d'Euclide (Heiberg et Menge).

Les mathématiciens qui s'intéressent à l'histoire de leur Science ne sauraient témoigner trop de reconnaissance pour une publication de ce genre, qui met à leur disposition un document tout nouveau, considérable et digne d'études approfondies.

Je n'ai, pour aujourd'hui, l'intention que de signaler quelques points. Le commentaire traduit par Gérard de Crémone s'étend aux dix premiers Livres d'Euclide; c'est-à-dire qu'il comprend, de plus que le texte arabe de Leyde, les trois Livres arithmétiques et celui qui est consacré aux irrationnelles. La traduction, faite dans un latin très intelligible, paraît bien fidèle et semble avoir pour base un texte préférable à celui de Leyde. Si elle ne comprend pas la version d'Euclide par El-Hajjâj, ce qui maintient l'intérêt de la publication de MM. Besthorn et Heiberg, elle est particulièrement précieuse en ce qu'elle comble la lacune du manuscrit de Leyde, où manquent plusieurs feuillets qui contenaient la plus grande partie du commentaire sur les définitions, postulats et [redacted]



pas un commentaire de Héron séparé du texte d'Euclide, mais bien une édition d'Euclide augmentée de scholies et d'additions portant le nom de Héron. C'est à cette seconde source que le Nirizi puise pour son commentaire des propositions. Après le huitième Livre, il ne cite plus Héron, mais paraît continuer à utiliser la même édition grecque jusqu'à la seconde Partie du Livre X, où le commentaire prend un caractère nettement arabe.

L'introduction de Simplicius cite un certain nombre d'auteurs dont les noms, défigurés par les Arabes, l'ont été encore plus par Gérard de Crémone. C'est ainsi qu'on voit apparaître (dans la partie qui manque au manuscrit de Leyde) un *Herundes* ou *Heromides*, un *Aposedanius*, plus loin un *Aganis*, un *Abthiniatus*, à côté d'Archimède (*Asamithes*, *Aximithes*), Apollonius, Diodore, Ptolémée et Pappus.

Le premier de ces noms douteux rappelle assez singulièrement celui de Héron, que Gérard de Crémone transcrit sous la forme *Yrinus* (c'est lui qui a ajouté la terminaison). Des définitions du point et de la ligne qui sont attribuées à ce *Herundes* (*Heromides*), la seconde figure dans les *Definitiones* que l'on a sous le nom de Héron, la première pourrait être tirée du même opuscule (mais avec quelque peine).

Toutes deux peuvent d'ailleurs être relativement anciennes (c'est-à-dire antérieures à Héron, supposé vivre vers 100 ap. J.-C.). En résumé, la question est très obscure, et la conjecture *Heronas*, proposée sous toutes réserves par M. Curtze, ne me semble pas plus plausible qu'une autre. Je préférerais admettre qu'il peut s'agir d'un mathématicien grec inconnu jusqu'à présent et à dénommer *Hérondas*, forme authentique et de bonne époque. La même ressource n'existe pas pour mieux désigner *Abthiniatus*, qui se serait occupé de la démonstration des quatrième et cinquième postulata d'Euclide; je crois impossible de restituer avec quelque sûreté ce nom, dont la terminaison paraît latine, mais non le radical.

Dans *Aposedanius*, auquel est attribuée une définition du point qui se retrouve dans celles dites de Héron, on ne doit pas, à mon avis, hésiter à reconnaître Posidonius, le célèbre philosophe stoïcien (*cf.* Diog. Laërce, VII, 135).

Par contre, je crois que Heiberg et Curtze se sont trop hâtés

d'identifier *Aganis* avec Geminus, qui, comme on sait, est une des sources principales du commentaire de Proclus sur Euclide, et j'ai eu tort moi-même, en 1893, d'admettre cette identification. Tout d'abord, il ne me semble plus aussi clair aujourd'hui que Simplicius ait réellement compilé Proclus, quoiqu'il ait pu lui faire quelques emprunts. En second lieu, l'*Aganis* de Simplicius intervient pour la définition de l'angle et pour la démonstration du cinquième postulatum, sujets sur lesquels Proclus suit précisément d'autres sources que Geminus. Enfin Simplicius le qualifie de *philosophus*, de *socius* ou *magister noster*, ce qui indique un de ses contemporains. Que ce contemporain ait emprunté à Proclus des phrases ou des idées pouvant venir de Geminus, il ne peut y avoir à cela rien d'étonnant.

En fait, pour le postulatum des parallèles, *Aganis* a repris une idée de Posidonius, mais il a essayé de la mettre en forme, d'en déduire une démonstration régulière, et cette démonstration peut mieux faire illusion que celle de Ptolémée, à laquelle s'arrête Proclus.

Je proposerais de restituer le nom *Agapius* (¹), qui est celui d'un philosophe, disciple de Marinus, le successeur de Proclus (Suidas), et par conséquent d'un contemporain de Simplicius, un peu plus âgé que lui. Damascius fait au reste un grand éloge de cet Agapius dans toutes les branches du savoir; il l'appelle un homme « carré » comme science (*Photius*, *cod.* 242).

PAUL TANNERY.



au dernier. A cette occasion, M. Klein s'est posé cette question : « Ne serait-il pas possible de créer ce que l'on pourrait nommer un système *abrégé* de Mathématiques, adapté aux Sciences appliquées, sans que l'on ait à parcourir tout le domaine des Mathématiques abstraites », c'est-à-dire, en quelque sorte, une Mathématique simplifiée, où les équations ne seraient vraies, comme, sans doute, les mesures et les lois expérimentales, que dans certaines limites d'approximation?

La *Nomographie,* qui doit son nom, et, pour une bonne part, son existence à M. Maurice d'Ocagne, répond dans quelque mesure à la question vague, ingénieusement posée par l'illustre géomètre. Elle utilise pour cela cette imperfection de nos sens, qui a joué un rôle si heureux dans la constitution de notre connaissance de la réalité. Grâce à cette imperfection, ce qui est négligeable s'est trouvé tout d'abord et tout naturellement négligé; il a été possible de démêler quelque chose dans la complication du monde extérieur; parfois même les lois physiques ont paru revêtir une simplicité qui s'accorde admirablement avec la faiblesse de notre intelligence. Des instruments, d'abord grossiers, de moins en moins imparfaits, ont permis d'aller un peu plus loin, de déterminer progressivement quelques chiffres de plus dans les nombres qui caractérisent les phénomènes. Mais quelle Science serait possible s'il fallait s'inquiéter de l'infinité des chiffres nécessaires pour spécifier chacun de ces nombres? Les ordres de grandeur auxquels il faut s'arrêter ont été fixés naturellement par l'imperfection de nos sens et des instruments dont nous les aidons. Qu'importe si quelques physiciens ont été dupés par leurs propres recherches et ont cru à l'exactitude absolue des lois qu'ils découvraient? Cette illusion même les a soutenus et soutient encore quelques inventeurs ingénieux, et leur illusion est à peine une illusion, puisque les erreurs qu'ils commettent ne se constatent pas. Pour en revenir à la classification de M. Klein, la Nomographie, d'après M. Maurice d'Ocagne, permet de déterminer des nombres de trois chiffres, ce qui suffit d'habitude dans les arts de l'ingénieur; disons de suite que, si les trois chiffres suffisent, c'est un avantage évident que de ne pas perdre son temps aux autres. L'économie de temps est essentielle dans la pratique : on entreprendra une œuvre qui demande une année, on ne l'entreprendra

pas s'il faut un millier d'années pour la réaliser. Nous sommes à une époque où le sort d'une bataille peut tenir à la rapidité d'un calcul.

« Réduire à de simples lectures sur des Tableaux graphiques, construits une fois pour toutes, les calculs qui interviennent nécessairement dans la pratique des divers arts techniques, tel est le but que se propose la Nomographie. » Ce qui ne se distingue pas, sur ces Tableaux, est tenu pour nul, et c'est là, tout d'abord, la grosse simplification qui résulte de leur usage. Cet usage est tout naturellement indiqué quand on a à répéter un très grand nombre de fois un même calcul, dont les données restent comprises entre des limites qui ne sont pas trop espacées, et l'on sait assez que c'est là un cas très fréquent dans les arts techniques.

La possibilité de réaliser de tels Tableaux graphiques, dans quelques cas simples, est bien évidente. Si l'on a, par exemple, à résoudre par rapport à y, pour un très grand nombre de valeurs de x, une équation

$$f(x,y)=0,$$

on pourra manifestement se servir de la courbe définie en coordonnées rectangulaires par cette même équation; si le papier sur lequel elle est tracée porte un quadrillage parallèle aux axes de coordonnées, dont les lignes soient espacées, par exemple, d'un millimètre, la valeur de y qui correspond à une valeur de x se lira aisément, en faisant au besoin une interpolation à vue, qui, dit-on, permet d'évaluer assez sûrement le dixième de millimètre.
[redacted]

mand (1886). On aurait pu toutefois supposer que les recherches de cette nature étaient condamnées à rester particulières, sans aucun lien entre elles, que chaque problème donnerait lieu à une solution spéciale, plus ou moins commode ou ingénieuse, et que l'ensemble de ces problèmes et de ces solutions ne constituerait jamais qu'un recueil de recettes, non une Science ayant son développement et ses méthodes propres.

Ce n'est pas le moindre mérite de M. d'Ocagne que d'avoir constitué cette Science; que d'avoir montré la portée et la généralité de méthodes déjà connues [1]; que d'avoir permis ainsi de résoudre une infinité de nouveaux problèmes. Si l'on ajoute que, par une heureuse application du principe de dualité, il a d'un coup doublé les méthodes; qu'il est parvenu, d'un autre côté, par cette même application, à donner, de problèmes importants, une solution singulièrement plus aisée; que, au point de vue pratique, il a étudié à fond un très grand nombre de problèmes réels, de façon à en obtenir les solutions les plus satisfaisantes; que la valeur de ces solutions a été proclamée par de nombreux praticiens; que, enfin, il est parvenu à étendre les méthodes graphiques à la représentation d'équations contenant plus de trois variables; et que, par l'ampleur même qu'il a donnée à ses recherches, il a été amené à poser des problèmes mathématiques qui ont un intérêt propre, on est bien obligé de reconnaître que M. Maurice d'Ocagne, par la publication de son *Traité de Nomographie*, a rendu un incontestable service, tant aux ingénieurs qu'aux mathématiciens. La lecture de son Livre est d'ailleurs facile, attrayante par la variété des problèmes résolus, parfois amusante par l'ingéniosité des solutions, où la science du géomètre trouve à s'employer d'une façon inattendue; le livre n'est pas écrit pour de purs mathématiciens, c'est-à-dire que les méthodes générales ne sont pas placées en tête; c'est par des exemples simples que l'auteur débute; ces exemples se compliquent peu à peu; les méthodes mêmes ressortent de leur étude et sont d'ailleurs

---

[1] M. d'Ocagne signale, dans cet ordre d'idées, l'important Mémoire de M. Masson *Sur l'intégration graphique* (*Annales de l'Association des Ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Gand*; 1884), Mémoire où le principe de l'*anamorphose* est posé dans toute sa généralité.

mises en pleine lumière. C'est la marche qui convenait pour le public auquel s'adresse M. d'Ocagne; il ne faut pas oublier que son but est essentiellement pratique et que le principal intérêt de son Livre est d'être *utile*.

Cette utilité même n'est pas pour détourner les professeurs de nos lycées, qui seront certainement heureux de trouver dans le Livre de M. d'Ocagne des applications simples, à des problèmes réels, des méthodes qu'ils enseignent. Les méthodes de transformation, l'homographie en particulier, sont d'un usage courant en Nomographie; j'ai déjà parlé de l'heureux usage que l'auteur a fait du principe de dualité; je crois donc que, sans l'avoir cherché, M. d'Ocagne se trouvera avoir rendu service à l'enseignement. Par sa généralité même, l'enseignement dans les classes de Mathématiques élémentaires et de Mathématiques spéciales est essentiellement théorique; mais les maîtres même qui pensent que la théorie se suffit ont le devoir de ne pas donner à leurs élèves le dégoût de la réalité, de ne pas la faire oublier, de les y ramener quelquefois, et de leur montrer que quelques théories s'appliquent à des problèmes réels; et s'il arrive qu'un élève, qui n'est pas encore « enivré par l'absorption du lotus mathématique », qui a gardé le souci de ce monde extérieur où il rêve de faire quelque chose, s'intéresse à une théorie par cela même qu'elle peut être utile, son maître ne manquera pas de s'en réjouir.

Le Livre de M. d'Ocagne, par sa nature même, comporte un très grand nombre de figures : il était nécessaire, pour l'intelligence du texte et pour convaincre le lecteur de la valeur pratique [redacted]

qu'on peut, si l'on veut, supposer mises sous la forme

$$x = \varphi(\alpha_1), \quad x = \varphi(\alpha_2);$$

imaginons que, sur un axe, on porte des longueurs égales à $\varphi(\alpha_1)$, en inscrivant, à l'extrémité de chaque longueur, la valeur correspondante de α_1; cela, bien entendu, ne pourra être réalisé que pour un nombre fini de valeurs de α_1, valeurs que l'on pourra supposer en progression arithmétique; on obtiendra ainsi une échelle *cotée* de la fonction $\varphi(\alpha_1)$, entre certaines limites; cette fonction sera représentée par cette échelle : une interpolation à vue permettra d'en estimer la valeur pour les valeurs de α_1 autres que les termes de la progresssion adoptée; que l'on fasse la même chose pour la fonction $\varphi(\alpha_2)$. En accolant les deux échelles, on lira sur chaque échelle les valeurs de α_1, α_2 qui se correspondent par l'équation $f(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, et l'on aura ainsi une méthode pour la résolution de cette équation, par rapport à l'une des variables, quand on se donne l'autre; ou, si l'on veut, une représentation graphique de cette équation à deux variables.

Considérons maintenant une équation à trois variables

$$(1) \qquad f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0;$$

elle pourra être regardée comme obtenue par l'élimination de x, y entre trois équations telles que

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y, \alpha_1) = 0, \\ \psi(x, y, \alpha_2) = 0, \\ \theta(x, y, \alpha_3) = 0; \end{cases}$$

Supposons, par exemple, que, en donnant à α_1 une suite de valeurs en progression géométrique très rapprochées, on construise les courbes définies par la première équation, en inscrivant sur chaque courbe la valeur de α_1 correspondante, puis que l'on fasse la même chose pour les courbes définies par la seconde et la troisième équation; on aura ainsi un *abaque à entrecroisement,* formé de trois faisceaux de courbes, qui permettra la résolution de l'équation

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

par rapport à l'une des variables α_1, α_2, α_3 quand on connaîtra les

deux autres. Si l'on se donne, par exemple, les valeurs de α_1, α_2, on suivra les courbes du premier et du second faisceau dont les *cotes* respectives sont α_1, α_2 jusqu'à leur point d'intersection; la cote α_3 de la courbe du troisième faisceau qui passe par ce point sera la valeur cherchée de α_3 : inutile d'insister sur le rôle que devra encore jouer ici l'interpolation à vue.

Le graphique ainsi construit sera naturellement d'autant plus commode que les courbes qui le constituent seront plus simples, tout sera pour le mieux s'il est composé de droites, c'est-à-dire si les trois équations entre x, y sont de la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} x\varphi_1(\alpha_1)+y\varphi_2(\alpha_1)+\varphi_3(\alpha_1)=0,\\ x\psi_1(\alpha_2)+y\psi_2(\alpha_2)+\psi_3(\alpha_2)=0,\\ x\theta_1(\alpha_3)+y\theta_2(\alpha_3)+\theta_3(\alpha_3)=0,\end{cases}$$

ou encore si la fonction $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ peut se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha_1) & \varphi_2(\alpha_1) & \varphi_3(\alpha_1)\\ \psi_1(\alpha_2) & \psi_2(\alpha_2) & \psi_3(\alpha_2)\\ \theta_1(\alpha_3) & \theta_2(\alpha_3) & \theta_3(\alpha_3)\end{vmatrix};$$

telle est l'origine d'un problème mathématique qui a été signalé ici même (1), et traité par M. Duporcq. Si la fonction

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

peut se mettre sous la forme du précédent déterminant, l'abaque sera composé de droites. Naturellement on devra faire sur les variables α_1, α_2, α_3, d'une part, sur les coordonnées x, y, de l'autre,

[redacted]

Les *abaques hexagonaux* de M. Lallemand, où les trois systèmes de courbes sont formés de droites respectivement parallèles aux côtés d'un triangle équilatéral, appartiennent au type dont j'ai essayé de donner l'idée générale et cette idée générale elle-même est due à M. Massau.

J'ai supposé, dans ce qui précède, que les coordonnées x, y étaient des coordonnées cartésiennes; il est clair que cette supposition n'a rien d'essentiel, et que l'on construit aussi bien des abaques analogues avec d'autres systèmes de coordonnées.

Au lieu de regarder les coordonnées x, y comme des coordonnées ponctuelles, M. d'Ocagne a eu l'idée de les regarder comme des coordonnées tangentielles. Alors, en restant au point de vue général, si les trois faisceaux (2) étaient construits, la résolution de l'équation (1), par rapport à la variable α_3, par exemple, s'opérera comme il suit : considérant les deux courbes des deux premiers faisceaux dont les cotes sont α_1, α_2, et l une tangente commune, on devra chercher quelle est celle des courbes du troisième faisceau qui est tangente à cette droite. Le procédé sera surtout pratique si les équations (2) peuvent être mises sous la forme (3), car alors les trois faisceaux de courbes se réduiront à trois suites de points figurées chacune sur une courbe, et pour résoudre l'équation (1) par rapport à α_3 on aura à faire passer une droite par les points de cotes α_1, α_2, figurés respectivement sur les deux premières courbes, et à chercher la cote du point α_3 où la troisième courbe est rencontrée par cette droite. On aura ce que M. d'Ocagne appelle un *abaque à alignement*, et l'on conçoit que dans bien des cas son usage sera plus commode que celui de l'*abaque à entrecroisement* qui lui correspondrait par dualité. L'Auteur étudie d'ailleurs, avec détails, le système de coordonnées tangentielles (*coordonnées parallèles*) qui lui paraît le mieux approprié à son but.

Cette méthode se généralise d'ailleurs très naturellement : au lieu des équations (3, considérons les équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &x\varphi_1(\alpha_1, \beta_1) + y\varphi_2(\alpha_1, \beta_1) + \varphi_3(\alpha_1, \beta_1) = 0,\\ &x\psi_1(\alpha_2, \beta_2) + y\psi_2(\alpha_2, \beta_2) + \psi_3(\alpha_2, \beta_2) = 0,\\ &x\theta_1(\alpha_3, \beta_3) + y\theta_2(\alpha_3, \beta_3) + \theta_3(\alpha_3, \beta_3) = 0,\end{aligned}\right.$$

où x, y désignent encore des coordonnées tangentielles; la pre-

mière de ces équations, par exemple, quand on se donne α_1, β_1, définit un point; ce point décrit une courbe quand on laisse fixe l'un des paramètres α_1, β_1, et qu'on fait varier l'autre; on peut dire que chacune des équations (4) définit deux faisceaux ou un réseau de courbes. Si ces trois réseaux peuvent être tracés sur un plan de manière à pouvoir être distingués, le graphique ainsi construit constituera une représentation de l'équation à six variables

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha_1, \beta_1) & \varphi_2(\alpha_1, \beta_1) & \varphi_3(\alpha_1, \beta_1) \\ \psi_1(\alpha_2, \beta_2) & \psi_2(\alpha_2, \beta_2) & \psi_3(\alpha_2, \beta_2) \\ \theta_1(\alpha_3, \beta_3) & \theta_2(\alpha_3, \beta_3) & \theta_3(\alpha_3, \beta_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on se donne cinq de ces variables α_1, β_1, α_2, β_2, α_3 par exemple; on obtiendra β_3 en joignant par une droite les points (α_1, β_1), (α_2, β_2) du premier et du second réseau, prenant l'intersection de cette droite avec la courbe cotée α_3 dans le premier faisceau du troisième réseau et cherchant la cote β_3 de la courbe du second faisceau de ce même réseau qui passe par le point d'intersection.

Il est clair qu'on pourra obtenir de la même façon les représentations d'équations à quatre ou cinq variables, d'une forme pareille à la précédente (¹).

En général, quand n dépasse 3, les méthodes de la Nomographie ne permettent pas la représentation d'une équation générale à n variables. Il est nécessaire que cette équation affecte certaines formes spéciales qui, d'ailleurs, paraissent embrasser la plupart [redacted]



tions à un nombre quelconque de variables. Une notation ingénieuse lui permet de donner une forme condensée à chaque type d'abaque donné. La détermination de tous les types d'abaque qui correspondent à un nombre donné de variables conduit à poser un curieux problème de partition.

En appliquant la théorie générale aux équations à deux, trois et quatre variables on voit, en quelque sorte, se rattacher aux types généraux les types particuliers examinés dans le corps de l'Ouvrage. Inversement, il est intéressant, un type d'abaque étant donné, de rechercher quels types d'équations il permet de représenter; il est utile de reconnaître analytiquement comment une équation donnée se rattache à tel ou tel de ces types, au moins dans les cas les plus usuels; les problèmes de cette nature ont été l'objet de recherches dues à MM. de Saint-Robert, Massau, Lecornu, Duporcq, Koenigs, recherches que l'Auteur résume.

Il a fait, avec un soin tout particulier, l'étude algébrique des équations qui peuvent être représentées par trois systèmes linéaires de points alignés. La discussion, qui comporte des artifices de calcul intéressants, est très approfondie. Il en est de même de l'étude de la représentation des équations quadratiques au moyen de droites et de cercles entrecroisés.

Le résumé des principes généraux que je viens d'essayer, d'après l'Auteur, ne peut donner l'idée des difficultés que comportent les exemples particuliers, ni de la manière dont elles peuvent être levées; c'est une étude qu'il faut faire dans le Livre de M. d'Ocagne lui-même : les exemples, traités dans les moindres détails, véritablement réalisés, y abondent; la liste en serait trop longue. Je me contenterai de signaler le calcul par abaques des remblais et déblais, où il semble bien que la question soit épuisée.

J'ai déjà dit que M. d'Ocagne, dans l'exposition, procédait du simple au complexe, de l'exemple à la méthode, tout en ayant soin de mettre celle-ci dans une pleine clarté.

Son Livre débute par une étude approfondie des échelles de fonctions : l'Auteur passe ensuite aux abaques d'équations à deux variables, aux méthodes de représentation des équations à trois variables par les abaques à entrecroisement. Ces matières remplissent les deux premiers Chapitres. Le troisième est consacré à la substitution des coordonnées tangentielles aux coordonnées ponctuelles;

le suivant, à la représentation de deux équations simultanées entre quatre variables au moyen d'abaques indépendants accouplés ou superposés; on trouvera dans le cinquième Chapitre de nombreux exemples concernant la représentation d'équations à plus de trois variables. Enfin, le dernier Chapitre, particulièrement intéressant pour les mathématiciens, est consacré aux généralités, à la classification des méthodes, à l'étude des problèmes d'Analyse que pose la Nomographie. J. T.

MÉLANGES.

SUR L'ÉTAT DE LA PUBLICATION DES ŒUVRES DE GAUSS;

DEUXIÈME COMPTE RENDU (1);

PAR M. FÉLIX KLEIN.

Göttinger Nachrichten, 1899.

Traduit avec l'autorisation de l'auteur par L. LAUGEL.

Pendant l'année qui s'est écoulée, *l'acquisition de nouveaux documents et l'examen approfondi des manuscrits posthumes ainsi que de la bibliothèque de Gauss* permettent de considérer

[redacted]

2. Les originaux de deux lettres de Gauss (à Sophie Germain et à Rudolf Wagner), provenant de la vente de la collection d'autographes du prince Boncompagni à Rome.

II. *Par donation :*

1. Huit liasses de documents relatifs à la triangulation du Hanovre (observations, tracés et coordonnées) ainsi que les originaux des comptes rendus s'y rapportant, adressés par Gauss au Ministre du royaume de Hanovre.

Dón de la Commission royale prussienne des Cartes de l'État-Major général.

2. Vingt et une lettres de Gauss à Wilhelm Weber, et une lettre de Gauss à Humboldt (relative à Weber et à des questions se rapportant au Magnétisme terrestre), ainsi qu'une série de notes sur feuilles volantes.

Don de M. Heinrich Weber, professeur de Physique à Brunswick.

3. Un cahier renfermant la rédaction de trois cours de Gauss sur la théorie du Magnétisme terrestre, la Géodésie et la méthode des moindres carrés; puis un cahier renfermant la rédaction d'un cours de Gauss intitulé : *Théorie des quantités imaginaires,* ainsi qu'un cours de Stern sur les intégrales définies.

Dons des directeurs du Séminaire mathématique de l'Université de Halle. Ces cahiers font partie des papiers laissés par E. Heine.

4. Copies des lettres connues jusqu'à ce jour de Gauss à Sophie Germain, ainsi que de quelques autres lettres. Quelques travaux préliminaires de Schering relatifs à l'impression des volumes projetés, en particulier relativement à la *Theoria motus*.

Don de M[me] Schering.

5. 242 lettres de Gerling à Gauss et quelques lettres des enfants de Gauss à Gerling.

Don de M[me] Rothe de Cassel.

6. Copie d'une lettre de Gauss à Grassmann.

Don de M. le professeur Engel de Leipzig.

7. Copies de deux lettres de Gauss, l'une à Schumacher, l'autre à un inconnu.

Don de M. le professeur Stäckel de Kiel.

8. Copie d'une lettre de Gauss au R. P. Koller.

Don de M. le professeur Schwab de Kremsmünster.

9. Un autographe de Gauss (relatif au jeu d'échecs).

Don de Mme Listing de Hannover.

III. *Par cession temporaire :*

1. Journal de Gauss relatif à ses découvertes scientifiques (de 1796 à 1800, avec une longue interruption jusqu'à 1814).

Enfin un cahier de notes de Gauss et une série de feuilles volantes.

Prêtés par M. Gauss de Hameln (petit-fils de Gauss).

2. Manuscrits originaux des mémoires suivants de Gauss :

Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novæ, 1817.

Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si ejus massa per totam orbitam... esset dispertita, 1818.

[redacted]

6. Lettres de Gauss à Kestner.

Prêtées par M. le professeur Engel de Leipzig au nom de la bibliothèque de l'Université.

7. Une lettre de Gauss à Scherck.

Prêtée par M. le professeur Study de Greiswald.

8. Copies de deux lettres de Gauss à Olbers. (Les originaux se trouvent à Pulkowa.)

Prêtées par M. le Dr Schilling, directeur de l'École navale à Bremen.

9. Rédaction d'un cours de Gauss intitulé : *Calculs géodésiques*, avec une série de notes.

Prêté par Mme Listing de Hannover.

10. Copies de lettres de Encke à Olbers, de Bessel à Repsold et autres; trois lettres d'Olbers à Argelander. Rédaction d'un cours de Gauss : *Astronomie théorique*.

Le tout provenant des papiers de Winnecke, prêté par le professeur Wislicenus, de Strasbourg, au nom de Mme Winnecke.

11. Un cahier intitulé : *Travaux de C.-F. Gauss*, provenant des papiers de Wilhelm Weber, ne faisant mention, en somme, que de ce qui a été déjà imprimé.

Prêté par M. le professeur Jacobj de Göttingue.

Nous avons encore reçu les dons suivants que nous pouvons ranger sous le titre de *Gaussiana* :

1. Don du professeur Fricke, au nom de l'École supérieure technique de Brunswick et à instigation de la librairie Calvör de Göttingue :

Une série de comptes rendus et d'articles de journaux relatifs au monument de Gauss à Brunswick et à la bourse fondée à Brunswick sous le nom de Gauss (années 1877 et 1878).

2. Don du professeur Engel de Leipzig :

Nicolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. Deux mémoires de Géo-

métrie traduits du russe, avec des notes et une biographie de l'auteur, par F. Engel. Leipzig, 1898. (*Voir* Nachwort, pages 475-476.)

3. Don du professeur Lindemann de Munich :

Éloge de Seidel. (*Extrait des Travaux de l'Académie de Munich.*)

4. Don de Mme Schering :

Intorno ad una lettera di Gauss ad Olbers, par Boncompagni; exemplaire de feu M. le professeur Schering.

5. Don de la librairie Springer de Berlin ainsi que de M. Schilling, directeur de l'École navale de Bremen, éditeur de l'Ouvrage ci-dessous.

Épreuves imprimées jusqu'ici de la *Correspondance de Gauss et d'Olbers*. Il a été imprimé jusqu'ici 18 feuilles ainsi que 8 feuilles du Tome supplémentaire, qui renferme les observations d'Olbers revues par M. le professeur Schur.

Parmi tous ces documents, le plus intéressant sans aucune comparaison au point de vue scientifique est celui inscrit ici sous le titre III, 1 : *Le journal quotidien de Gauss*, que nous devons à M. le professeur Paul Stäckel.

[redacted]

» Theoriam quantitatum transcendentium

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha xx)(1-\beta xx)}}$$

ad summam universalitatem perduximus.

Brunsv. Mai 6. »

« Incrementum ingens hujus theoriæ invenire contigit, per quod simul omnia præcedentia nec non theoria mediorum arithmetico-geometricorum pulcherrime nectuntur infinitiesque augentur. Brunsv. Mai 22. ».

« Nov. 30. Felix fuit dies quo multitudinem classium formarum binariarum per triplicem methodum assignare largitum est nobis, puta : 1° per producta infinita, 2° per aggregatum infinitum, 3° per aggregatum finitum cotangentium seu logarithmorum sinuum. Brunsv. »

Les années suivantes, malheureusement, cette liste présente de nombreuses lacunes; elle prend fin en 1813 et 1814 par deux notes sur les résidus biquadratiques que nous reproduisons ici :

« Fundamentum theoriæ residuorum biquadraticorum *generalis*, per septem propemodum annos summa contentione sed semper frustra quæsitum tandem feliciter deteximus eodem die quo filius nobis natus est. 1813, oct. 23. Gott. »

« Subtilissimum hoc est omnium eorum quæ unquam perfecimus. Vix itaque operæ pretium est, his intermiscere mentionem quarundam simplificationum ad calculum orbitarum parabolicarum pertinentium.

» Observatio per inductionem facta gravissima theoriam residuorum biquadraticorum cum functionibus lemniscaticis elegantissime nectens. Puta si $a+bi$ est numerus primus, $a-1+bi$ per $2+2i$ divisibilis, multitudo omnium solutionum congruentiæ $1=xx+yy+xxyy$ (mod. $a+bi$), inclusis $x=\infty$ $y=\pm i$, $x=\pm i$, $y=\infty$ fit $=(a-1)^2+bb$.

1814, jul. 9. »

Je termine en ajoutant quelques mots touchant les travaux de rédaction.

Quant à la première Partie du Tome VIII, les manuscrits relatifs à l'Arithmétique et à l'Analyse (Fricke), au Calcul numérique et au Calcul des probabilités (Börsch et Krüger), sont complètement prêts et celui relatif à la Géométrie (Stäckel) le sera dans très peu de temps.

Quant à la seconde Partie du Tome VIII, le manuscrit relatif à la Géodésie (Börsch et Krüger) est pour ainsi dire prêt.

Quant au Tome VII (Astronomie, Brendel), il n'a pu encore être procédé qu'à un travail superficiel.

L'impression du Tome VIII est commencée et sera continuée maintenant régulièrement.



COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FRANÇOIS DERUYTS, Docteur ès Sciences physiques et mathématiques, Assistant à la Faculté des Sciences de Liége, etc. — MÉMOIRE SUR LA THÉORIE DE L'INVOLUTION ET DE L'HOMOGRAPHIE UNICURSALE. Un volume in-8° de 208 pages. Bruxelles, F. Hayez, 1891.

Le but de ce Mémoire, qui a été couronné au concours universitaire de Belgique en 1890, est d'établir, d'après une méthode uniforme, la théorie de l'*involution* et de l'*homographie* unicursale. Outre les résultats obtenus antérieurement par les Géomètres, l'auteur a exposé la solution de plusieurs questions nouvelles. Diverses applications ont été introduites en vue de l'intérêt que la théorie présente pour la Géométrie des espaces.

Une involution I^n_{n-1}, d'ordre n et de rang n — 1, est un ensemble, n — 1 fois infini, de groupes de n éléments semblables de première espèce, tel qu'un quelconque de ces groupes est déterminé, sans ambiguïté, par n — 1 de ses éléments, quels que soient ceux-ci.

Une involution I^n_k, d'ordre n et de rang k, est l'ensemble, k fois infini, des groupes communs à n — k involutions I^n_{n-1}.

Une involution I^n_{n-1} est représentée analytiquement par l'égalité à zéro d'une forme n linéaire symétrique

$$a_{x1}a_{x2}\ldots a_{xn} = 0. \tag{1}$$

Une involution I^n_k est représentée par $n - k$ équations analogues.

La base de la méthode employée pour étudier les involutions est l'interprétation géométrique suivante : L'équation (1) d'une I^n_{n-1} contient n coefficients indépendants : ces coefficients peuvent être considérés comme étant les coordonnées d'un point A de l'espace à n dimensions, ou comme étant les coordonnées tangentielles d'un espace E_{n-1} à $n - 1$ dimensions situé dans E_n.

Le point A est le *point principal* de I^n_{n-1} et E_{n-1} est l'espace complémentaire de I^n_{n-1}, représentée dans l'espace E_n.

On est conduit aux théorèmes suivants qui sont corrélatifs :

1° *Le lieu des points principaux des* I^n_{n-1} ***décomposables est la courbe normale*** C_n *de* E_n.

2° *Les espaces complémentaires des* I^n_{n-1} ***sont les espaces osculateurs de la courbe normale*** C_n *de* E_n.

De là, on est amené à la conclusion suivante :

Les espaces à $n-1$ *dimensions, qui passent par le point principal d'une* I^n_{n-1}, *marquent sur* C_n *des groupes de n points, dont les paramètres vérifient l'équation* (1) : ces groupes de points sont donc les *images* des groupes de l'involution.

Une involution I^n_k sera représentée par la jonction des $n-k$ points principaux des $n-k$ involutions I^n_{n-1} dont elle est la résultante; cette jonction est un espace à $n-k-1$ dimensions, E_{n-k-1}, *espace principal* de I^n_k.

De même, l'*espace complémentaire* de I^n_k sera un espace à k dimensions, E_k.

Tous les espaces à $n-1$ dimensions qui passent par E_{n-k-1} marquent sur la courbe C_n des groupes de n points, qui sont les images des groupes de I^n_k : en interprétant analytiquement ce résultat, on est conduit, sans difficulté, à la seconde représentation algébrique d'une I^n_k, équivalente à l'équation,

$$\lambda_1 a1^n_x + \lambda_2 a2^n_x + \ldots + \lambda_{\overline{k+1}} \overline{ak+1}^n_x = 0$$

d'un faisceau, d'ordre k, de formes binaires d'ordre n.

L'auteur indique un système, plus général, permettant de représenter les groupes d'une I^n_k sur la courbe normale, C_μ, d'un [redacted]

Ces conditions se résument en la suivante :

n involutions, d'ordres et de rangs quelconques, ne peuvent avoir des groupes communs en nombre r fois infini que si la somme des rangs, diminuée du nombre r, est un multiple de n — 1 : le facteur de multiplicité est le nombre des éléments qui figurent dans les groupes communs.

Un grand nombre de propriétés des groupes d'éléments communs à un nombre quelconque d'involutions découle du théorème suivant :

$q+1$ involutions $I_{k_i}^{n_i}$ $(i=1, 2, 3, \ldots, q+1)$, dont la somme des rangs est un multiple μ de q, ont des groupes de μ éléments communs en nombre, $\prod_{1}^{q+1}\binom{n_i-k_i}{\mu-k_i}$.

Le Mémoire contient encore des propriétés nouvelles des involutions conjuguées, des surfaces d'involution et aussi des constructions géométriques de l'involution cubique du premier et du second rang.

Comme applications, l'auteur rappelle d'abord les belles recherches dans lesquelles M. Le Paige a appliqué les propriétés de l'involution pour construire les courbes cubiques, ainsi que les résultats obtenus par M. Weyr dans la géométrie des courbes rationnelles planes ou gauches; ces applications se trouvent étendues à la géométrie des courbes rationnelles des espaces quelconques.

Comme application analytique, la conception des éléments neutres permet de trouver immédiatement l'expression canonique des involutions I_{n-1}^{n}, quand n est impair; de plus, en étendant la notion des éléments neutres, on obtient l'expression canonique des involutions $I_{n-\varphi}^{n}$, quand $n+1$ est un multiple de $\varphi+1$: comme conséquence, on peut donner la forme *canonique* de certains systèmes de formes binaires.

Une grande partie du Mémoire est consacrée à la généralisation de l'*involution,* c'est-à-dire à l'*homographie. n figures de première espèce forment une homographie H_{n-1}^{n} d'ordre n et de rang $n-1$, quand $n-1$ éléments, pris arbitrairement*

dans $(n-1)$ *de ces figures, déterminent, sans ambiguïté, un élément de la figure restante.*

Les groupes communs à $n-k$ *homographies* H^n_{n-1} *forment une homographie* H^n_k, *d'ordre n et de rang k.*

Dans le cas de $n=2$, $k=1$, on peut considérer l'homographie comme dérivant de deux involutions de la façon suivante : *Soient deux involutions* I^2_1 *et* J^2_1; *à un élément x, il correspond, dans* I^2_1, *un élément y, et à cet élément y il correspond, dans* J^2_1, *un élément z; entre les éléments x et y il existe une relation* H^2_1.

En se servant de cette propriété, on peut construire l'homographie H^2_1 sur une conique quelconque.

La notion de la résultante de deux involutions I^2_1 peut se généraliser de la façon suivante : *Soient k involutions* ${}^{(i)}I^{(n)}_{n-1}$ $(i=1, 2, 3, \ldots, k)$ *et une involution* I^{n-1}_{k-1}; *à chacun des groupes de* $n-1$ *éléments de* I^{n-1}_{k-1} *il correspond, dans chacune des involutions* ${}^{(i)}I^n_{n-1}$ *un élément* x_i; *les k éléments* x_i *forment une* H^k_{k-1}.

L'auteur n'a pu démontrer que cette homographie fût la plus générale : il l'a démontré géométriquement dans le cas de $k=3$.

Les deux derniers Chapitres du Mémoire contiennent l'étude des propriétés des homographies quelconques : *éléments multiples, éléments multiples associés, éléments neutres et groupes communs à un nombre quelconque d'homographies quelconques.*

Par la combinaison de l'homographie H^2_1 et de l'involution I^2_1,

[redacted]

linéairement, et par points, la courbe C_n la plus générale dont on se donne $n+3$ points.

Comme application de l'homographie H_1^2 et de son extension, le *principe de correspondance de Chasles*, on trouve indiqués divers procédés pour construire certaines courbes rationnelles planes; du reste, la généralisation du procédé, employé par Chasles pour construire les cubiques planes, conduit l'auteur à la génération de certaines surfaces; pour les surfaces cubiques, on a le théorème suivant :

Les plans d'une gerbe marquent sur quatre droites fixes les sommets de quadrangles dont les points diagonaux appartiennent à trois surfaces cubiques générales.

La théorie de l'homographie quelconque conduit à généraliser le procédé, obtenu par M. Le Paige, pour construire les cubiques planes, au moyen de faisceaux de droites; par des considérations analogues, la plupart des procédés connus pour engendrer les surfaces cubiques se ramènent à l'étude des faisceaux homographiques.

BULLETIN OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, CONTINUATION OF THE NEW YORK MATHEMATICAL SOCIETY. A historical and critical Review of Mathematical Science, edited by *T.-S. Fiske, A. Ziwet, F. Morley, F.-N. Cole.* In-8°; Macmillan Co.

Nous sommes bien en retard pour parler de cette intéressante publication, qui en est à la cinquième année de sa deuxième série, ou, si l'on veut, de sa forme actuelle. Il y aurait quelque impertinence à adresser à ses savants éditeurs des souhaits, qui sont réalisés.

Quoi qu'il en soit, ce *Bulletin* est d'une lecture très attrayante, même pour les gens du vieux monde; les Mathématiques proprement dites, les comptes rendus des Congrès, les travaux des membres y tiennent la plus grande place, cela va sans dire; mais on y trouve aussi des nouvelles, des nouvelles des livres tout d'abord, des listes de publications récentes, des comptes rendus des Ouvrages importants, puis des nouvelles des cours qui se font

tant en Europe qu'en Amérique, des nominations de professeurs, des élections aux Académies, des fêtes et des deuils scientifiques. On annonce, par exemple, en janvier 1899, ces fêtes en l'honneur de l'illustre G. Stokes, où l'Université de Cambridge devait se montrer si hospitalière, et l'on imprime la liste des prédécesseurs du maître qui occupe sa chaire depuis cinquante ans : Barrow, Newton, Whiston, Sanderson, Colson, Waring, Milner, Whodhouse, Turton, Airy, Babbage, King. Les éditeurs se donnent la peine d'*aller aux nouvelles* et ne croient pas diminuer la dignité de leur Recueil, parce qu'ils y font pénétrer les faits, la vie, l'information.

Je ne sais si, dans le choix des articles purement mathématiques, ils ont cherché la variété; mais ils l'ont heureusement trouvée. Voici, dans les quelques numéros que j'ai sous les yeux, deux articles qui me semblent procéder d'une excellente idée : un rapport de M. G.-A. Miller sur les récents progrès dans la théorie des groupes d'ordre fini, un rapport de M. H.-S. White sur la théorie des invariants projectifs et les principales contributions à cette théorie, depuis dix ans. De pareils *rapports,* qui permettent d'esquisser les grandes lignes d'un sujet, qui marquent le sommet où l'on est arrivé, qui permettent d'indiquer celui qu'il faudra s'efforcer de gravir, sont très intéressants par les idées générales, les vues d'ensemble qui s'en dégagent, très profitables aussi par les renseignements, les facilités et les encouragements qu'ils apportent aux travailleurs. Voici (je cite au hasard) un travail de M. James Pierpont sur l'*Arithmetization* des Mathématiques, plusieurs

[redacted]

J'ai déjà dit que ce recueil comprenait aussi des analyses d'Ouvrages récents. Voici, par exemple, un important compte rendu de M. Lovett sur les *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes* de M. Darboux. Une traduction de la *Geometrie der Lage* de M. Th. Reye, due à M. F. Holgate, donne à M[me] Charlotte Angas Scott l'occasion d'exposer, non sans vivacité, des vues intéressantes sur les fondements de la Géométrie. Les éditeurs ne dédaignent pas les Mathématiques élémentaires : voici des articles de MM. Brown, Lovett, Young, etc., sur les *Leçons de Cosmographie* de Tisserand et Andoyer, sur le *Formulario scolastico di Matematica elementare* de M. Rossotti, sur une traduction des *Leçons élémentaires de Mathématiques* de Lagrange.... Évidemment, l'*American mathematical Society*, tout en ayant pour le but le développement de la Science, s'intéresse à l'enseignement : les écoles américaines ne peuvent qu'en profiter. J. T.

L'Enseignement mathématique. Revue internationale paraissant tous les deux mois. Directeurs : *C.-A. Laisant* et *H. Fehr*, n[os] 1, 2, 3; 15 mars, 15 mai et 15 juillet 1899.

Cette publication nouvelle, à laquelle nous tenons dès aujourd'hui à souhaiter la bienvenue, débute par un article où les directeurs de la Publication indiquent de la manière suivante à quelles préoccupations ils ont obéi en fondant la nouvelle *Revue* et quel est le but qu'ils poursuivent.

« Dans tous les pays où se cultive la Science mathématique le corps enseignant se compose à tous les degrés de professeurs profondément attachés à leur mission et qui s'y consacrent avec tout ce qu'ils ont de dévouement, d'instruction et d'intelligence. Mais presque tous en sont venus à comprendre qu'il y a, dans les moyens pédagogiques employés, des perfectionnements possibles; à l'heure où la Science a tant progressé, les programmes des diverses branches de l'enseignement appellent des réformes plus ou moins complètes; et avec cela il y a une question fondamentale dont on ne saurait méconnaître l'importance : c'est celle de la préparation du corps enseignant.

» Toutes ces transformations ne sauraient s'accomplir brusquement, ni sans de sérieuses réflexions préalables. Mais, pour procéder à une telle étude d'une façon judicieuse, la première des conditions n'est-elle pas de connaître ce qui se passe dans les autres pays, de savoir quelle est dans chacun d'eux le mode d'organisation mathématique, quels sont les programmes en vigueur, les moyens de sanction des études, etc. Or, sur toutes ces choses, on vit, il faut le reconnaître, dans une ignorance générale profonde, et il n'en peut être autrement. Malgré les relations fréquentes qui se sont établies à notre époque entre savants qui cultivent un même sujet d'étude, malgré les Congrès internationaux si brillamment inaugurés à Zurich en 1897 et dont le principe est désormais établi, le monde de l'enseignement proprement dit n'a pu s'associer jusqu'à présent à ce grand mouvement de solidarité scientifique aussi pleinement qu'il eût été désirable... Nous avons voulu, par la publication de notre *Revue,* renverser les obstacles qui s'opposent à ces communications réciproques et créer une sorte de correspondance mutuelle, continue, entre les hommes qui ont consacré leur vie à cette noble mission : l'éducation mathématique de la jeunesse.

» En vue de ce résultat notre premier soin a été de donner à la Publication périodique dont il s'agit un caractère franchement et hautement international... Chaque numéro de l'*Enseignement mathématique* contiendra en principe :

» 1° Des articles généraux; 2° des études pédagogiques; 3° une chronique et des correspondances; 4° une partie bibliogra-

[redacted]

que toutes les idées puissent se produire au grand jour ou être soumises à la discussion des hommes de science, la correspondance que nous ajoutons à notre chronique nous semble appelée à rendre de grands services. Sous cette rubrique, nous accueillerons toutes les idées, même celles auxquelles nous serions totalement opposés, en matière d'enseignement mathématique. Elles se trouveront nécessairement présentées sous une forme un peu condensée; mais cette partie de notre *Revue* sera une véritable tribune ouverte à tous sans restriction....

» Enfin la bibliographie, que nous ne voulons pas négliger, comprendra l'annonce ou l'analyse sommaire du plus grand nombre possible des publications, périodiques ou non, intéressant l'enseignement mathématique et qui seront portées à la connaissance de la Direction. »

Ces extraits du programme définissent les tendances de la nouvelle publication. Pour en donner une idée aussi exacte que possible, nous allons analyser rapidement quelques-uns des principaux travaux parus dans les trois premiers numéros.

Parmi les articles généraux, nous signalerons ceux de M. Z.-G. de Galdeano sur les Mathématiques en Espagne, où l'auteur résume en quelques pages intéressantes ce qui a été fait en Espagne dans les diverses branches mathématiques; de M. Bobynin sur l'Enseignement mathématique en Russie, où l'auteur s'attache principalement à la période antérieure à 1828; nous espérons que cette série sera continuée et complétée; il est à désirer que nous connaissions bien comment se distribue l'Enseignement mathématique dans les principaux pays.

D'autres articles de M. Fontené sur l'enseignement de la théorie des vecteurs, de M. Fehr sur l'enseignement des éléments de Trigonométrie, de M. C. Fontené sur l'emploi des signes en Géométrie, de M. Candido sur la fusion de la Planimétrie et de la Stéréométrie dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire en Italie, appartiennent à la seconde catégorie qui a été prévue par les directeurs. Ils se rapportent à l'enseignement des différentes branches des Mathématiques et sont de nature à rendre de réels services aux professeurs.

D'autres articles présentent un intérêt d'un autre ordre, histo-

rique ou philosophique : ceux, par exemple, de M. Laisant sur les questions de terminologie, de M. A. Binet sur la Pédagogie scientifique en général, de M. Laisant sur le choix des sujets de composition, de M. de Galdeano qui traite de quelques principes généraux sur l'enseignement mathématique. Un travail de M. H. Laurent intitulé · « Considérations sur l'enseignement des Mathématiques dans les classes de spéciales en France » a amené M. H. Poincaré à discuter un des points soulevés par l'auteur dans un article dont le titre : « La notation différentielle et l'enseignement » indique bien l'objet. M. Poincaré n'est pas d'avis que l'on ajoute dans l'enseignement toutes les difficultés qui résultent de l'emploi de la notation différentielle à celles qu'éprouve l'élève dans l'étude et la recherche des dérivées. Enfin M. Poincaré, dans le dernier numéro, nous donne un second article tout à fait digne d'être médité sur la logique et l'intuition dans la Science mathématique et dans l'Enseignement.

Avec de tels articles, avec le patronage d'hommes tels que MM. Appell, Bougaiev, Cantor, Cremona, Czuber, de Galdeano, Greenhill, Klein, Liguine, Mansion, Mittag-Leffler, Oltramare, Petersen, Picard, Poincaré, Schoute, Stéphanos, Teixeira, Vassilief, Ziwet, le nouveau Recueil est assuré de vivre et de trouver bon accueil dans tous les pays.


[redacted]

Géométrie analytique à l'Académie des Sciences, ils n'étaient l'un et l'autre que d'excellents élèves; s'ils avaient eu dix ans de plus, personne n'aurait remarqué leur œuvre. Les plus grands géomètres, depuis cinquante ans, commentent les découvertes de Galois. La langue mathématique est la plus parfaite et la plus simple qu'on connaisse. L'Hôpital et Clairaut ont appris presque dès l'enfance à l'écrire correctement. Pascal et Galois, pour la découvrir, ont surmonté tous les obstacles et, dès le premier jour, l'ont parlée avec perfection. L'un et l'autre ont été de ces hommes dont parle La Bruyère : « Semblables à ces étoiles extraordinaires dont on ignore les causes, ils n'ont ni aïeuls ni descendants; ils composent seuls toute leur race. »

La vie d'Évariste Galois permet de regretter, pour lui et pour la Science, qu'il n'ait pas, comme Augustin Cauchy, rencontré un Lagrange pour conseiller avec autorité, à un père capable de le comprendre, de lui rendre la voie commune assez attrayante pour qu'il consentît à la suivre. Le prodigieux enfant, tout le prouve, y aurait surpassé ses rivaux, et la Science, en s'emparant de lui quelques années plus tard, l'aurait conservé plus longtemps. L'entreprise eût été difficile. Augustin et Évariste, quoique également doués, étaient fort dissemblables. Augustin, pieux et docile enfant, respectait toutes les règles et obéissait à tous les devoirs. Évariste, nourri dans la haine des tyrans, croyait, en tourmentant les maîtres, veiller au maintien de ses droits.

Évariste Galois naquit à Bourg-la-Reine, le 25 octobre 1811. Son père était chef d'une institution florissante, fondée avant la Révolution par le grand-père d'Évariste. Sa mère, fille d'un savant jurisconsulte, avait une instruction plus solide que celle dont les programmes s'accroissent sans cesse aujourd'hui. Elle avait puisé dans les auteurs classiques, qu'elle étudiait dans leur langue, le respect du stoïcisme et l'amour des vertus antiques. M. Galois, homme de belles-lettres, spirituel et instruit, avait dû, comme maire de Bourg-la-Reine, jurer fidélité à Louis XVIII. Sa conscience le lui reprochait, et les royalistes, nombreux dans son village, l'accusaient de n'avoir juré que du bout des lèvres. Leurs calomnies troublaient sa vie; il se délivra par le suicide du délire de la persécution. Évariste avait alors dix-huit ans. Instruit par sa mère, il fut un aimable et heureux enfant. Quand, à l'âge de

douze ans, on le plaça comme interne au collège Louis-le-Grand, il pleura ces beaux jours qu'il ne revit jamais. Évariste était bien préparé à la classe de quatrième, mais les succès d'écolier ne le tentèrent pas. Ses maîtres, immédiatement, se plaignirent de lui; on le trouvait impardonnable de ne pas se placer à la tête de la classe. Il récitait ses leçons sans faute quand il avait daigné les regarder. Le nom de Galois inspire aujourd'hui le respect; la mauvaise humeur de ses maîtres paraît risible. Galois paraît affecter, s'écrie prétentieusement son professeur de rhétorique, de faire autre chose que ce qu'il faudrait. C'est dans cette intention qu'il bavarde si souvent : il proteste contre le silenee.

A l'âge de quinze ans, son professeur ne trouve pas que cet enfant, qui dans un an deviendra l'émule de Gauss et de Cauchy, ait l'esprit assez mûr pour profiter des leçons qu'il n'écoutait pas. On le renvoya dans la classe de seconde, où Saint-Marc Girardin, pour toute appréciation, déclara sa conduite passable.

L'année suivante, en rhétorique, son professeur, M. Pierrot, écrit : « Sa facilité, à laquelle il faut croire, quoique je n'en aie encore aucune preuve, ne le conduira à rien; il n'y a trace, dans ses devoirs, que de négligence et de bizarrerie. »

On va jusqu'à déclarer son originalité affectée. Qu'en savait-on? Sur un seul point, personne n'hésite et ne doute. Galois a la passion, on dit quelquefois la fureur, des Mathématiques. Son professeur de Mathématiques spéciales, sans deviner son génie, il ne faut pas demander l'impossible, lui prédit le premier rang à l'École Polytechnique, et le prix d'honneur au concours général;

[redacted]

d'honneur, comme en 1812 Michel Chasles, il n'en faut rien conclure : la composition de Galois était excellente, mais le sujet était facile, beaucoup d'autres ont pu faire aussi bien que lui. Bravais mérita le premier prix; la Commission avait bien jugé, et Poisson, chargé de proposer la question, ne l'avait aucunement mal choisie. Le concours, quoi qu'on fasse, est une loterie entre les bons élèves. Pour les meilleurs les billets sont nombreux; mais chaque concurrent en reçoit au moins un. Bravais, d'ailleurs, était un élève hors ligne qui, solidement instruit par ses maîtres, méritait mieux leurs récompenses que Galois, dont la science, beaucoup plus profonde, ne devait rien à leurs leçons.

Une légende s'est formée sur l'examen d'admission de Galois à l'École Polytechnique. M. Dupuy la rapporte. Il est mal informé. « Quel est, dit-il, l'examinateur qui n'avait pas compris Galois : Est-ce Lefébure de Fourcy ou Binet? (Il faut lire : Lefebvre ou Dinet.) La tradition veut qu'à la suite d'une discussion où l'un d'eux avait eu tort, le candidat exaspéré ait jeté le torchon à effacer la craie à la figure de l'examinateur. » La tradition est fausse. L'examinateur était Dinet. Admiré pendant plus de vingt ans comme professeur de Mathématiques, il avait eu pour élèves respectueux et reconnaissants Cauchy, Olinde Rodrigues, Duhamel, Combes et Élie de Beaumont. Homme d'esprit d'ailleurs, examinateur consciencieux et bienveillant, et, d'après l'opinion commune, celui de tous qui se trompait le moins. Son mode d'examen, excellent pour les élèves ordinaires, pouvait, dans des cas exceptionnels et très rares, l'induire à de graves erreurs. Les questions de Dinet étaient toujours très faciles. Quelquefois, par exemple, il dictait une suite de chiffres pour faire lire au candidat le nombre qu'ils représentent. Indiquant aux élèves une route unie et sans pièges, il comptait sur sa longue expérience et sur la finesse de son esprit pour juger leur savoir à l'assurance et à la fermeté de leur démarche. On sortait joyeux de son examen, certain de n'avoir fait que des réponses exactes. Les déceptions étaient nombreuses. On pouvait comparer Dinet à un maître d'armes qui, chargé de juger les candidats sur l'escrime, se serait borné à les faire tirer au mur, voulant, avant tout, apprécier la bonne tenue et le respect des principes. Les résultats ne seraient pas les mêmes, certainement, que si, les mettant en lutte deux à deux,

on les jugeait sur le nombre des coups donnés et reçus; mais on serait sans doute plus certain de découvrir ceux qui, plus tard, deviendront bons tireurs, à la condition, toutefois, qu'ils voulussent bien se prêter à l'épreuve et s'y préparer sérieusement. Le professeur de Mathématiques, telle était la maxime de Dinet, doit enseigner avant tout l'art de raisonner; la manière de démontrer a plus d'importance que les vérités que l'on démontre.

Un tel jugement semblait absurde à Galois.

La question posée par Dinet était : l'exposition de la théorie des logarithmes arithmétiques. Premier grief de Galois : il n'y a pas de *logarithmes arithmétiques;* ceux que Dinet aurait nommés *algébriques* sont exactement les mêmes. Pourquoi ne pas lui demander simplement la théorie des logarithmes? Il aurait pu, sur cette question digne de lui, étonner Dinet par sa supériorité. Il se borna, sans sortir des bornes prescrites, à dire en peu de mots ce que savaient tous les candidats. Dinet, pour faire briller l'élève supérieur qu'on lui avait annoncé, lui demanda si, dans l'adjonction de termes nouveaux dans les progressions qui servent de base à la théorie qu'il venait d'exposer, il était nécessaire d'en introduire le même nombre dans chacun des intervalles. « En aucune façon », répondit Galois. Dinet feignit d'en douter, et Galois, dans ce doute, crut voir une preuve d'ignorance; il répéta simplement, peut-être avec un impertinent dédain, la vérité, pour lui complètement évidente, dont le développement, qui lui était facile, aurait assuré sa réception.

Renonçant à l'École Polytechnique, Galois concourut pour [redacted]

qu'il m'a paru être, je doute fort qu'on en fasse jamais un bon professeur. »

Au lieu des leçons de Cauchy et d'Ampère, qu'il avait espérées à l'École Polytechnique, Galois dut suivre à la Sorbonne celles de Lacroix, et à l'École, les conférences de Leroy. Il fut mauvais élève, tout comme au collège. Supérieur à ses camarades, il croyait l'être à ses maîtres, et il avait raison, personne n'en doute aujourd'hui.

Un de ses anciens, Antoine Masson, m'a raconté qu'une Revue scientifique, apportée un jour dans l'École, donnait l'énoncé du théorème d'Algèbre par lequel Sturm est devenu célèbre. C'était un progrès apporté à une théorie classique que chacun des élèves aurait prochainement à enseigner. Ils désiraient connaître la démonstration. Leroy attendait comme eux que l'auteur la fît connaître. Galois entra dans la salle de ses anciens; on lui communiqua l'énoncé, il le fit répéter; puis, après quelques minutes de réflexion, sans prendre la plume, il alla au tableau et donna la démonstration, dont Masson, Amyot et Auguste Chevalier, qui l'ont entendue, ont gardé le souvenir.

Les Mathématiques, cependant, l'occupaient de moins en moins. Avant et après la Révolution de 1830, le drapeau rouge flottait dans ses rêves au milieu des permutations et des groupes de racines. La chute de Charles X l'avait enivré. Louis-Philippe trahissait ses serments, et tout bon citoyen devait secouer le nouveau joug. La violence de ses invectives étonnait ses camarades et inquiétait ses maîtres. Il écrivait aux journaux pour dénoncer l'esprit réactionnaire des chefs de l'École. Il fut renvoyé. Ni ses amis ni ses admirateurs ne pouvaient désirer qu'il restât.

Galois était intraitable et violent, mais désintéressé et loyal. Sa supériorité et son entière bonne foi méritaient l'indulgence. On le traita en ennemi dangereux et indigne. Ses notes de conduite étaient détestables, et la plupart de ses camarades, quoique trop médiocres pour jalouser ses talents, étaient malveillants et injustes. On a présenté son renvoi comme la juste punition d'une lettre anonyme qu'il avait écrite. L'accusation n'est pas méritée; la lettre, envoyée à un journal, était signée : *Galois, élève à l'École Normale*. Le gérant qui la publia, pour ne pas compromettre l'auteur, remplaça la signature par cette indication : « Un

lui crièrent par la fenêtre : « Eh! notre vieillard de vingt ans, vous n'avez pas seulement la force de boire, vous avez peur de la boisson! » Il monta pour marcher droit contre le danger, vida d'un trait une bouteille d'eau-de-vie, puis la jeta à la tête de l'impertinent provocateur. Il faillit en mourir.

M. Dupuy a supprimé dans le récit de Raspail quelques détails écœurants; j'en supprime moi-même dans le sien.

Galois, pour des raisons que j'ignore, passa dans une maison de santé ses dernières semaines de captivité. Il y fit connaissance avec une femme, de très mauvaise vie probablement, et à son occasion fut provoqué par deux adversaires à la fois; ni la politique, quoi qu'on en ait dit, ni la police n'y étaient pour rien. Une lettre, adressée vaguement à tous les républicains et écrite la veille de sa mort en prévision d'une issue fatale, montre suffisamment les causes de la rencontre.

« Je prie les patriotes, mes amis, de ne pas me reprocher de mourir autrement que pour le pays. Je meurs victime d'une infâme coquette. C'est dans un misérable cancan que s'éteint ma vie.

» Oh! pourquoi mourir pour si peu de chose! Mourir pour quelque chose de si méprisable! Je prends le ciel à témoin que c'est contraint et forcé que j'ai cédé à une provocation que j'ai conjurée par tous les moyens. Je me repens d'avoir dit une vérité funeste à des gens si peu en état de l'entendre de sang-froid; mais enfin j'ai dit la vérité. J'emporte au tombeau une conscience nette de mensonge, nette de sang patriote.

[redacted]

Fourier mourait moins d'un an après et Cauchy avait quitté la France.

Les registres de l'Académie ne disent pas auquel des commissaires les Mémoires de Galois furent envoyés; Arago a expliqué leur perte par le désordre dans lequel on trouva les papiers de Fourier; la tradition, d'un autre côté, a accusé Cauchy. Les deux Mémoires ont été perdus et Cauchy était seul à faire partie des deux commissions.

Galois, se résignant, quoique fort mécontent, à la perte du beau Mémoire dont lui seul savait l'importance, envoya une seconde rédaction. Poisson et Lacroix furent commissaires. Un accusé de réception fut adressé à Galois, et plusieurs mois s'écoulèrent sans qu'il entendît parler de l'Académie. Enfermé à Sainte-Pélagie, il ne pouvait aller voir les commissaires; il écrivit au président de l'Académie le 31 mars 1831. Fourier était mort depuis un an et Cauchy habitait Turin. C'est Poisson qui reçut sa lettre.

« J'ose espérer, disait Galois, que MM. Lacroix et Poisson ne trouveront pas mal que je rappelle à leur souvenir un Mémoire relatif à la théorie des équations dont ils ont été chargés il y a trois mois.

» Les recherches contenues dans ce Mémoire faisaient partie d'un Ouvrage que j'avais mis l'année dernière au concours pour le prix de Mathématiques et où je donnais dans tous les cas les règles pour reconnaître si une équation était ou non résoluble par radicaux. Comme ce problème a paru, jusqu'ici, sinon impossible, au moins fort difficile aux géomètres, la Commission d'examen jugea *a priori* que je ne pouvais avoir résolu ce problème, en premier lieu parce que je m'appelais Galois, de plus parce que j'étais étudiant, et l'on me fit dire que mon Mémoire était égaré.

» Cette leçon aurait dû me suffire. Toutefois sur l'avis d'un honorable membre de l'Académie (c'était Poisson), je refis en partie mon Mémoire et vous le présentai. Vous voyez, Monsieur le Président, que mes recherches ont jusqu'à ce jour à peu près le même sort que celle des quadrateurs. L'analogie sera-t-elle poussée jusqu'au bout ?

» Veuillez, Monsieur le Président, me faire sortir d'inquiétude

en invitant MM. Lacroix et Poisson à déclarer s'ils ont égaré mon Mémoire ou s'ils ont l'intention d'en rendre compte à l'Académie.

» Agréez, Monsieur le Président, l'hommage de votre respectueux serviteur.

GALOIS. »

Poisson se décida à étudier le Mémoire; trois mois après, il fit un Rapport qu'on lui a beaucoup trop sévèrement reproché.

« Nous avons fait tous nos efforts, dit Poisson, pour comprendre la démonstration de M. Galois. Ses raisonnements ne sont ni assez clairs ni assez développés pour que nous ayons pu juger de leur exactitude, et nous ne serions pas même en état d'en donner une idée dans ce rapport. »

En déclarant que, malgré tous ses efforts, il n'a pas réussi à comprendre, Poisson est sincère très évidemment, et la lecture du Mémoire, deux fois imprimé depuis, donne une explication suffisante. Le Rapport se termine par cette remarque bienveillante :

« L'auteur annonce que la proposition qui fait l'objet spécial de son Mémoire est une partie d'une théorie générale susceptible de beaucoup d'applications. Souvent il arrive que les différentes parties d'une théorie en s'éclairant mutuellement, sont plus faciles à saisir dans leur ensemble qu'isolément. On peut donc attendre que l'auteur ait publié en entier son travail pour se former une [redacted]



teur instruit de la langue algébrique peut en juger dès la première page. On lit :

« 1. Une équation irréductible ne peut avoir aucune racine commune avec une équation rationnelle sans la diviser;

» Car le plus grand commun diviseur entre l'équation irréductible et l'autre équation sera encore rationnel. Donc, etc. »

Les géomètres, il y a soixante et dix ans, ne toléraient ni ces réticences ni ces fautes de langage. Des polynomes ont un plus grand commun diviseur, les équations n'en ont pas. Si Galois, dans l'examen subi sous Dinet, s'est permis, comme on peut le croire, de terminer une démonstration à peine esquissée par : « Donc, etc. », le vieux maître de Cauchy a dû croire que le candidat lui manquait de respect.

Poisson avait le droit de se montrer aussi exigeant. Les habitudes académiques autorisent et invitent à ne pas comprendre à demi-mot.

Liouville, en publiant, quinze ans après la mort de Galois, le Mémoire que Poisson trouvait obscur, annonçait un commentaire qu'il n'a jamais donné. Je l'ai entendu déclarer la démonstration très facile à comprendre. Et au geste d'étonnement qu'il me vit faire, il ajouta : « Il suffit d'y consacrer un mois ou deux, sans penser à autre chose. » Ce mot explique et justifie l'embarras loyalement avoué par Poisson et, sans aucun doute, rencontré par Fourier et par Cauchy. Galois, avant de rédiger son Mémoire, avait pendant plus d'un an passé en revue l'innombrable armée des permutations, des substitutions et des groupes. Il a dû classer et mettre en œuvre toutes les divisions, les brigades, les régiments, les bataillons, et distinguer les simples unités. Le lecteur, si habile que soit la rédaction, doit, pour s'orienter et se reconnaître dans cette foule, l'éclairer de sa propre lumière pendant de longues heures d'attention active. La nature du sujet l'exige. Les idées sont nouvelles, la langue doit l'être; elle ne peut s'apprendre en un jour.

Pour comprendre solidement l'Ouvrage qu'il voulait commenter, Liouville invita quelques amis à entendre une série de leçons sur l'œuvre de Galois. Serret assistait à ces conférences. La première édition de son Traité d'Algèbre supérieure, publiée quelques an-

nées plus tard, ne disait rien sur les découvertes de Galois. Il ne se croyait pas permis, disait-il dans sa préface, d'usurper les droits du maître qui l'en avait instruit. Lors de la seconde édition, quinze années s'étaient écoulées. Le projet de Liouville paraissant abandonné, Serret rédigea la théorie de Galois; il y consacrait, je crois m'en souvenir, soixante et une pages qui furent imprimées et dont j'ai corrigé les épreuves.

Comme je m'étonnais de n'y pas rencontrer le nom de Liouville, il me répondit : « J'ai assisté à ses leçons, cela est vrai, mais je n'y ai rien compris. » Après réflexion, cependant, cette déclaration paraissant difficile à faire, il se décida, cédant au désir impérieux de Liouville, à supprimer les soixante et une pages, et pour satisfaire à la typographie, les feuilles suivantes étant déjà tirées, il fallut sur un sujet très différent écrire un nombre égal de lignes.

M. Camille Jordan a écrit dans la préface de son beau Livre sur la théorie des substitutions : « Il était réservé à Galois d'asseoir la théorie des équations sur sa base définitive, en montrant qu'à chaque équation correspond un groupe de substitutions dans lequel se reflètent ses caractères essentiels et notamment tous ceux qui ont trait à sa résolution par d'autres équations auxiliaires.

« De ce point de vue élevé, ajoute M. Jordan, le problème de la résolution, qui semblait former l'unique objet de la théorie des équations, n'apparaît plus que comme le premier anneau d'une longue chaîne de questions relatives aux transformations des irrationnelles et à leur classification. Galois, faisant à ce problème particulier l'application de ses méthodes générales, trouva sans

[redacted]

toutes les questions relatives aux équations, n'est encore que peu avancée. Lagrange n'avait fait que l'effleurer, Cauchy l'a abordée à plusieurs reprises... » Il ajoute, pour se résumer : « mais la question est si vaste et si difficile qu'elle reste encore presque entière...

« Trois notions fondamentales commencent cependant à se dégager : celle de la primitivité, qui se trouvait déjà indiquée dans les Ouvrages de Gauss et d'Abel; celle de la transitivité, qui appartient à Cauchy; enfin la distinction des groupes simples et composés. C'est à Galois qu'est due cette dernière notion, la plus importante des trois. »

En rapprochant ainsi Galois de Gauss, d'Abel et de Cauchy, M. Jordan lui rend un bel hommage. On est allé plus loin. Sophus Lie joignait malheureusement, comme Galois, au génie qui fait tout pardonner le grave défaut de manquer de clarté. Les éditeurs du livre consacré au Centenaire de l'École Normale l'ont prié de rédiger la Notice relative à cet immortel normalien. Nul ne pouvait avoir pour le juger une autorité plus grande que celle de l'illustre géomètre norvégien, professeur à l'Université de Leipzig.

Sophus Lie a pu, sans étonner personne, déclarer la découverte de Galois une des plus profondes qu'on ait jamais faites. On doit retenir comme un témoignage précieux l'honneur qu'il lui fait en l'associant à Gauss, à Abel et à Cauchy dans le groupe glorieux des quatre premiers savants du siècle. Son enthousiasme l'entraîne trop loin, quand il ajoute : « Et s'il est juste de nommer immédiatement après ces génies créateurs Jacobi, dont le talent brillant s'est attaqué à tant de branches des Mathématiques; à mon avis, pour l'originalité, la puissance et la profondeur, il ne saurait toutefois être comparé aux quatre mathématiciens cités plus haut. »

Jacobi est, suivant de bons juges, le plus illustre géomètre du siècle; pour quelques-uns même, le plus grand qui ait jamais existé. Il n'est pas, suivant Sophus Lie, comparable à Galois! De telles appréciations ne peuvent se discuter. On croit entendre un savant minéralogiste préférer un diamant brut aux plus belles pierres admirées au Louvre dans la galerie d'Apollon. Galois,

très susceptible et très fin, aurait cru qu'on voulait tenter son orgueil.

Racine a-t-il surpassé Corneille? Michel-Ange est-il plus grand que Raphaël? Annibal, comme homme de guerre, est-il supérieur à César? De telles questions n'ont pas de sens. Pour être comparées, les grandeurs doivent être mesurables, Sophus Lie ne peut l'ignorer.

Un des frères de mon père, le docteur Stanislas Bertrand, qui jamais n'étudia les Mathématiques, a vécu dans l'intimité de Galois. Il le rencontrait, en 1830, tantôt dans les bureaux du journal *la Tribune*, tantôt dans les réunions secrètes de la Société « Aide-toi, le ciel t'aidera », ce qui les conduisit à s'asseoir ensemble sur les bancs de la police correctionnelle. Quinze ans après, mon oncle, venant me voir, me trouva causant avec un jeune homme qu'il semblait regarder avec attention et écouter avec étonnement. Il me dit le lendemain : « J'ai éprouvé hier une véritable émotion, j'ai cru pendant un quart d'heure voir et entendre Évariste Galois. » Il avait vu et entendu M. Charles Hermite.

J. Bertrand.



COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

H. POINCARÉ. — Les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste, t. I.

L'intégration complète et rigoureuse des équations du problème des trois corps étant impossible, c'est aux procédés d'approximation que les géomètres ont dû faire appel.

M. Poincaré rappelle d'abord que, si les anciennes méthodes, dans lesquelles on développait les coordonnées des astres suivant les puissances des masses, ont pu, grâce au degré de perfection apporté par les belles conquêtes de Lagrange, Laplace, Le Verrier et Tisserand, suffire, jusqu'à présent, aux besoins de la pratique : elles ne sauraient cependant y suffire toujours.

On ne peut les employer, pour le calcul des éphémérides à longue échéance, à cause des termes dits *séculaires*, où le temps sort des signes sinus et cosinus. M. Poincaré montre que la présence de ces termes ne tient pas à la nature du problème, mais seulement à la méthode employée, et il indique très simplement comment de pareils termes peuvent s'introduire dans les développements : en supposant, par exemple, que la véritable expression d'une coordonnée contienne un terme en $\sin \alpha m t$, α étant une constante et m une des masses, on trouvera, en développant suivant les puissances de m, des termes séculaires $\alpha m t - \frac{\alpha^3 m^3 t^3}{6} + \ldots$, et leur présence donnera une idée fausse de la véritable forme de la fonction étudiée.

La convergence de ces développements devient encore douteuse et l'approximation insuffisante pour les grandes valeurs du temps. Il ne faut pas demander au calcul plus de précision qu'aux observations; mais on ne peut, non plus, lui en demander moins. Et, en admettant même que les instruments de mesure ne se perfectionnent plus, l'accumulation seule des observations pendant plusieurs siècles nous fera connaître, avec plus de précision, les coefficients des diverses inégalités.

On devra donc, dans un avenir plus ou moins éloigné, abandonner les anciennes méthodes.

Les fondateurs de la Mécanique céleste ont, eux-mêmes, re-

connu les inconvénients des développements suivant les puissances des masses et ont cherché à éviter les termes séculaires dans les formules applicables à longue échéance.

M. Poincaré cite, à cette occasion, les travaux de Delaunay, de M. Hill sur la théorie de la Lune, les méthodes de Gyldén et de M. Lindstedt.

Grâce aux efforts de ces savants, la difficulté provenant de termes séculaires peut être regardée comme définitivement vaincue, et les procédés nouveaux suffiront probablement, pendant fort longtemps encore, aux besoins de la pratique. Tout n'est pas fait cependant. La plupart des développements ne sont pas convergents au sens que les géomètres donnent à ce mot. Ces séries ne peuvent donc pas donner une approximation indéfinie; il viendra un moment où elles seront insuffisantes; en outre, les conséquences que l'on serait porté à tirer de leur forme ne sont pas légitimées.

Le but de la Mécanique céleste ne sera atteint que lorsque l'on pourra se rendre compte du degré d'exactitude des éphémérides que l'on calculera. Jusque-là, il sera impossible de savoir si les écarts entre les éphémérides et les observations proviennent de ce que la loi de Newton est en défaut ou de l'imperfection de la théorie.

Ce sont toutes ces considérations qui ont conduit M. Poincaré à donner, dans sa *Mécanique céleste*, une si grande place aux questions de convergence.

Le premier Volume, qui fait l'objet de cette analyse, contient [redacted]

Il considère des équations de la forme

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant des fonctions analytiques et uniformes des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et il suppose, le plus souvent, que la variable t qui représente le temps n'entre pas explicitement dans les fonctions X.

Dans les problèmes de Dynamique, les équations (1) présentent la forme canonique et les variables se répartissent en deux séries: $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'une part, $y_1, y_2, \ldots, y_p$ de l'autre. M. Poincaré dit alors qu'il y a p couples de variables conjuguées et que le système est d'ordre $2p$. C'est ainsi que le problème des trois corps, dans le cas général, comporte dix-huit variables, les coordonnées et les vitesses des trois points, et neuf degrés de liberté. Ce nombre peut d'ailleurs être considérablement abaissé à cause des intégrales connues.

Le problème à un degré de liberté, étant immédiatement intégrable, M. Poincaré s'attache plus particulièrement à celui à deux degrés. Beaucoup de problèmes de Mécanique s'y ramènent, d'ailleurs. Il en est ainsi, par exemple, du mouvement, par rapport à deux axes mobiles $O\xi$, $O\eta$ animés d'une rotation uniforme autour de l'origine, d'un point matériel soumis à une fonction de forces dépendant seulement de ξ et de η. Un des cas particuliers du problème des trois corps rentre dans la question précédente : c'est celui où l'une des masses est infiniment petite, de telle sorte que le mouvement des deux autres, n'étant pas troublé, reste képlérien. Tel est, par exemple, le cas d'une petite planète, en présence du Soleil et de Jupiter.

M. Poincaré ramène encore à deux degrés de liberté l'équation de Gyldén

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, t).$$

Il s'occupe ensuite des changements de variables qui n'altèrent pas la forme canonique et rappelle, à cet effet, le théorème de Jacobi.

Il applique ensuite les résultats obtenus au mouvement képlérien.

Soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées, y_1, y_2, y_3 les composantes de la vitesse d'une masse mobile sous l'action d'une masse fixe située à l'origine des coordonnées et égale à M. En posant

$$F = \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{2} - \frac{M}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = h,$$

les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = \frac{dF}{dx_i}$$

et leur intégration est ramenée à celle de l'équation

$$\left(\frac{dS}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dx_2}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dx_3}\right)^2 - \frac{2M}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = 2h.$$

M. Poincaré introduit dans S trois constantes L, G, θ liées au grand axe, à l'excentricité et à l'inclinaison par les formules

$$L = \sqrt{a}, \qquad G = \sqrt{a(1 - e^2)}, \qquad \theta = G \cos i.$$

La solution générale de l'équation précédente en S est

$$y_i = \frac{dS}{dx_i}, \qquad h' + l = \frac{dS}{dh}, \qquad g = \frac{dS}{dG}, \qquad \theta = \frac{dS}{d\theta}.$$

l est l'anomalie moyenne, θ la longitude du nœud, $g + \theta$ celle du périhélie. Si la masse mobile, au lieu de se mouvoir par l'attraction de la masse M, est soumise à d'autres forces, on peut prendre

[redacted]

les équations du mouvement sont

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

Pour introduire les variables képlériennes, on détermine, comme plus haut, la fonction $S(x_1, x_2, x_3, L, G, \Theta)$ et l'on pose

$$\frac{dS}{dx_i} = y_i, \qquad \frac{dS}{dG} = g, \qquad \frac{dS}{d\Theta} = \theta, \qquad \frac{dS}{dL} = l.$$

D'après le théorème de Jacobi, les équations conservent la forme canonique et s'écrivent

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dF}{dl}, \qquad \frac{dG}{dt} = \frac{dF}{dg}, \qquad \frac{d\Theta}{dt} = \frac{dF}{d\theta},$$
$$\frac{dl}{dt} = -\frac{dF}{dL}, \qquad \frac{dg}{dt} = -\frac{dF}{dG}, \qquad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{dF}{d\Theta}.$$

Il peut arriver que, la force restant constamment dans le plan des x_1, x_2, x_3, il en soit de même du point mobile. Dans ce cas, on aura constamment $G = 0$ et la fonction F dépendra seulement de G, L, l et de la longitude du périhélie $g + \theta$. En posant

$$g + \theta = \varpi, \qquad G = \Theta = \Pi,$$

on a les équations

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{dF}{dl}, \qquad \frac{d\Pi}{dt} = -\frac{dF}{d\varpi},$$
$$\frac{dl}{dt} = +\frac{dF}{dL}, \qquad \frac{d\varpi}{dt} = \frac{dF}{d\Pi}.$$

C'est ainsi que M. Poincaré procède dans le cas général du problème des trois corps. Il désigne par m_1, m_2, m_3 leurs masses, par a, b, c leurs distances mutuelles, par $V\mu$ la fonction des forces, μ étant une constante dont on trouvera plus loin la signification.

Il suppose que le centre de gravité des trois corps A, B, C est fixe, désigne par D celui des A et B et considère deux systèmes d'axes mobiles, parallèles aux axes fixes et ayant leur origine l'un en A, l'autre en D. Il appelle x_1, x_2, x_3 les coordonnées de B par rapport au premier système; x_4, x_5, x_6 celles de C par rapport au second. La force vive totale a pour expression

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2\right]$$
$$+ \left[\frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\right]\left[\left(\frac{dx_4}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_5}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_6}{dt}\right)^2\right].$$

En posant

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \beta\mu, \qquad \left[\frac{(m_1 + m_2)m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\right] = \beta'\mu,$$

$$F = \frac{T}{\mu} - V,$$

$$\beta\frac{dx_i}{dt} = y_i (i = 1, 2, 3), \qquad \beta'\frac{dx_i}{dt} = y_i \quad (i = 4, 5, 6),$$

les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

M. Poincaré construit deux fonctions S; l'une

$$S(x_1, x_2, x_3;\ L, G, \Theta)$$

correspond à une masse $m_1 + m_2$ placée en A, l'autre

$$S'(x_4, x_5, x_6;\ L', G', \Theta')$$

à une masse $(m_1 + m_2 + m_3)$ placée en D, et il pose $\Sigma = \beta S + \beta' S'$.

Les équations

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \beta l, \qquad \frac{d\Sigma}{dG} = \beta g, \qquad \frac{d\Sigma}{d\Theta} = \beta\theta,$$

$$\frac{d\Sigma}{dL'} = \beta' l', \qquad \frac{d\Sigma}{dg'} = \beta' g', \qquad \frac{d\Sigma}{d\Theta'} = \beta'\theta'$$

$$\frac{d\Sigma}{dx_i} = y_i, \qquad \frac{d\Sigma}{dx_i} = y_i,$$

définissent les nouvelles variables qui se répartissent en deux [redacted]

En général, m_2 et m_3 seront très petits; de sorte qu'on pourra poser

$$m_2 = \alpha_2 \mu, \qquad m_3 = \alpha_3 \mu;$$

F dépend ainsi des six variables précédentes et de β, β', α_2, α_3 et μ.

En le développant suivant les puissances croissantes de μ, on a

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots,$$

$$F_0 = \frac{\alpha_2^3}{2(\beta L)^2} + \frac{\alpha_3^3}{2(\beta' L')^2}.$$

Dans le cas des mouvements plans, les inclinaisons sont nulles; M. Poincaré ramène le problème à quatre degrés de liberté en posant

$$\beta L = \Lambda, \qquad \beta H = \Lambda H, \qquad l + \omega = \lambda, \qquad \omega = -h,$$
$$\beta' L' = \Lambda', \qquad \beta' H' = L' H', \qquad l' + \omega' = \lambda', \qquad \omega' = -h'.$$

Les équations restent canoniques et les nouvelles variables sont

$$\Lambda, \lambda, \Lambda', \lambda'; \; H, \omega, H', \omega'.$$

Les variables précédentes ne se prêtant pas au développement des termes successifs F_1, F_2, ... de F, M. Poincaré pose d'abord

$$\beta L = \Lambda, \qquad \beta G = \Lambda - H, \qquad \beta \Theta = \Lambda - H - Z,$$
$$\beta' L' = \Lambda', \qquad \beta' G' = \Lambda' - H', \qquad \beta' \Theta' = \Lambda' - H' - Z',$$
$$\lambda = l + g + \theta, \qquad h = -g - \theta, \qquad \zeta = -\theta,$$
$$\lambda' = l' + g' + \theta', \qquad h' = -g' - \theta', \qquad \zeta' = -\theta',$$

et ensuite

$$\sqrt{2H}\cos h = \xi, \qquad \sqrt{2H'}\cos h' = \xi', \qquad \sqrt{2Z}\cos \zeta = p, \qquad \sqrt{2Z'}\cos\zeta' = p',$$
$$\sqrt{2H}\sin h = \eta, \qquad \sqrt{2H'}\sin h' = \eta', \qquad \sqrt{2Z}\sin \zeta' = q, \qquad \sqrt{2Z'}\sin\zeta' = q'.$$

Les équations restent canoniques et les deux séries de variables conjuguées sont

$$\Lambda, \Lambda', \xi, \xi', p, p',$$
$$\lambda, \lambda', \eta, \eta', q, q'.$$

La fonction F exprimée à l'aide de ces variables est développable tant suivant les puissances de $\xi, \xi', \eta, \eta', p, p', q, q'$ que suivant les sinus et cosinus des multiples de λ et λ'; les coefficients dépendent d'ailleurs d'une manière quelconque de Λ, Λ'. On le

voit aisément en se reportant au développement ordinaire de la fonction perturbatrice. (Tisserand, *Mécanique céleste*, t. I, p. 307.)

Les variables p, p', q, q disparaissent dans les mouvements plans et il ne reste que quatre degrés de liberté.

M. Poincaré est ainsi conduit au problème suivant : Étudier les équations canoniques

$$(a) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

F est de la forme

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots;$$

F_0 ne dépendant que des x et F_1, F_2 étant des fonctions périodiques, de période 2π, par rapport aux y.

On peut profiter des intégrales connues de ces équations pour diminuer le nombre des degrés de liberté. Soit

$$F_1(x_1, x_2, x_p, y_1, \ldots, y_n) = \text{const.}$$

l'une d'elles; on aura

$$[F, F_1] = 0;$$

il en résulte qu'il existe une infinité de fonctions S satisfaisant à la fois aux deux équations

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \frac{dS}{dx_1}, \ldots, \frac{dS}{dx_p}\right) = \text{const.},$$

$$F_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \frac{dS}{dx_1}, \ldots, \frac{dS}{dy_1}\right) = \text{const.}$$

[redacted]

M. Poincaré considère ensuite le cas où l'on connaît q intégrales $F_1, F_2, \ldots, F_q$, et montre, de la même façon, que si les $q+1$ équations aux dérivées partielles

$$F = \text{const.}, \quad F_1 = \text{const.}, \quad \ldots, \quad F_q = \text{const.}$$

sont compatibles, c'est à-dire si l'on a

$$[F_i, F_k] = 0 \quad (i, k = 1, 2, \ldots, q),$$

on peut encore, mais dans ce cas-là seulement, abaisser de q unités le nombre des degrés de liberté.

Il envisage encore le cas où l'on connaît, outre les q intégrales $F_1, F_2, \ldots, F_q$, une autre intégrale F_{q+1}, et cherche si l'on peut en déduire une intégrale du système réduit. Il trouve que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que

$$[F_1, F_{q+1}] = 0, \quad [F_2, F_{q+1}] = 0, \quad \ldots, \quad [F_q, F_{q+1}] = 0,$$

En appliquant ces considérations aux problèmes des trois corps et en profitant des intégrales premières du centre de gravité, ainsi que des intégrales des aires, M. Poincaré ramène le cas des mouvements plans et le cas général respectivement à trois et à quatre degrés de liberté. Il donne aussi la forme que prend F quand on adopte ces variables de réduction.

CHAPITRE II.

M. Poincaré rappelle, en les complétant, les théorèmes et la méthode de Cauchy relatifs à l'existence de l'intégrale des équations différentielles du premier ordre.

Il considère des équations de la forme

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = \Theta(x, y, z, \mu), \quad \frac{dy}{dt} = \Phi(x, y, z, \mu), \quad \frac{dz}{dt} = \Psi(x, y, z, \mu),$$

où les seconds membres sont développables suivant les puissances de la variable indépendante, des fonctions inconnues x, y, z et d'un paramètre très petit μ. Il démontre l'existence de séries développables suivant les puissances de t, de μ et x_0, y_0, z_0, satisfaisant formellement aux équations (1), se réduisant à x_0, y_0, z_0, pour $t = 0$, et convergentes pour des valeurs de la variable indé-

pendante dont le module est assez petit. Au lieu de développer, comme le faisait Cauchy, par rapport à la variable indépendante t seulement, M. Poincaré développe encore suivant les puissances du paramètre très petit μ et des valeurs initiales x_0, y_0, z_0. Il cherche ensuite à s'affranchir de la restriction, faite sur la variable indépendante.

Soient les équations

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = \Phi(x, y, t, \mu), \qquad \frac{dy}{dt} = \Psi(x, y, t, \mu)$$

et

$$x = \theta(t, \mu), \qquad y = \varpi(t, \mu);$$

la solution pour laquelle les valeurs initiales de x, y sont nulles quand $t = 0$. M. Poincaré suppose que, pour toutes les valeurs de t comprises entre 0 et t_0, les deux fonctions Φ et Ψ soient développables suivant les puissances de μ, $x - \theta(t, 0)$, $y - \varpi(t, 0)$, les coefficients étant d'ailleurs des fonctions quelconques de t, hypothèse que l'on exprime ordinairement, dans un langage assez incorrect mais commode, en disant que la solution particulière

$$\mu = 0, \qquad x = \theta(t, 0) \qquad y = \varpi(t, 0),$$

ne va passer par aucun point singulier; et il démontre que $\theta(t, \mu)$, $\varpi(t, \mu)$ sont développables, pour toutes les valeurs de t comprises entre 0 et t_0, suivant les puissances de μ (non pas de t et de μ), pourvu que le module de μ soit assez petit.

Ces résultats subsistent évidemment, quand, au lieu d'un seul paramètre arbitraire μ, on en a plusieurs, et que l'on considère [redacted]

où F_0 ne dépend pas des y et où F est une fonction des x et des y qui ne cesse d'être holomorphe qu'en certains points singuliers. Il peut se faire que, si l'on donne aux x les valeurs suivantes :

$$x_i = x_i^0,$$

la fonction F reste holomorphe pour toutes les valeurs des y; s'il en est ainsi, les valeurs, pour $t = t_0 + \tau$, de la solution particulière qui pour $t = 0$ se réduit à

$$x_i = x_i^0 + \xi_i,$$
$$y_i = y_i^0 + \eta_i,$$

sont développables suivant les puissances de μ, des η et des ξ.

Dans le cas particulier du problème des trois corps, la fonction F ne peut cesser d'être holomorphe que si deux des trois corps viennent à se choquer. La solution précédente représente, dans le cas de $\mu = 0$, l'ensemble des deux ellipses képlériennes décrites par les deux petites masses sous l'attraction d'une masse I placée à l'origine.

Pour qu'un choc puisse se produire, il faudrait que ces deux ellipses se coupassent, et cela n'arrive jamais dans les applications astronomiques. Il en résulte que, si l'on définit la position du système par les douze variables képlériennes indiquées au Chapitre I, et, si l'on se donne leurs valeurs

$$x_i^0 + \xi_i, \quad y_i^0 + \eta_i^0,$$

à l'époque t, on pourra développer les valeurs de ces mêmes variables à l'époque $t_0 + \tau$ suivant les puissances des masses, des ξ, des η et de τ.

Il n'y a qu'un cas d'exception, c'est celui où les valeurs initiales par $t = 0$ étant x_i^0, y_i^0 et où les masses étant supposées nulles, c'est-à-dire les mouvements se continuant suivant les lois de Képler, un choc viendrait à se produire avant l'époque t_0.

M. Poincaré considère ensuite l'intégration, par des séries trigonométriques, des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions périodiques de la variable indépendante et établit, beaucoup plus simplement qu'on ne l'avait fait jusqu'alors, la forme générale de leurs intégrales.

Il rappelle, en les développant, quelques propriétés utiles

pour la suite, sur les fonctions implicites, l'élimination, et termine ce Chapitre par un nouveau théorème sur les maxima :

Soit F une fonction quelconque, holomorphe par rapport aux z; on sait qu'on trouvera tous les maxima de cette fonction en résolvant le système

$$\frac{dF}{az_1} = \frac{dF}{dz_2} = \ldots = \frac{dF}{dz_p} = 0;$$

mais on sait également que toutes les solutions de ce système ne correspondent pas à des maxima. M. Poincaré montre qu'une condition nécessaire pour qu'une solution corresponde à un maximum, c'est qu'elle soit d'ordre impair.

CHAPITRE III.

Le Chapitre III est consacré à l'étude des solutions périodiques des équations de la forme $\frac{dx_i}{dt} = X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, où les X_i sont des fonctions uniformes données de $x_1, \ldots, x_n$, pouvant, en outre, contenir le temps t.

Soit $x_i = \Phi_i(t)$ une solution.

Si les X_i sont des fonctions périodiques du temps, de période T, et si l'on a

$$\Phi_i(0) = \Phi_i(T),$$

on pourra en conclure que

$$\Phi_i(t) = \Phi_i(t + T),$$

[redacted]

sera encore périodique. Il peut arriver qu'un changement convenable de variables fasse apparaître des solutions périodiques qu'on ne rencontrait pas avec les variables anciennes. Par exemple, les équations du mouvement d'un point, rapporté à deux axes mobiles $o\xi$, $o\eta$ et soumis à une force dont les composantes suivant ces deux axes sont $\frac{dV}{d\xi}$, $\frac{dV}{d\eta}$, V ne dépendant que de ξ, η, admettent des solutions périodiques, de période T; si l'on rapportait le point mobile à des axes fixes ox et oy, on aurait

$$x = \xi \cos nt - \eta \sin nt,$$
$$y = \xi \sin nt + \eta \cos nt,$$

et x, y ne seraient pas fonctions périodiques de t, à moins que T ne soit commensurable avec $\frac{2\pi}{n}$. On fait donc apparaître une solution périodique en passant des axes fixes aux axes mobiles.

En Mécanique céleste, les fonctions X_i dépendent, en général, d'un paramètre μ. Elles admettent des solutions périodiques quand $\mu = 0$. M. Poincaré donne les conditions pour qu'elles en admettent encore quand μ n'est plus nul, mais très petit.

Il prend pour exemple le problème des trois corps et appelle $\alpha_2\mu$, $\alpha_3\mu$ les masses des deux petits corps, μ étant très petit, α_2 et α_3 finis. Pour $\mu = 0$ le problème est intégrable; il en est encore de même quand μ est très petit, mais pas nul. Chacun des petits corps décrit autour du troisième une ellipse képlérienne, et le problème admet une infinité de solutions périodiques.

Ce fait semble d'abord n'être d'aucun intérêt pour la pratique. En effet, il y a une probabilité nulle pour que les conditions initiales du mouvement soient précisément celles qui correspondent à une solution périodique. Mais il peut arriver qu'elles en diffèrent très peu, et cela a lieu justement dans les cas où les anciennes méthodes ne sont plus applicables. On peut alors, avec avantage, prendre la solution périodique comme première approximation, comme orbite intermédiaire, pour employer le langage de Gyldén.

Bien plus, il est infiniment probable qu'étant donnée une solution particulière quelconque des équations considérées, on peut trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue) telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite que l'on veut pendant un temps aussi long

que l'on veut. D'ailleurs, ce qui rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où l'on puisse essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable.

M. Poincaré considère donc les équations

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les X_i sont des fonctions des n inconnues $x_1, \ldots, x_n$, du temps t, d'un paramètre arbitraire μ et sont périodiques, par rapport à t, de période 2π. Il suppose que, pour $\mu = 0$, ces équations admettent une solution périodique de période 2π,

$$x_i = \Phi_i(t)$$

et cherche si elles en admettent encore une quand μ n'est plus nul, mais très petit. Soient, pour une solution quelconque $\Phi_i(0) + \beta_i$ et $\Phi_i(0) + \beta_i + \Psi_i$ les valeurs de x_i pour $t = 0$ et $t = 2\pi$. Pour que la solution soit périodique, il faut que

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \ldots = \Psi_n = 0.$$

Si le déterminant fonctionnel des Ψ n'est pas nul pour $\mu = \beta_i = 0$, en d'autres termes, si les équations précédentes admettent, pour $\mu = 0$, le système $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$ comme solution simple, on peut résoudre les équations par rapport aux β et l'on trouve

$$\beta_i = \theta_i(\mu).$$

[redacted]

M. Poincaré se rend compte de toutes les circonstances qui se produisent en étudiant la forme de cette courbe dans le voisinage de l'origine. Il considère, en particulier, le cas où les équations admettent une infinité de solutions périodiques, pour $\mu = 0$, et celui où elles admettent une ou plusieurs intégrales dont les premiers membres $F_i(x_i, t)$ sont des fonctions périodiqnes de t, de période 2π.

Dans tout ce qui précède, la durée de la période des x_i était la même que celle des X_i. Si ces fonctions X_i ne contiennent pas le temps, la période d'une solution périodique peut être quelconque, et si, en outre, elles admettent une solution périodique, elles en admettent une infinité. En effet, si $x_i = \Phi_i(t)$ est solution périodique, $x_i = \Phi_i(t + h)$ l'est aussi, quel que soit h.

En appliquant tous ces résultats au problème des trois corps, M. Poincaré est conduit à distinguer trois sortes de solutions périodiques : pour celles de la première sorte, les inclinaisons sont nulles et les excentricités très petites; pour celles de la deuxième sorte, les inclinaisons sont nulles et les excentricités finies; enfin, pour celles de la troisième sorte, les inclinaisons ne sont plus nulles.

Pour les unes comme pour les autres, les distances mutuelles des trois corps sont des fonctions périodiques du temps; au bout d'une période, les trois corps se trouvent dans la même situation relative, tout le système ayant seulement tourné d'un certain angle. Il faut donc, pour que les coordonnées des trois corps soient des fonctions périodiques du temps, qu'on les rapporte à des systèmes d'axes animés d'un mouvement de rotation uniforme.

La vitesse de ce mouvement de rotation est finie pour les solutions de la première sorte et très petite pour celles des deux dernières sortes.

Solutions de la première sorte. — Soient A, B, C les trois masses que l'on suppose se mouvoir constamment dans un même plan, D le centre de gravité de A et B.

Soient x_1, x_2 les coordonnées de B par rapport à des axes parallèles aux axes fixes et ayant leur origine en A, et x_3, x_4 les coordonnées de C par rapport à des axes parallèles passant par D.

M. Poincaré emploie les variables définies plus haut

$$\begin{matrix} \Delta, & \Delta', & \xi, & \xi', & p, & p', \\ \lambda, & \lambda', & \eta, & \eta', & q, & q'. \end{matrix}$$

Comme les mouvements sont plans, p, p', q, q' sont nuls. On est dans le cas particulier où les équations admettent une intégrale connue, celle des forces vives

$$F = C.$$

On considère la constante C comme une donnée du problème. Les distances mutuelles des trois corps et leurs dérivées par rapport au temps sont des fonctions de

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta, & \xi\cos\lambda - \eta\sin\lambda, & \xi\sin\lambda + \eta\cos\lambda, \\ \Delta', & \xi\cos\lambda' - \eta'\sin\lambda', & \xi'\sin\lambda' + \eta'\cos\lambda', \end{cases}$$

et de $\lambda' - \lambda$.

Pour qu'une solution soit périodique, il faut donc que, au bout d'une période, les quantités (1) reprennent leurs valeurs primitives et que $\lambda' - \lambda$ augmente d'un multiple de 2π.

M. Poincaré considère une solution où les constantes initiales sont choisies de façon que, pour $\mu = 0$, les mouvements soient circulaires. Il cherche ensuite quels sont les accroissements qu'il faut donner à ces valeurs initiales pour obtenir une solution périodique et de même période que la précédente. Il choisit l'origine du temps au moment d'une conjonction et prend pour origine des longitudes la longitude de cette conjonction.

En écrivant, comme dans le cas général, que la solution est [redacted]

mière solution périodique, pour $\mu = 0$, ont même valeur absolue, mais sont de signes contraires.

D_2, D_3 ne s'annulent que si n est multiple de $n' - n$.

Il n'y a donc exception que si n est multiple de $n' - n$ ou si $n = -n'$.

Il y a une quadruple infinité de solutions périodiques de la première sorte.

On peut, en effet, si μ est assez petit, choisir arbitrairement :

1° La période $\frac{2\pi}{n'_0 - n_0} = T$;

2° La constante C;

3° et 4° Le moment et la longitude de la conjonction, pris respectivement pour origines de temps et de longitude dans le calcul précédent.

M. Poincaré indique encore une autre manière de retrouver ces solutions et montre qu'il y a successivement conjonction et opposition symétriques au début et au milieu de chaque période. Toutes ces solutions ne sont pas indépendantes. On peut passer de l'une à l'autre, en changeant, soit l'origine des temps, soit l'origine des longitudes, soit encore, et simultanément, les unités de longueur et de temps, pourvu que l'on maintienne entre elles une relation connue et d'ailleurs très simple.

Il n'y a donc, en réalité, qu'une simple infinité de solutions périodiques, de la première sorte, réellement distinctes; chacune d'elles est caractérisée par le rapport $\frac{n'_0}{n_0 - n'_0}$, ou, ce qui revient au même, par la différence entre la longitude d'une conjonction symétrique et celle de l'opposition qui la suit.

Recherches de M. Hill sur la Lune. — Les solutions périodiques de la première sorte se simplifient quand l'une des masses, m_2 par exemple, est infiniment petite.

Le mouvement de C par rapport à A restant képlérien, il ne peut y avoir conjonction symétrique, si le mouvement de C n'est pas circulaire, que lorsque C passe au périhélie ou à l'aphélie. Mais la différence entre les longitudes d'une conjonction et de l'opposition suivante serait un multiple de 2π et le rapport $\frac{n'_0}{n'_0 - n_0}$

serait entier, ce qui n'est pas pour les solutions de la première sorte. Le mouvement de C est donc circulaire.

La simplicité s'accroît encore quand la masse de C est beaucoup plus grande que celle de A et que la distance AC est très grande. Ce cas se rencontre dans la théorie de la Lune.

M. Hill a montré qu'avec des axes mobiles convenablement choisis les équations du mouvement de la Lune s'écrivaient

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{\mu}{r^3} - 3n^2\right)\xi = 0,$$
$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - 2n\frac{d\xi}{dt} + \frac{\mu}{r^3}\eta = 0.$$

Il en a trouvé des solutions périodiques qui comportent, outre les conjonctions et oppositions symétriques des solutions de la première sorte, d'autres situations remarquables qu'on pourrait appeler des *quadratures symétriques*.

Ces équations admettent une intégrale qui s'écrit

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - \frac{\mu}{2} - \frac{3}{2}n^2\xi^2 = C.$$

M. Hill a étudié comment varient les solutions de la première sorte quand on fait augmenter C; il a reconnu que la trajectoire relative est une courbe fermée symétrique dont la forme rappelle grossièrement celle d'une ellipse ayant l'axe des η pour grand axe. Quand C est très petite, cette sorte d'ellipse diffère très peu d'un cercle et son excentricité augmente rapidement avec C. Pour des valeurs plus grandes de C, la courbe commence à différer beaucoup [redacted]

laquelle cette sorte de satellites ne seraient jamais en quadrature. Ces solutions présentent, au contraire, trois quadratures entre deux syzygies consécutives. Les solutions pour lesquelles le satellite n'est jamais en quadrature ne sont pas la continuation analytique de celles dont M. Hill a fait si magistralement l'étude dans l'*American Journal*.

Application au problème général de la Dynamique. — M. Poincaré considère les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{dF}{dy_i}, \\ \dfrac{dy_i}{dt} = -\dfrac{dF}{dx_i}, \end{cases} \qquad F = F_0 + \mu F_1 + \ldots,$$

F étant fonction périodique des y, F_0 ne dépendant que des x. Il suppose trois degrés de liberté, mais ses raisonnements et ses conclusions sont générales.

Quand $\mu = 0$, les équations admettent la solution périodique, de période T,

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad x_3 = a_3,$$
$$y_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2, \qquad y_3 = n_3 t + \varpi_3,$$

les a et les ϖ étant des constantes d'intégration et les n des fonctions des a.

Soient, dans une certaine solution, μ très petit, mais pas nul,

$$x_i = a_i + \beta_i, \qquad y_i = \varpi_i + \beta_{i+3}$$
et
$$x_i = a_i + \beta_i + \Psi_i, \qquad y_i = \varpi_i + n_i T + \Psi_{i+3},$$

les valeurs de x_i, y_i respectivement pour $t = 0$ et $t = T$.

La condition pour que cette solution soit périodique, de période T, c'est que l'on ait

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = \Psi_5 = \Psi_6 = 0.$$

Ces équations ne sont pas distinctes, à cause de $F = \text{const.}$, et les trois premières contiennent μ en facteur. On peut encore choisir l'origine du temps de façon que $\varpi_1 = \beta_4 = 0$. Il reste donc cinq équations

$$(2)\qquad \frac{\Psi_2}{\mu} = \frac{\Psi_3}{\mu} = \Psi_4 = \Psi_5 = \Psi_6 = 0.$$

M. Poincaré montre que, pour $\mu = 0$, le déterminant fonctionnel de Ψ_4, Ψ_5, Ψ_6 est égal, au facteur près $-T^3$, au hessien de F_0 par rapport aux x, et qu'en désignant par $[F_1]$ la valeur moyenne de la fonction périodique F, on a

$$\frac{\Psi_i}{\mu} = T\frac{d[F_1]}{d\varpi_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Il en conclut que l'on peut toujours satisfaire aux équations (2) pour $\mu = 0$; que, d'autre part, leur déterminant fonctionnel $\frac{\partial\left(\frac{\Psi_2}{\mu}, \frac{\Psi_3}{\mu}, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6\right)}{\partial(\beta_i, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6)}$ est le produit de deux autres $\frac{\partial\left(\frac{\Psi_2}{\mu}, \frac{\Psi_3}{\mu}\right)}{\partial(\beta_2, \beta_3)}$ et $\frac{\partial(\Psi_4, \Psi_5, \Psi_6)}{\partial(\beta_1\, \beta_2, \beta_3)}$, et qu'à des facteurs constants près, ceux-ci sont respectivement égaux, l'un au hessien de $[F_1]$ par rapport à ϖ_2 et à ϖ_3, l'autre au hessien de F_0 par rapport aux x. Donc, si aucun de ces deux hessiens n'est nul, les équations (1) admettront des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ.

Quand le hessien de F_0, par rapport aux variables x, est nul, on peut encore, dans certains cas, tourner la difficulté en formant une fonction $\Phi(F_0)$ dont le hessien ne soit pas nul. Il en est ainsi dans le cas particulier du problème des trois corps où une masse est nulle et où les deux autres décrivent des cercles autour de leur centre de gravité, supposé fixe.

L'artifice précédent n'est pas applicable au cas général du problème des trois corps; F_0 ne dépend que de x_1 et x_2, quel que soit Φ, le hessien de $\Phi(F_0)$ est nul. Les difficultés proviennent de ce

[redacted]

Calcul direct des séries. — Après avoir démontré que les équations (1)

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{dF}{dy_i} \\ \dfrac{dy_i}{dt} = -\dfrac{dF}{dx_i} \end{cases} \qquad F = F_0 + \mu F_1 + \ldots$$

avaient des solutions périodiques développables suivant les puissances de μ, M. Poincaré cherche à former effectivement ces séries, c'est-à-dire à satisfaire aux équations en faisant

$$(2)\quad \begin{cases} x_i = x_i^{(0)} + \mu x_i^{(1)} + \mu^2 x_i^{(2)} + \ldots, \\ y_i = y_i^{(0)} + \mu y_i^{(1)} + \mu^2 y_i^{(2)} + \ldots, \end{cases}$$

les $x_i^{(k)}$, $y_i^{(k)}$ étant des fonctions périodiques du temps.

A cet effet, il substitue les formules (2), à la place de x_i et y_i, dans F et ordonne les résultats suivant les puissances de μ. Il trouve ainsi, en posant $\dfrac{dF_0}{dx_i^0} = -n_i$ et $n_2 = n_3 = 0$,

$$\begin{aligned} F &= \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \ldots, \\ \Phi_0 &= F_0, \\ \Phi_1 &= F_0(x_i^0, y_i^0) - n_1 x_1', \\ \Phi_k &= \Theta_k + x_1^k \frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^k \frac{dF_0}{dx_2^0} + x_3^k \frac{dF_0}{dx_3}, \end{aligned}$$

et Θ_k dépendra seulement des

$$x_i^0,\ x_i^1,\ \ldots,\ x_i^{(k-1)},$$
$$y_i^0,\ y_i^1,\ \ldots,\ y_i^{(k-1)}.$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de μ dans les deux membres, il obtient d'abord

$$(3)\quad \frac{dx_1^0}{dt} = \frac{dx_2^0}{dt} = \frac{dx_3^0}{dt} = 0, \qquad \frac{dy_1^0}{dt} = n_1, \qquad \frac{dy_2^0}{dt} = n_2, \qquad \frac{dy_3^0}{dt} = n_3.$$

Il trouve ensuite

$$(4)\quad \frac{dx_i^k}{dt} = \frac{d\Phi_k}{dy_i^0},$$

$$(5)\quad \frac{dy_i^k}{dt} = -\frac{d\Phi_k}{dx_i^0} = -\frac{d\Theta_k}{dx_i^0} - x_1^k \frac{d^2F_0}{dx_1^0\,dx_i^0} - x_2^k \frac{d^2F_0}{dx_2^0\,dx_i^0} - x_3^k \frac{d^2F_0}{dx_3^0\,dx_i^0}.$$

Il intègre successivement chacun de ces groupes d'équations en

déterminant chaque fois les constantes d'intégration de façon à faire disparaître les termes constants qui se trouvent dans le groupe suivant.

Ce procédé ne serait en défaut que si le hessien de F_0, par rapport aux x_1^0, ou celui de $[F_1]$, par rapport à ϖ_2 et ϖ_3 était nul.

On peut démontrer directement la convergence des développements précédents. M. Poincaré le fait pour l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mu f(x, y) = 0, \tag{8}$$

considérée successivement par Gyldén et Lindstedt et dont l'intégration se ramène à celle d'un système canonique à deux degrés de liberté. Son raisonnement s'applique tout aussi bien au cas général.

Tout ce qui précède n'est plus applicable quand le hessien de F_0, par rapport aux x, est nul; mais il existe encore des solutions périodiques dans certains cas particuliers. M. Poincaré examine celui où il y a quatre degrés de liberté et où F_0 ne contient que deux des variables x, soient x_1 et x_2; à cet effet, il considère encore une solution périodique correspondante à $\mu = 0$ et il cherche, comme dans le problème général, les accroissements à donner aux valeurs initiales pour obtenir une solution périodique lorsque μ n'est plus nul, tout en conservant la même durée T pour la période. Il écrit donc qu'aux époques 0 et T les valeurs des variables linéaires sont les mêmes et que celles des variables angulaires diffèrent seulement d'un multiple de 2π. Il est ainsi conduit, en [redacted]

des équations (9) est d'ordre impair. Or il a démontré précédemment qu'à un maximum de R correspondait toujours une solution d'ordre impair. Donc, quand le hessien de F_0 est nul, et que la fonction R admet un maximum ou un minimum, il existe encore des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ.

Solutions de la deuxième sorte. — M. Poincaré applique les considérations précédentes aux équations du problème des trois corps dans le plan et détermine ainsi les solutions de la deuxième sorte. Il adopte les variables

$$\begin{matrix} \beta L = \Delta, & \beta' L' = \Delta', & H, \\ l, & l' & h. \end{matrix}$$

Une solution est périodique si, au bout d'une période Δ, Δ' et H ont repris leurs valeurs primitives, et si l, l' et h ont augmenté d'un multiple de 2π. La fonction F est égale à

$$F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots,$$

et F_0 ne dépend que de Δ et de Δ'.

Pour $\mu = 0$, les équations admettent la solution

$$(q) \qquad \begin{cases} \Delta = \Delta_0, & \Delta' = \Delta'_0, & H = H_0, \\ l = nt + l_0, & l' = n't + l'_0 & h = h_0, \end{cases}$$

Δ_0, Δ'_0, H_0 et h_0 étant des constantes et $n = \frac{dF_0}{d\Delta_0}$, $n' = \frac{dF_0}{d\Delta'_0}$.

On a

$$F_1 = \Sigma A \cos(m_1 l + m_2 l' + m_3 h + k),$$

A et k sont des fonctions de Δ, Δ', H.

En y substituant les valeurs (q) des variables, F_1 devient

$$F_1 = \Sigma A \cos(\alpha t + \beta).$$

Soit R la valeur moyenne de cette fonction, c'est-à-dire l'ensemble des termes α est nul.

On détermine Δ_0 et Δ'_0 de façon que, pour $\mu = 0$, la durée de la période soit T, et l'on trouve les valeurs des autres variables en résolvant les équations

$$\frac{dF_0}{dH_0} = \frac{dR}{dl_0} = \frac{dR}{dl'_0} = \frac{dR}{dh_0} = 0.$$

Ce système peut être réduit à

$$\frac{dR}{dH_0} = \frac{dR}{dl^0} = \frac{dR}{dh_0} = 0.$$

Il suffit donc, pour établir l'existence des solutions de la deuxième sorte, de démontrer que la fonction R a un maximum. Or la fonction F_1 ne contient que des cosinus, il en est de même de R et pour $l_0 = l'_0 = h_0 = 0$, on a

$$\frac{dR}{dl_0} = \frac{dR}{dh_0} = 0;$$

il ne reste qu'à satisfaire à l'équation

$$\frac{dR}{dH_0} = 0.$$

Mais la fonction R est développable suivant les puissances de $\sqrt{\Delta_0^2 - H_0^2}$ et $\sqrt{\Delta_0^2 - (H_0 - C)^2}$, elle n'est réelle que si H_0 est compris entre deux limites Δ_0 et $\Delta_0 + C$: elle a donc un maximum et un minimum. Il existe, au moins, deux solutions de la deuxième sorte pour lesquelles

$$l_0 - l'_0 = h_0 = 0.$$

Si $\mu = 0$, les valeurs initiales de l, l', h sont nulles, il y a conjonction symétrique. Il en est encore de même pour les petites valeurs de μ et, en outre, il y a conjonction symétrique au milieu de la période.



[redacted]

Il peut encore arriver que le mouvement d'un astre présente une inégalité importante et que son orbite diffère peu d'une solution périodique; le coefficient de l'inégalité considérée dans celle-ci sera une valeur approchée du coefficient dans le mouvement véritable. C'est ainsi que la solution de M. Hill permet de calculer aisément l'inégalité du mouvement lunaire connue sous le nom de *variation*.

Un autre cas qui se présente souvent, et sur lequel M. Poincaré attire particulièrement l'attention des astronomes, est celui où le rapport $\frac{n'}{n'-n}$, n et n' étant les moyens mouvements, est très peu différent d'un nombre entier. Il existe alors une solution périodique de la première sorte dont le mouvement présente une inégalité très considérable. Si les conditions initiales véritables de l'orbite diffèrent peu de celles qui correspondent à une semblable solution périodique, cette grande inégalité existera encore et le coefficient en sera sensiblement le même.

On pourra donc, avec avantage, en calculer la valeur par la considération des solutions périodiques. Tisserand a procédé ainsi dans l'étude du mouvement d'Hypérion.

Les mêmes considérations sont applicables à Uranus et à Neptune, où le rapport des mouvements est voisin de $\frac{1}{2}$. Elles le sont encore à toutes les petites planètes dont le moyen mouvement est presque double de celui de Jupiter.

Mais l'exemple le plus frappant est fourni par Laplace, dans son admirable théorie des sept satellites de Jupiter. Il existe, en effet, de véritables solutions périodiques quand, au lieu de trois corps, on en considère quatre ou un plus grand nombre.

CHAPITRE IV.

Équations aux variations. — Quand les conditions initiales du mouvement d'un astre diffèrent peu de celles qui correspondent à une solution périodique, les coordonnées réelles sont peu différentes, au moins pendant un certain temps, des coordonnées d'un astre fictif qui décrirait la solution périodique. Dans une première approximation, on peut négliger les carrés de leurs différences.

Il en résulte que

$$\beta_i(e^{\alpha T} - 1) = \frac{d\Psi_i}{d\beta_1}\beta_1 + \frac{d\Psi_i}{d\beta_2}\beta_2 + \ldots + \frac{d\Psi_i}{d\beta_n}\beta_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En éliminant les β entre les n équations, on obtient l'équation qui définit les exposants caractéristiques

$$\begin{vmatrix} \frac{d\Psi_1}{d\beta_1} + 1 - e^{\alpha T}, & \frac{d\Psi_1}{d\beta_2}, & \frac{d\Psi_1}{d\beta_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots \\ \frac{d\Psi_n}{d\beta_1}, & \ldots, & \frac{d\Psi_n}{d\beta_n} + 1 - e^{\alpha T} \end{vmatrix} = 0.$$

Il est évident que, dans les dérivées des Ψ_i, on annule les β, après la différentiation.

M. Poincaré énonce les résultats précédents en disant que l'on obtient les exposants caractéristiques α en formant le déterminant fonctionnel des Ψ par rapport aux β et l'équation en S correspondante; les racines de cette équation sont égales à $e^{\alpha T} - 1$.

D'autre part, si les équations (1) qui dépendent d'un paramètre μ admettent, pour $\mu = 0$, une solution périodique dont aucun des exposants caractéristiques ne soit nul, elles admettront encore une solution périodique pour les petites valeurs de μ. Il en est encore de même si l'équation en S n'a qu'une seule racine nulle.

M. Poincaré considère ensuite certains cas particuliers et démontre :

1° Si les équations (1) contiennent le temps explicitement et [redacted]

2° Si, avec les mêmes conditions, relativement aux intégrales, les équations ne contiennent pas le temps, il y aura généralement $p+1$ exposants caractéristiques qui seront nuls.

Les équations de la Dynamique, où le temps n'entre pas explicitement, admettent toujours l'intégrale dite *des forces vives*, $F = \text{const.}$; s'il existe encore p intégrales uniformes telles que les crochets de ces intégrales, deux à deux, soient nuls, $2p+2$ exposants caractéristiques seront donc nuls, à moins que tous les déterminants fonctionnels de $F, F_1, \ldots, F_p$, par rapport à $p+1$ quelconques des variables x_i et y_i, ne soient nuls, à la fois, en tous les points de la solution périodique.

Développement des exposants. Calcul des premiers termes. — Soient $x_i = x_i^0$, $y_i = n_i^0 t + \varpi_i^0$ les valeurs initiales pour $t = 0$, de x_i et y_i;

Soient Δx_i et $n_i^0 T + \Delta y_i$ les accroissements que subissent x_i, y_i quand t passe de la valeur 0 à la valeur T.

L'équation qui donne les exposants caractéristiques s'obtient en égalant à zéro un déterminant dont les éléments sont donnés par le Tableau suivant, dans lequel la première colonne indique le numéro de la ligne, la deuxième le numéro de la colonne et la troisième fait connaître l'élément correspondant du déterminant :

n° de la ligne.	n° de la colonne.	Expression de l'élément.
$i \quad (i \leqq n)$	$k \quad (k \leqq n,\ k \gtrless i)$	$\dfrac{d\Delta x_k}{d\beta_i}$
$i \leqq n$	$k = i$	$\dfrac{d\Delta x_i}{d\beta_i} - S$
$i+n(i>0)$	$k \quad (k \leqq n)$	$\dfrac{d\Delta x_k}{d\varpi_i}$
$i \quad (i \leqq n)$	$k+n(k>0)$	$\dfrac{d\Delta y_k}{d\beta_i}$
$i+n(i>0)$	$k+n(k>0,\ k \leqq i)$	$\dfrac{d\Delta y_k}{d\varpi_i}$
$i+n(i>0)$	$k+n = i+n$	$\dfrac{d\Delta y_i}{d\varpi_i} - S$

Les racines de cette équation en S sont $e^{\alpha T} - 1$, α étant un des exposants caractéristiques.

M. Poincaré écrit cette équation

$$\mathcal{G}(\alpha_1, \mu) = 0.$$

Il pose $\alpha = \varepsilon\sqrt{\mu}$, forme l'équation en ε, $\mathcal{G}_1(\varepsilon, \sqrt{\mu}) = 0$ et montre que ε est développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Il discute l'équation $\mathcal{G}_1(\varepsilon, 0) = 0$, considère les cas où une ou plusieurs des variables x_i n'entrent pas dans F_0 et applique tous les résultats obtenus au problème des trois corps.

(*A suivre.*)

MÉLANGES.

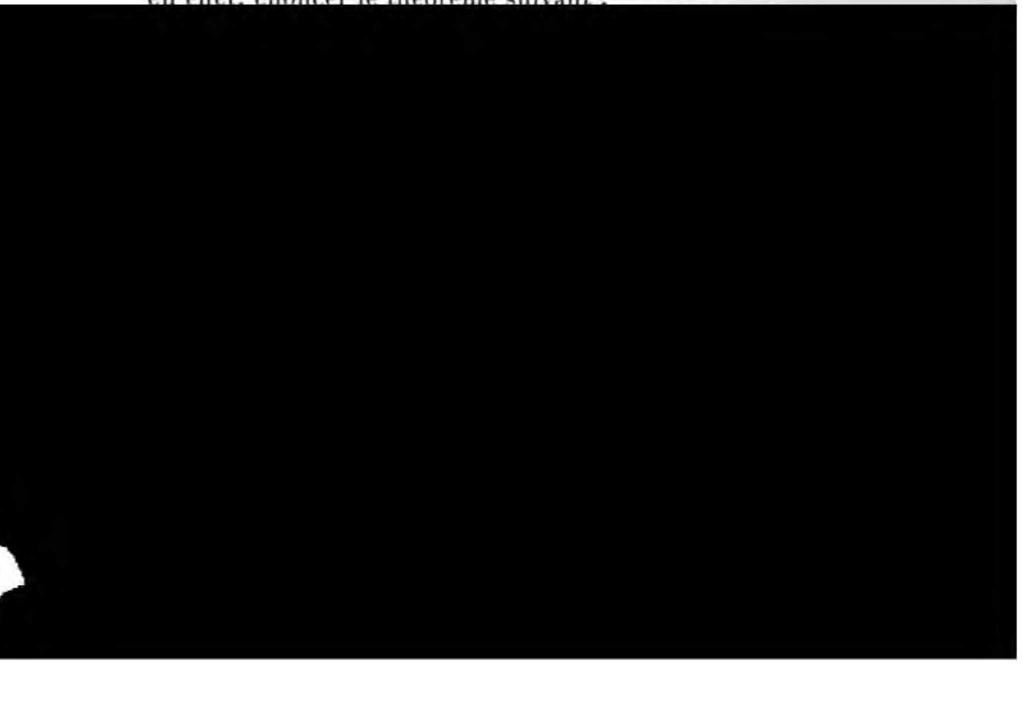
UNE INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES COORDONNÉES α, β, ξ DE M. DARBOUX;

PAR M. A. DEMOULIN,
Chargé de cours à l'Université de Gand.

Un plan quelconque étant défini par l'équation

$$(1 - \alpha\beta)X + i(1 + \alpha\beta)Y + (\alpha + \beta)Z + \xi = 0,$$

ses coordonnées (α, β, ξ) s'interprètent de la manière la plus simple au moyen de la transformation de contact obtenue par la combinaison des transformations de Lie et d'Ampère. On peut,


[redacted]

La transformation de Lie établit une correspondanc entre les sphères d'un espace (E) et les droites d'un espace (e). Les deux équations

$$X + iY + xZ + z = 0,$$
$$x(X - iY) - Z - y = 0$$

la définissent complètement. A la droite de l'espace (e) représentée par les équations

$$x = az + m, \qquad y = bz + n,$$

il correspond, dans l'espace (E), une sphère ayant pour équation

$$(1) \quad a(X^2 + Y^2 + Z^2) - (m + b)X - i(m - b)Y + (1 + am - bn)Z + n = 0.$$

En particulier, aux droites parallèles au plan des yz correspondent des sphères qui se réduisent à des plans.

Passons à la transformation d'Ampère. Elle fait correspondre aux éléments (x, y, z, p, q) de l'espace (e) les éléments (x', y', z', p', q') d'un espace (e') au moyen des formules

$$(2) \quad x = x', \qquad y = q', \qquad z = z' - q'y', \qquad p = p', \qquad q = -y'.$$

Cela rappelé, cherchons à définir la transformation qui résulte de la combinaison des deux transformations précédentes. A cet effet, il suffira de déterminer la surface de l'espace (E) qui correspond à un point (x', y', z') de l'espace (e'). Or, d'après les équations (2), au point (x', y', z'), il correspond, dans l'espace (e), la droite

$$x = x', \qquad z = z' - yy'.$$

Cette droite étant parallèle au plan des yz, la sphère qui lui correspond dans l'espace (E) est un plan π dont on obtient immédiatement l'équation par l'application de l'équation (1). On trouve ainsi

$$(1 - x'y')X + i(1 + x'y')Y + (x' + y')Z + z' = 0.$$

Les coordonnées (α, β, ξ) de ce plan sont bien les coordonnées cartésiennes du point qui lui correspond dans la transformation de Lie-Ampère. Si le point (x', y', z') décrit une surface définie par l'équation $f(x', y', z') = 0$, le plan π enveloppera la surface définie par l'équation $f(\alpha, \beta, \xi) = 0$.

Nous avons été conduit à cette interprétation des coordonnées (α, β, ξ) en cherchant à définir, en coordonnées cartésiennes, les surfaces de l'espace (e) qui correspondent aux surfaces de Weingarten de l'espace (E). L'équation aux dérivées partielles qu'on obtient, bien que très simple, ne se présente pas sous une forme symétrique ; au contraire, elle acquiert une grande élégance si on lui applique la transformation d'Ampère, mais alors on constate qu'elle est identique à l'équation aux dérivées partielles des surfaces de Weingarten en coordonnées de M. Darboux. Cette coïncidence s'explique sur-le-champ par le théorème qui fait l'objet de cette Note.



COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

H. POINCARÉ. — Les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste, t. I.

[Suite et fin.]

CHAPITRE V.

Non-existence des intégrales uniformes. — Soient les équations

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i},$$
$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots,$$

F_0 ne dépendant que de x_i et son hessien par rapport à ces n variables n'étant pas nul.

Soit Φ une fonction des x, des y et de μ, périodique par rapport aux y, analytique et uniforme pour toutes les valeurs réelles des y, pour les valeurs suffisamment petites de μ et pour les systèmes de valeurs des x appartenant à un certain domaine D, d'ailleurs aussi petit que l'on veut.

Dans ces conditions, la fonction Φ est développable, par rapport aux puissances de μ, et l'on peut écrire

$$\Phi = \Phi_0 + \mu \Phi_1 + \mu^2 \Phi_2 + \ldots,$$

Φ_0, Φ_1, Φ_2, ... étant uniformes par rapport aux x et aux y, et périodiques par rapport aux y.

M. Poincaré démontre qu'une fonction Φ de cette forme et autre que F ne peut pas être une intégrale des équations (1).

En effet, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction Φ soit une intégrale s'écrit

$$[F, \Phi] = 0,$$

ou, en remplaçant F et Φ par leurs développements,

$$0 = [F_0, \Phi_0] + \mu \{ [F_1, \Phi_0] + [F_0, \Phi_1] \} + \ldots.$$

On a donc, séparément,

$$[F_0, \Phi_0] = 0,$$
$$[F_1, \Phi_0] + [F_0, \Phi_1] = 0.$$

De ces deux équations et de la forme supposée à F_0 et Φ, il résulte que Φ ne peut pas être distinct de F.

M. Poincaré considère ensuite le cas où le hessien de F_0 est nul, F_0 ne dépendant pas de toutes les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Il suppose que F_0 ne dépend que de x_1, x_2 et que son hessien par rapport à ces deux variables n'est pas nul. Pour bien marquer la différence entre x_1, x_2 et leurs conjugués y_1, y_2 d'une part, et les autres variables x, y d'autre part, il désigne celles-ci par la notation

$$z_1, z_2, \ldots, z_{n-2},$$
$$u_1, u_2, \ldots, u_{n-2},$$

et démontre d'abord que, s'il existe une intégrale Φ distincte de F, on peut toujours supposer que Φ_0 n'est pas fonction de F_0.

Cela posé, il considère encore l'équation

$$[F_0, \Phi_0] = 0$$

et pose

$$\zeta = e^{\sqrt{-1}(m_1 y_1 + m_2 y_2)};$$

Φ_0 prend la forme $\Phi_0 = \Sigma A\zeta$, les A ne dépendant que de x_1, x_2 des z et des u.

La relation entre F_0 et Φ_0 devient

$$m_1 \frac{dF_0}{dx_1} + m_2 \frac{dF_0}{dx_2} = 0;$$

elle ne peut avoir lieu que si m_1 et m_2 sont nuls. Φ_0 ne dépend donc pas des y.

En posant de même

[redacted]

dépendent de C, il suffit de donner aux x des valeurs telles que

$$m_1 \frac{dF_0}{dx_1} + m_2 \frac{dF_0}{dx_2} = 0.$$

M. Poincaré dit que le coefficient B est de la classe $\frac{m_1}{m_2}$ et que deux coefficients $B m_1 m_2$, $B m'_1 m'_2$ appartiennent à une même classe quand $m_1 m'_2 - m_2 m'_1 = 0$.

La relation (a) doit avoir lieu pour tous les coefficients B de la même classe $\frac{m_1}{m_2}$.

Soient alors p et q deux nombres entiers premiers entre eux, tels que $\frac{m_1}{m_2} = \frac{p}{q}$.

En posant

$$\zeta = e^{\sqrt{-1}(py_1+qy_2)},$$
$$D\lambda = B_{\lambda p, \lambda q} \zeta^\lambda, \qquad -\zeta H = p \frac{d\Phi_0}{dx_1} + q \frac{d\Phi_0}{dx_2},$$

on devra avoir, pour toutes les valeurs entières de λ, positives, négatives ou nulles,

$$H \frac{d D\lambda}{d\zeta} + \sum \left(\frac{d D\lambda}{dz_i} \frac{d\Phi_0}{du_i} - \frac{d D\lambda}{du_i} \frac{d\Phi_0}{dz_i} \right) = 0.$$

Cela ne peut avoir lieu que de deux manières différentes :

1° Si Φ_0 est fonction de F_0 ;

2° Si le jacobien de $2n-3$ quelconques des fonctions $D\lambda$, par rapport aux $2n-3$ variables ζ, z_i et u, est nul.

La première conclusion est contraire à l'hypothèse faite au début, la deuxième conduit à admettre que toutes les fonctions $D\lambda$ peuvent s'exprimer à l'aide de $2n-4$ d'entre elles. Or, les coefficients du développement de la fonction F sont des données du problème et il n'y a, généralement, aucune relation entre eux. Il n'existe donc pas, en général, d'intégrale analytique et uniforme autre que F.

Toutes les considérations précédentes sont directement applicables aux divers cas du problème des trois corps.

Dans le problème restreint, il y a deux degrés de liberté et

quatre variables :

$$x_1 = L, \quad x_2 = G,$$
$$y_1 = l, \quad y_2 = g - l,$$

et l'on a

$$F_0 = \frac{1}{2x_1^2} + x_2.$$

Le hessien de F_0 est nul, mais on peut revenir au cas où il ne l'est pas. Pour qu'il existât une intégrale uniforme, il faudrait donc que, dans le développement de F_1 (qui est la fonction perturbatrice des astronomes), suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1 et y_2, tous les coefficients s'annulassent au moment où ils deviendraient séculaires, et l'on sait que cela n'est pas.

Le problème restreint n'admet donc pas d'intégrale uniforme distincte de F.

Dans le cas général des mouvements plans, on réduit le nombre des degrés de liberté à trois, en employant les variables définies dans le Chapitre I, à savoir

$$\beta L, \quad \beta' L', \quad \beta\Pi = H,$$
$$l, \quad l', \quad \varpi - \varpi' = h.$$

On connaît le développement de la fonction F_1, sous la forme

$$F_1 = \Sigma B\, m_1\, m_2\, e^{\sqrt{-1}(m_1 l + m_2 l')},$$

et l'on sait que les B sont des fonctions distinctes. Il n'y a donc pas d'intégrale uniforme de la forme

$$\Phi(L, L', H, l, l', h) = \text{const.},$$

[redacted]

mettait pas de nouvelle intégrale algébrique en dehors, des intégrales déjà connues.

Le théorème de M. Poincaré est plus général, puisqu'il démontre la non-existence non seulement d'intégrale algébrique, mais aussi d'intégrale transcendante uniforme, même dans un domaine restreint. Par contre, le théorème de M. Brüns existe pour toutes les valeurs des masses, et celui de M. Poincaré pour les petites masses seulement.

Problèmes de la dynamique où il existe une intégrale uniforme. — M. Poincaré vérifie que, dans certains problèmes où l'on connaît une intégrale uniforme, les conditions énoncées précédemment sont bien vérifiées. Il considère, à ce point de vue, le mouvement d'un point mobile M attiré par deux centres fixes A et B et le mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe.

Il montre enfin que toutes ses conclusions subsistent encore lors même que l'intégrale uniforme Φ est seulement développable suivant les puissances fractionnaires de μ.

CHAPITRE VI.

M. Poincaré rappelle les principes de la méthode de M. Darboux, qui permet de trouver, pour une fonction d'une variable, les coefficients de rang élevé dans la série de Fourier ou dans celle de Taylor, quand on connaît les propriétés analytiques de la fonction représentée par ces séries.

Il l'étend ensuite aux fonctions de deux variables et applique ses résultats à la partie principale de la fonction perturbatrice que nous allons définir.

Dans le Chap. I, M. Poincaré a donné, pour la fonction F, l'expression

$$F = \frac{y_1^2+y_2^2+y_3^2}{2\beta} + \frac{y_4^2+y_5^2+y_6^2}{2\beta'} - \frac{m_2 m_3}{\mu\,\mathrm{BC}} - \frac{m_3 m_1}{\mu\,\mathrm{AC}} - \frac{m_1 m_2}{\mu\,\mathrm{AB}}.$$

Les quantités $(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$, $(y_4^2+y_5^2+y_6^2)$ et AB dépendent seulement des variables képlériennes, tandis que x_2, x_3, AC, BC dépendent encore de μ; en les développant suivant les puis-

sances de μ, on trouve

$$\alpha_2 = \beta + \frac{\mu\beta^2}{m_1} + \text{termes en } \mu^2,$$

$$\alpha_3 = \beta' + \frac{\mu\beta'^2}{m_1} + \ldots,$$

$$\frac{1}{BC} = \frac{1}{\sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 - 2\,ABCD\cos D}} + \text{termes en } \mu,$$

$$\frac{1}{AC} = \frac{1}{CD} - \frac{\beta\mu}{m_1}\frac{AB\cos D}{cD^2} + \text{termes en } \mu^2.$$

En posant

$$F = F_0 + \mu F_1 + \ldots,$$

on a immédiatement l'expression de F_0 et celle de F_1.

On trouve

$$F_1 = \frac{-\beta^2}{AB} - \frac{\beta'^2}{CD} - \frac{\beta\beta'}{\sqrt{AB^2 + CD^2 - 2\,ABCD\cos\eta}} + \frac{\beta\beta' AB\cos D}{CD^2}.$$

Le premier terme $\frac{-\beta^2}{AB}$ ne donne, dans le développement, que des termes dépendant de l'anomalie l, et le deuxième $= -\frac{\beta'^2}{CD}$ de l'anomalie l'.

$$\frac{\beta\beta' AB\cos D}{CD^2} = AB\cos v\frac{\cos v'}{CD^2} + \cos i(AB\sin v)\frac{\sin v'}{CD^2}.$$

En outre,

$$\frac{\beta\beta' AB\cos D}{CD^2} = (AB\cos v)\frac{\cos v'}{CD^2} + \cos i(AB\sin v)\frac{\sin v'}{CD^2}.$$

1° Soit une série $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$, admettant r pour rayon de convergence ; quand n croît indéfiniment, on a

$$\text{limite } a_n \rho^n = 0, \qquad \text{si } \rho < r,$$
$$\text{limite } a_n \rho^n = \infty, \qquad \text{si } \rho > r.$$

2° Si la fonction $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ demeure finie sur la circonférence de rayon r, ainsi que ses p premières dérivées, le produit $n^{p+1} a_n r^n$ ne croît pas au delà de toute limite quand n augmente.

3° Si l'on a

$$\Phi(n) = (1 - \alpha x)^k = \Sigma a_n x^n,$$

on aura approximativement

$$a_n = \frac{n^{1-k} \alpha^n}{\Gamma(-k)};$$

4° Si la fonction Φ a, sur la circonférence de rayon r, deux points singuliers, et si l'on connaît son développement dans leur voisinage, on peut en déduire la valeur approximative de a_n.

5° Si l'on a

$$\Phi(x) = \log(1 - x),$$

on aura approximativement

$$a_n = \frac{-n^{1-k} \log n}{\Gamma(-k)}.$$

6° Si l'on a

$$\Phi(x) = \Sigma a_n x^n + \Sigma a_{-n} x^{-n},$$

et si Φ est ainsi développable dans un anneau limité par deux circonférences de rayon r et R, les valeurs approximatives des coefficients a_n dépendent uniquement des singularités de $\Phi(x)$ sur ces deux circonférences limites.

M. Poincaré applique ces principes au développement d'une fonction F_1^0 des deux anomalies moyennes l et l' sous la forme

$$F_1^0 = \Sigma A m_1 m_2 e^{\sqrt{-1}(m_1 l + m_2 l')}.$$

Il a

$$4\pi^2 A m_1 m_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1^0 e^{-\sqrt{-1}(m_1 l + m_2 l')} dl\, dl'.$$

Il dit que l'on a approximativement

$$A m_1 m_2 = \varphi(n) \qquad (m_1 = an + b, \qquad m_2 = cn + d).$$

si le rapport $\frac{\mathrm{A}m_1 m_2}{\varphi(n)}$ tend vers l'unité quand n croît indéfiniment et que a, b, c, d restent finis.

Cela étant, il se propose de trouver une valeur approchée du coefficient $\mathrm{A}m_1 m_2$ quand, le rapport $\frac{m_1}{m_2}$ étant donné et fini, les deux nombres m_1 et m_2 sont très grands, ou, plus généralement, quand on a

$$m_1 = an + b, \qquad m_2 = cn + d,$$

a, b, c, d étant des entiers finis et n un entier très grand, a et c sont premiers entre eux.

A cet effet, il fait le changement de variables défini par

$$e^{\sqrt{-1}\,l} = t^c, \qquad e^{\sqrt{-1}\,l'} = t^{-a} z^{\frac{1}{c}}.$$

Il exprime F_1^0 à l'aide de nouvelles variables z, t et pose, pour abréger,

$$\mathrm{F}(z, t) = \mathrm{F}_1^0\, t^{ad-bc-1} z^{-\frac{d}{c}}.$$

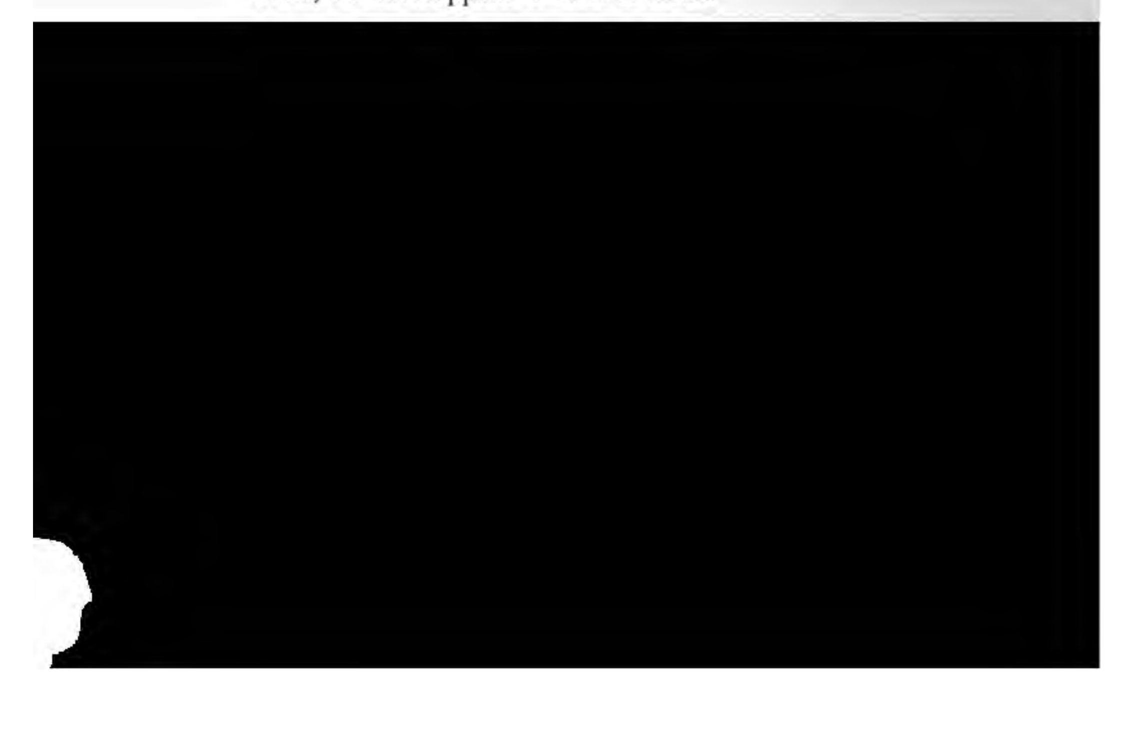
Il considère ensuite l'intégrale

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi}\int \mathrm{F}(z, t)\, dt,$$

prise par rapport à t, le long de la circonférence $|t| = 1$ et montre que

$$\Phi(z) = \Sigma\, \mathrm{A}m_1 m_2 z^n.$$

Donc, en développant Φ sous la forme



cela pour différentes raisons dont la principale est que la fonction $F(z, t)$ n'est pas uniforme.

M. Poincaré détermine, par une discussion spéciale, ceux qui conviennent, en se bornant au cas où le mouvement se passe dans un plan.

Soient u et u' les anomalies excentriques, L^2, L'^2 les grands axes, ϖ et ϖ' les longitudes des périhélies, on aura

$$l = u - \sin\Phi \sin u, \qquad l' = u' - \sin\Phi' \sin u'.$$

Les coordonnées de la première planète, par rapport au grand axe de son ellipse et à une perpendiculaire menée par le foyer, seront les parties réelle et imaginaire de ξL^2, en posant

$$\xi = \cos u - \sin\Phi + \sqrt{-1}\cos\Phi \sin u;$$

celles de la deuxième planète, par rapport aux mêmes axes que les précédentes, seront les parties réelle et imaginaire de

$$\eta L'^2 e^{\sqrt{-1}(\varpi'-\varpi)},$$

avec

$$\eta = \cos u' - \sin\Phi' + \sqrt{-1}\cos\Phi' \sin u'.$$

En posant encore

$$\beta = L'^2 L^{-2} e^{\sqrt{-1}(\varpi'-\varpi)},$$

et, en désignant par ξ_0, η_0, β_0 les valeurs conjuguées de ξ, η, β, il vient

$$L^2 F_1^0 = \frac{1}{\sqrt{(\xi - \beta\eta)(\xi_0 - \beta_0\eta_0)}}.$$

Les points singuliers de F_1^0 sont ceux pour lesquels u, u', et, par conséquent, ξ, η, ξ_0, η_0 cessent d'être des fonctions uniformes de l et de l', et, par conséquent, de z et de t, et, en outre, ceux pour lesquels

$$\xi = \beta\eta, \qquad \xi_0 = \beta_0\eta_0.$$

Ils sont donc donnés par les quatre équations

$$\frac{dl}{du} = \frac{dl'}{du'} = 0, \qquad H = \xi - \beta\eta = 0, \qquad H_0 = \xi_0 - \beta_0\eta_0 = 0.$$

Pour trouver les points singuliers de $\Phi(z)$, il suffit d'exprimer que deux des points singuliers de $F(z, t)$ se confondent; mais cela

peut arriver de deux manières : ou bien, un point singulier défini par l'une des quatre équations précédentes va se confondre avec un point singulier défini par une autre des quatre équations. M. Poincaré dit que le point correspondant est un point singulier de première espèce; ou bien, deux points singuliers d'une même équation se confondront en un seul pour donner un point de la deuxième espèce.

M. Poincaré pose

$$x = e^{iu}, \qquad y = e^{iu'},$$

et exprime les équations précédentes en x et y; elles sont alors réciproques et il peut les résoudre.

Il trouve ainsi quatorze points singuliers : sept qui correspondent à des valeurs très petites de x, y et, par suite, de z; sept qui correspondent à des valeurs très grandes des mêmes quantités. Il détermine ensuite, dans un certain nombre de cas particuliers, celui de ces points pour lequel le module de z est le plus grand et, à cause de la réciprocité, en déduit celui pour lequel le module de z est le plus petit. Il indique aussi de quelle manière la discussion doit être conduite dans le cas général.

Après avoir déterminé le point singulier de $\Phi(z)$ qui convient à la question, c'est-à-dire les deux circonférences $(z) = r$, $(z) = \mathrm{R} = \frac{1}{r}$ qui limitent le domaine où la fonction Φ est développable par la série de Laurent, et les points singuliers qui s'y trouvent; en général il n'y en aura qu'un seul, z_0 sur la circonférence $(z) = r$, M. Poincaré applique à Φ la méthode de M. Dar-



est de reconnaître si certains termes, d'ordre très élevé, mais affectés, à cause de la commensurabilité des moyens mouvements, de diviseurs très petits, sont ou ne sont pas négligeables. Ils le sont généralement et il suffit alors de se faire une idée de leur ordre de grandeur.

M. Poincaré indique, comme exemple, la célèbre inégalité de Pallas. Pour l'étudier, il faut faire le calcul en prenant

$$a=2, \quad b=1, \quad c=-1, \quad d=0, \quad n=8.$$

d'où

$$m=17, \quad m_2=-8.$$

CHAPITRE VII.

Solutions asymptotiques. — Soient

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i \quad (i=1,2,\ldots,n), \tag{1}$$

n équations où les X_i sont des fonctions des x et de t, développables par rapport aux x et périodiques, de période 2π, par rapport à t.

Soit

$$x_i=x_i^0$$

une solution particulière périodique. En posant $x_i=x_i^0+\xi_i$, il vient

$$\frac{d\xi_i}{dt}=\Xi_i. \tag{2}$$

En supposant que les ξ_i sont petits et en négligeant leurs carrés, les équations (2) deviennent les équations aux variations

$$\frac{d\xi_i}{dt}=\frac{dX_i}{dx_1^0}\xi_1+\frac{dX_i}{dx_2^0}\xi_2+\ldots+\frac{dX_i}{dx_n^0}\xi_n;$$

elles sont linéaires et à coefficients périodiques; la forme de leur solution générale est

$$\xi_i=A_1e^{\alpha_1 t}\Phi_{1,i}+A_2e^{\alpha_2 t}\Phi_{2,i}+\ldots+A_ne^{\alpha_n t}\Phi_{n,i};$$

les α sont les exposants caractéristiques, les Φ des fonctions périodiques de t.

M. Poincaré pose

$$\xi_i=\eta_1\Phi_{1i}+\eta_2\Phi_{2i}+\eta_3\Phi_{3i}+\ldots+\eta_n\Phi_{ni},$$

et substitue dans les équations (2); il trouve ainsi :

$$(2') \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = H_i,$$

où les H_i sont des fonctions de t et des η de même façon que les Ξ.

On peut les écrire

$$(2'') \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = H_i^1 + H_i^2 + \ldots + H_i^n + \ldots;$$

H_i^p représente l'ensemble des termes de H_i qui sont de degré p par rapport aux η. D'autre part les équations aux variations deviennent

$$(3') \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = H_i' = \alpha_i \eta_i.$$

La solution générale de (2') est développable suivant les puissances des $A_i e^{\alpha_i t}$, les coefficients étant des fonctions périodiques de t; on peut donc écrire

$$(4') \qquad \eta_i = \eta_i^1 + \eta_i^2 + \ldots + \eta_i^p + \ldots,$$

où η_i^p représente l'ensemble des termes de η_i qui sont de degré p par rapport aux A. En substituant ces valeurs (4) dans les équations (2''), M. Poincaré trouve :

$$\frac{d\eta_i^1}{dt} = \alpha_i \eta_i^1, \qquad \eta_i = A_i e^{\alpha_i t},$$

$$\frac{d\eta_i^2}{dt} - \alpha_i \eta_i^2 = H_i^{2,2},$$

[redacted]

Il y aurait exception si l'on avait

$$\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i = 0,$$

auquel cas il s'introduirait des termes en t dans les formules.

M. Poincaré montre ensuite que ces séries convergent si aucun des deux polygones convexes qui enveloppent, le premier les α et $+\sqrt{-1}$, les seconds les α et $-\sqrt{-1}$, ne contient l'origine; ou, si toutes les quantités α ont leurs parties réelles de même signe et non nulles. Quand il n'en est pas ainsi et que, par exemple, k des quantités α ont leur partie réelle positive, tandis que $n-k$ ont leur partie réelle négative ou nulle, les séries convergent encore si l'on y annule les constantes A qui correspondent à un α dont la partie réelle est négative ou nulle; mais elles ne donnent plus alors la solution générale, mais seulement une solution particulière contenant seulement k constantes arbitraires et développée suivant les puissances de $A_1 e^{\alpha_1 t}, \ldots, A_k e^{\alpha_k t}$. D'après l'hypothèse faite sur $\alpha_1, \ldots, \alpha_2$, les exponentielles $A_i e^{\alpha_i t}$, et, par suite, les η_i de la solution considérée tendent vers o quand t tend vers $-\infty$; pour cette raison, M. Poincaré l'appelle *solution asymptotique*.

Il obtient un second système de solutions asymptotiques quand il annule, dans la série générale, tous les coefficients A qui correspondent à des exposants dont la partie réelle est positive ou nulle. Quand t tend vers $+\infty$, ces solutions se rapprochent asymptotiquement de la solution périodique considérée. Dans le cas des équations de la Dynamique, les α sont deux à deux égaux en valeur absolue mais de signe contraire; à chaque solution asymptotique du premier genre en correspond donc une du second genre.

M. Poincaré démontre encore que si les X_i dépendent d'un paramètre μ et sont développables suivant les puissances de ce paramètre, et si, pour $\mu = 0$, les exposants caractéristiques sont tous distincts, les séries qui définissent les quantités η_i peuvent être développées suivant les puissances de $A_i e^{\alpha_i t}$ et de μ. Il applique ensuite ces résultats aux équations du problème des trois corps :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces équations admettent des solutions périodiques; il suffit

donc que l'un des exposants caractéristiques α correspondants soit réel pour qu'elles admettent aussi des solutions asymptotiques. Les seconds membres sont développables suivant les puissances de μ, mais tous les exposants caractéristiques sont nuls pour $\mu = 0$. Il en résulte un grand nombre de différences importantes avec ce qui précède.

En premier lieu, les exposants caractéristiques ne sont pas développables suivant les puissances de μ, mais suivant celles de $\sqrt{\mu}$. Il en est de même du second membre des équations qui définissent les τ_i. On a encore

$$\tau_i = \Sigma N \frac{A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_n^{\beta_n}}{\Pi} e^{t(\Sigma\alpha\beta+\nu\sqrt{-1})},$$

mais N et Π sont développés suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

M. Poincaré est ainsi conduit aux questions suivantes :

1° Le quotient $\frac{N}{\Pi}$ est-il développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$?

2° Les séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, des $A_i e^{\alpha_i t}$, de $e^{t\sqrt{-1}}$ et de $e^{-t\sqrt{-1}}$ qui satisfont formellement aux équations proposées sont-elles convergentes?

3° Si elles ne sont pas convergentes, peut-on en tirer parti pour le calcul des solutions asymptotiques ?

Il montre d'abord qu'il existe effectivement des séries développables suivant les puissances positives seulement de $\sqrt{\mu}$. A cet

[redacted]

M. Poincaré pose

$$\alpha_k = \Sigma x_k^p \mu^{\frac{p}{2}},$$

$$x_i = \Sigma x_i^p \mu^{\frac{p}{2}},$$

$$y_i - n_i t = \Sigma y_i^p \mu^{\frac{p}{2}},$$

les x_i^p, y_i^p étant des fonctions de t et des w, périodiques par rapport à t et développables suivant les puissances des w.

Il substitue ces expressions dans les équations et égale les coefficients des mêmes puissances de $\sqrt{\mu}$ dans les deux membres de chacune d'elles; il obtient ainsi des équations qui déterminent les quantités cherchées.

Les séries, ainsi obtenues, contiennent des dénominateurs qui sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et il y en a toujours pour lesquels le rayon de convergence est aussi petit que l'on veut. Elles sont donc divergentes.

M. Poincaré montre qu'on peut cependant les utiliser et, à cet effet, il considère une série analogue, mais plus simple,

$$(a) \qquad F(w, \mu) = \sum \frac{w^n}{n + n\mu}.$$

Cette série converge uniformément quand μ reste positif et que w reste plus petit en valeur absolue qu'un nombre positif w_0 plus petit que 1, mais d'ailleurs quelconque. Si maintenant on cherche à développer $F(w, \mu)$ suivant les puissances de μ, la série à laquelle on est conduit,

$$(b) \qquad \Sigma w^n (-n)^p \mu^p,$$

ne converge pas, mais en y négligeant tous les termes où l'exposant de μ est supérieur à p, on obtient une fonction $\Phi_p(w, \mu)$ et l'expression

$$(c) \qquad \frac{F(w, \mu) - \Phi_p(w, \mu)}{\mu^p}$$

tend vers zéro quand μ tend vers 0 par des valeurs positives. La série précédente représente donc asymptotiquement la fonction $F(w, \mu)$ pour les petites valeurs de μ.

Les solutions asymptotiques de M. Poincaré sont tout à fait

analogues à la série (b). Soit, en effet,

$$(a') \qquad \sum \frac{N}{\Pi} w_1^{\beta_1}, w_2^{\beta_2}, \ldots, w_k^{\beta_k} e^{\nu t\sqrt{-1}} = F(\sqrt{\mu}, w_1, w_2, w_k, t.$$

Elle est uniformément convergente quand les w restent inférieurs en valeur absolue à certaines limites et que $\sqrt{\mu}$ reste réel. En développant $\frac{N}{\Pi}$ suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, on obtient une série divergente. L'ensemble des termes où l'exposant de μ est inférieur ou égal à p forme une fonction $\Phi_p(\sqrt{\mu}, w_1, w_2, \ldots, w_k, t)$ développable suivant les puissances des w, de $e^{\pm t\sqrt{-1}}$ et qui est, d'autre part, un polynome de degré p en $\sqrt{\mu}$.

M. Poincaré montre que l'expression $\dfrac{F - \Phi p}{\sqrt{\mu^p}}$ tend vers o quand μ tend vers zéro par des valeurs positives, et cela quelque grand que soit p.

Les séries divergentes représentent donc les solutions asymptotiques, pour les petites valeurs de μ, de la même manière que la série de Stirling représente les fonctions ultérieures.

Nous donnerons ultérieurement l'analyse des deuxième et troisième volumes.

J. Perchot.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

G. MONCHAMP. — Galilée et la Belgique. Essai historique sur les vicissitudes du système de Copernic en Belgique. In-12, 346 + 76 p. Saint-Trond, G. Moreau; Paris, Retaux, 1892.

G. MONCHAMP. — Notification de la condamnation de Galilée datée de Liège, 20 septembre 1633, publiée par le nonce de Cologne, dans les pays rhénans et la Basse-Allemagne. Texte d'après une copie manuscrite avec remarques. Cologne, Boisserée 4. Saint-Trond, G. Moreau, 1893 (30 p. in-8°).

Le second de ces écrits est, sur un point particulier, le complément du premier. Celui-ci est une monographie contenant l'histoire du système copernicien en Belgique. Le Chapitre I est consacré à l'affaire de Galilée à Rome en 1616 et en 1633; les Chapitres II-XII à l'histoire de l'Astronomie en Belgique pendant le XVII[e] siècle; les Chapitres XIII-XXII renferment l'histoire du double conflit de Martin Van Velden, professeur de Philosophie à l'Université de Louvain, avec la Faculté des Arts et le Recteur de cette Université, à propos du système de Copernic. Le Chapitre XXIII traite du système de Copernic au VIII[e] siècle, il est suivi de 76 pages de documents.

Conclusion de l'auteur : les découvertes de Galilée ont été accueillies avec enthousiasme en Belgique; cet enthousiasme n'a guère été refroidi par les condamnations de 1616 et 1633, parce que les hommes instruits de ce temps en connaissaient parfaitement la portée et la non-réformabilité.

P. MANSION. — Notice sur les travaux scientifiques de Louis-Philippe Gilbert. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1893 (86 p. in-8° avec portrait).

Ph. Gilbert (1832-1892), professeur à l'Université de Louvain depuis 1855, était correspondant de l'Académie des Sciences de Paris (1890). Il fut l'un des principaux fondateurs de la Société scientifique de Bruxelles. Voici un aperçu de ses principaux travaux :

1. *Analyse.* — Il faut citer surtout ses *Recherches sur le développement de la fonction gamma* où il étend et complète diverses recherches de Binet, Gauss, Gudermann, etc., et son *Mémoire sur une propriété de la fonction de Poisson*, où il corrige et complète, sur un point essentiel, la *Nova methodus* de Jacobi.

2. *Géométrie.* — Recherches diverses sur les mouvements plans et sur la théorie des lignes tracées sur les surfaces.

3. *Mécanique.* — Outre diverses Notes moins étendues, il faut signaler spécialement : 1° *Étude historique et critique sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe* (1878); 2° *Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif* (1882), où l'on trouve la théorie du barogyroscope, instrument inventé par lui pour démontrer, d'une manière péremptoire, l'influence de la rotation de la Terre sur le mouvement des corps terrestres; 3° *Sur les preuves mécaniques de la rotation de la Terre* (1882). Toutes les expériences antérieures à la sienne ont donné des résultats contradictoires ou sont pratiquement irréalisables.

4. *Physique mathématique.* — Son principal Mémoire sur ce sujet est devenu classique. Il est intitulé : *Recherches analytiques sur la diffraction.*

5. *Histoire des Sciences.* — On doit à Gilbert un grand nombre de biographies scientifiques (Pagani, Chasles, Puiseux, Fou- [redacted]

ALPHONSE DEMOULIN, répétiteur à l'Université de Gand. — [illegible] L'APPLICATION D'UNE MÉTHODE VECTORIELLE A L'ÉTUDE DE DIVERS SY[illegible] DE DROITES (COMPLEXES, CONGRUENCES, SURFACES RÉGLÉES). VII-11[illegible] Bruxelles, Castaigne, Paris, Nony, 1894.

La méthode vectorielle dont il est question dans le titre ci-dessus est fondée sur l'emploi systématique de deux combinaisons différentes de deux vecteurs : le produit géométrique et [illegible] moment géométrique. Les calcul[illegible] ne [illegible] pas de ceux qui résulteraie[illegible] quaternions. L'exposition d[illegible] *Mécanique* de M. Massau, [illegible] 30) laquelle comprend, en outre, la théo[illegible]e la ligne dro[illegible] coordonnées vectorielles.

Le Mémoire proprement dit est divisé en trois Sections. La Section I (p. 31-69) débute par une étude approfondie du complexe linéaire : pôle et plan polaire, réduction de l'équation du complexe à la forme normale, droites conjuguées, moments de deux complexes, etc. Signalons spécialement les propriétés de deux complexes linéaires polaires réciproques par rapport à un troisième. L'auteur s'occupe ensuite des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire ou à un complexe quelconque, et applique les propriétés obtenues aux courbes tétraédrales symétriques. Depuis la publication de ce Mémoire, M. Demoulin a indiqué (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 17 mai 1897) les modifications qu'il y a lieu d'apporter à certains des résultats en question.

La fin de la Section est consacrée à la congruence linéaire et à la surface du second ordre, lieu des droites communes à trois complexes linéaires.

Suivant qu'un complexe linéaire est assujetti à passer par quatre, trois ou deux droites, son axe central engendre une surface S, une congruence Γ ou un complexe C. La Section II (p. 70-95) a pour objet l'étude de ces trois êtres géométriques.

La surface S est bien connue : c'est le cylindroïde de Cayley. L'établissement de son équation réduite est faite d'après M. Buchheim.

La congruence Γ jouit de nombreuses propriétés signalées par MM. Ball, Stahl et Waelsch. A ces propriétés, M. Demoulin ajoute la suivante :

Jointe à une congruence de premier ordre et de la première classe, la congruence Γ est l'intersection complète de deux complexes de Painvin.

Quant au complexe C, il est du second ordre et sa surface de singularités est réglée et admet, comme courbes asymptotiques, des courbes du sixième ordre.

Dans la Section III (p. 96-105), l'auteur étudie quelques complexes dont la considération se déduit de celle du complexe linéaire.

Le Mémoire se termine par un Appendice (p. 106-116) dans lequel sont établies différentes propriétés du complexe de Painvin.

MÉLANGES.

SUR LES HAUTEURS DU MAXIMUM DE L'ÉCLAIREMENT DES AIRES DONNÉES;

PAR M. W. ANISSIMOFF.

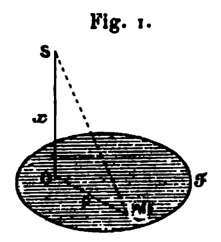
[redacted]

sens ([1]). Mais il est bien plus intéressant d'étudier le cas général d'une aire quelconque de dimensions finies.

Les résultats que nous avons obtenus peuvent intéresser les géomètres et seront peut-être utiles aux praticiens.

II. Considérons une aire horizontale $\mathfrak{I}$ (*fig.* 1), éclairée par un

Fig. 1.



point lumineux S qui se meut sur une verticale donnée SO. Supposons qu'il n'y a pas d'absorption de la lumière à travers le milieu intermédiaire et recherchons sur quelle hauteur l'on doit placer le luminaire S pour que l'éclairement de l'aire $\mathfrak{I}$ soit le plus grand possible.

Afin d'avoir l'expression analytique de l'illumination $\mathfrak{Z}$, on construit une sphère de rayon égal à l'unité avec le centre en S, et l'on mène de S des droites à tous les points du contour de l'aire $\mathfrak{I}$. C'est ainsi qu'on obtient une surface conique, découpant sur la sphère une aire sphérique f, et l'on a

(1) $$\mathfrak{Z} = kf, \qquad x > 0,$$

x désignant la hauteur SO du luminaire au-dessus du plan de $\mathfrak{I}$. Quant à la valeur $x = 0$, vu les conditions physiques du problème, on a toujours, quelle que soit l'aire donnée,

(2) $$\mathfrak{Z} = 0, \qquad x = 0.$$

Si l'on pose MO $= \rho$, on obtient

$$df = \frac{x}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^3}}\, d\mathfrak{I},$$

([1]) F. Frenet, *Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal*, p. 39-40, solution du problème 94. Paris, 1856.

W. Nernst und A. Schönflies, *Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften*, S. 307, Aufgabe 6. München-Leipzig, 1898.

df et $d\mathfrak{F}$ étant des éléments correspondants des aires f et $\mathfrak{F}$, et l'on a définitivement, pour la détermination de l'éclairement $\mathcal{E}$, les formules

$$(3)\quad \begin{cases} \mathcal{E} = k\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^3}}\, d\mathfrak{F}, & x > 0, \\ \mathcal{E} = 0 \quad \textit{pour la valeur} & x = 0, \end{cases}$$

l'intégrale étant étendue à l'aire $\mathfrak{F}$.

La fonction $\mathcal{E}$ de x, définie plus haut, est, en général, pour $x > 0$, une fonction continue dont la dérivée s'exprime par la formule

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = k\int \frac{\rho^2 - 2x^2}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^5}}\, d\mathfrak{F}.$$

C'est ici qu'il y a lieu de considérer deux cas distincts de la position du luminaire S par rapport à l'aire $\mathfrak{F}$. Soit O le pied de la perpendiculaire abaissée de S sur le plan de $\mathfrak{F}$.

Le point O étant situé *en dehors* de l'aire $\mathfrak{F}$, il existe un maximum et un minimum des rayons vecteurs ρ

$$\begin{matrix} \text{max. } \rho = b, \\ \text{min. } \rho = a, \end{matrix} \qquad b > a > 0,$$

et l'on a

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} > 0, \quad x < \frac{a}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} < 0, \quad x > \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Donc la dérivée considérée change de signe en allant des valeurs

[redacted]

tour de l'aire $\mathfrak{F}$, nous aurons

$$\begin{matrix} \max.\ \rho = b, \\ \min.\ \rho = 0, \end{matrix} \quad b > 0,$$

et *il n'y a pas de réponse décisive*. Mais voici un cas particulier qui doit être discuté à part :

Le point O étant *sur le contour*, *toutes les branches de celui-ci ont en* O, *deux à deux*, *le contact d'ordre* $\mu > 0$. Dans ce cas *il existera nécessairement une hauteur de l'éclairement maximum*.

En effet, ε étant pris aussi petit que l'on voudra, découpons de l'aire $\mathfrak{F}$ des éléments $d\mathfrak{F}$ par un cercle de rayon ε avec le centre en O. Ces éléments $d\mathfrak{F}$, dont le nombre est fini, sont par rapport à ε des infiniment petits d'ordre $\mu+2$. Les termes correspondants

$$df = \frac{x}{\sqrt{x^2+\rho^2}}\,\frac{d\mathfrak{F}}{x^2+\rho^2}$$

de l'intégrale (3) peuvent être rejetés pour des x infiniment petits aussi bien que pour des x finis. Par conséquent, dans le cas considéré, on a

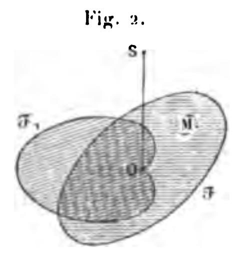
$$\begin{matrix} \max.\ \rho = b, \\ \min.\ \rho = \varepsilon, \end{matrix} \quad b > \varepsilon > 0,$$

et notre assertion est bien démontrée.

Étudions de plus près les cas où les rayons vecteurs issus de O rencontrent le contour de $\mathfrak{F}$ *en un ou en deux points*.

III. Soit O (*fig.* 2) un point à l'intérieur ou sur le contour de

Fig. 2.



l'aire $\mathfrak{F}$, et les rayons vecteurs issus de O ne rencontrent ce contour qu'*en un point* différent de O. Soient, en outre, ρ et θ les coor-

données polaires des points M de l'aire $\mathfrak{F}$ par rapport à un système de coordonnées choisi convenablement. On peut prendre

$$d\mathfrak{F} = \rho\, d\theta\, d\rho$$

et l'on a

$$\mathfrak{I} = kx \int_0^{\alpha} \int_0^{\rho} \frac{\rho\, d\theta\, d\rho}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^3}}, \qquad x > 0;$$

$$\mathfrak{I} = 0 \qquad \textit{pour la valeur} \qquad x = 0.$$

L'intégration par rapport à ρ se fait de $\rho = 0$ jusqu'aux valeurs de ρ sur le contour, qui sont données par une équation

$$\rho = \varphi(\theta).$$

L'intégration par rapport à θ s'accomplit dans les limites $\theta = 0$ et $\theta = \alpha$. On a pour α la valeur $\alpha = 2\pi$, si O est à l'intérieur de $\mathfrak{F}$; dans le cas où O est situé sur le contour, on doit avoir $0 < \alpha \leqq 2\pi$.

L'intégration par rapport à ρ étant faite, on obtient

$$\mathfrak{I} = k \int_0^{\alpha} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+\rho^2}}\right) d\theta, \qquad x > 0;$$

$$\mathfrak{I} = 0 \qquad \textit{pour la valeur} \qquad x = 0.$$

Pour $x > 0$ la dérivée de $\mathfrak{I}$ par rapport à x, définie par la formule

$$\frac{d\mathfrak{I}}{dx} = -k \int_0^{\alpha} \frac{\rho^2}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^3}}\, d\theta, \qquad x > 0$$

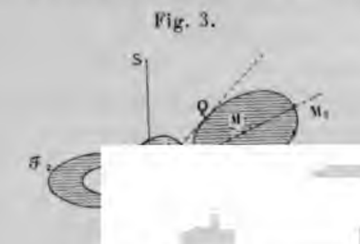
sera négative. Donc $\mathfrak{I}$ comme fonction de x diminue incessamment quand la variable x croît de $x = 0$ jusqu'à $x = +\infty$; et l'on

[redacted]

l'extérieur ou sur le contour de $\mathfrak{F}$ (*fig.* 3), les ray issus de O rencontrent ce contour *en deux points* dif

Au cas où O se trouve sur le contour, comme cel l'aire $\mathfrak{F}_2$, toutes les branches passant par O doivent avoi ici. ux à deux, le contact d'ordre $\mu > 0$. Appliquons nos f

Fig. 3.



au cas des aires indiquées. Considérons, par exemple, l'aire $\mathfrak{F}$. Les rayons vecteurs extrêmes OP et OQ, formant entre eux l'angle α, divisent le contour en deux parties PM_1Q et PM_2Q. Pour deux points correspondants M_1 et M_2 leurs rayons vecteurs sont donnés en fonction de l'angle polaire θ

$$(5)\qquad \begin{cases} \rho_1 = \varphi_1(\theta), \\ \rho_2 = \varphi_2(\theta), \end{cases} \qquad \rho_2 \geqq \rho_1.$$

Quant à l'angle α, il est soumis à la condition $0 < \alpha \leqq 2\pi$.

En nous reportant à la première des formules (3), nous calculons sans peine

$$\mathfrak{J} = k\int_0^\alpha \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+\rho_1^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+\rho_2^2}}\right) d\theta, \qquad x > 0.$$

Mais un peu de réflexion nous montre que la même formule est valable aussi pour le cas extrême $x = 0$; par conséquent

$$(6)\qquad \mathfrak{J} = k\int_0^\alpha \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+\rho_1^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+\rho_2^2}}\right) d\theta, \qquad x \geqq 0.$$

Les hauteurs $x = x_0$ de l'éclairement maximum $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0$ seront, en général, les racines réelles et positives de l'équation (4) qui prend la forme

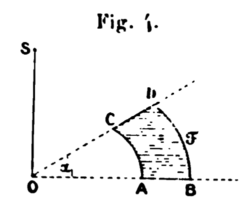
$$(7)\qquad \int_0^\alpha \left[\frac{\rho_1^2}{\sqrt{(x^2+\rho_1^2)^3}} - \frac{\rho_2^2}{\sqrt{(x^2+\rho_2^2)^3}}\right] d\theta = 0.$$

Cette équation (7) a toujours au moins une racine de la nature indiquée. C'est notamment la formule (7) aussi bien que (4) qui est une source inépuisable des équations douées de la propriété d'avoir au moins une de leurs racines réelle et positive. Ce point intéressant est bien évident; nous n'y insistons pas davantage.

Le cas général de l'aire d'une forme arbitraire, que nous avons traité succinctement dans l'article II, peut être réduit aux cas plus simples considérés dans les articles III et IV. Mais nous ne nous y arrêtons pas et allons présenter quelques exemples particuliers se rapportant aux articles indiqués.

V. D'abord, il y a lieu de considérer les *aires annulaires*. Ce sont des aires ABDCA (*fig.* 4), limitées par deux arcs de cercle concentriques en O et par deux rayons vecteurs OAB et OCD, formant entre eux l'angle α. En désignant OA $= a$, OB $= b$, nous

Fig. 4.



devons poser, dans les formules (6) et (7), $\rho_1 = a$ et $\rho_2 = b$, étant $b > a$. L'équation (7) se réduit alors à

$$\frac{a^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{b^2}{\sqrt{(x^2+b^2)^3}}$$

[redacted]

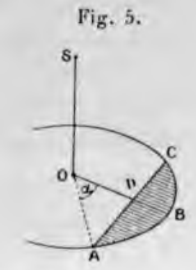
particulier de Frénet et de Schönflies, auquel correspond la lim

$$\lim_{b=a} x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

La formule (8), si simple que possible, peut être utile, à notre avis, aux nombreuses applications dans la pratique. C'est en s'appuyant sur cette formule que l'on peut arranger d'une manière plus avantageuse l'éclairage des rues et des places publiques, ainsi qu'on peut l'utiliser dans l'art de la guerre et dans beaucoup de questions qui se rapportent au problème considéré.

VI. Comme second exemple, nous prenons des aires ABCDA (*fig.* 5), limitées par un arc de cercle avec le centre en O et par

Fig. 5.



la corde AC. On voit tout de suite que l'illumination $\mathfrak{I}$ de cette aire totale sera deux fois plus grande que l'illumination pour l'aire ADB, OD étant perpendiculaire à AC. Posons

$$OA = OB = a \qquad \text{et} \qquad \angle AOB = \alpha;$$

nous aurons

$$\mathfrak{I} = 2k\int_0^\alpha \left(\frac{x\cos\theta}{\sqrt{x^2\cos^2\theta + a^2\cos^2\alpha}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)d\theta,$$

d'où l'on trouve aisément la formule

$$\mathfrak{I} = 2k\left(\arcsin\frac{x\sin\alpha}{\sqrt{x^2+a^2\cos^2\alpha}} - \frac{\alpha x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right).$$

L'équation (7), pour la détermination de la hauteur demandée,

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{x^2+a^2\cos^2\alpha} = \frac{\alpha}{x^2+a^2},$$

nous donne une solution unique

$$(10) \qquad x_0 = a \cos\alpha \sqrt{\frac{2(\tan\alpha - \alpha)}{2\alpha - \sin 2\alpha}},$$

et l'éclairement maximum $\mathfrak{I}_0$ correspondant sera

$$(11) \qquad \mathfrak{I}_0 = 2k\left(\arcsin\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\tan\alpha}} - \sqrt{\frac{\alpha}{\tan\alpha} - \frac{\alpha^2}{\tan^2\alpha}}\right).$$

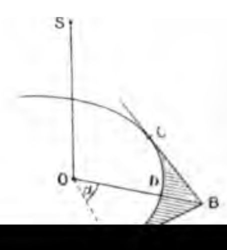
Si l'on fait

$$\alpha = \frac{\pi}{n},$$

la formule (10) nous donnera la hauteur de l'éclairement maximum pour l'aire entre le périmètre du polygone régulier inscrit à n côtés et les arcs de cercle. L'illumination correspondante maximum sera égale à n fois $\mathfrak{I}_0$, donnée par la formule (11).

De la même manière, on peut traiter le cas de l'aire ABCDA (*fig.* 6), limitée par un arc de cercle dont le centre se trouve en O

Fig. 6.



L'équation (7), qui a la forme

$$\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{a^2+x^2\cos^2\alpha}},$$

nous donnera la solution

$$(12) \qquad x_0 = \frac{a}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{\alpha^2-\sin^2\alpha}{\tan^2\alpha-\alpha^2}},$$

et l'éclairement maximum $\mathfrak{J}_0$ correspondant sera

$$(13) \qquad \mathfrak{J}_0 = 2k\left(\sqrt{[illegible]} - 1 - \arccos\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right).$$

En posant

$$\alpha = \frac{\pi}{n},$$

nous aurons par la formule (12) la hauteur de l'éclairement maximum pour l'aire entre le périmètre du polygone régulier circonscrit à n côtés et les arcs de cercle. L'illumination maximum correspondante sera égale à $n\mathfrak{J}_0$, où $\mathfrak{J}_0$ est donnée par la formule (13).

Remarquons, en passant, que dans les formules (11) et (13) la quantité a, le rayon du cercle, ne figure pas. C'est ainsi que les illuminations maxima $\mathfrak{J}_0$, pour une même valeur de l'angle α, sont toutes égales entre elles. Quant aux hauteurs correspondantes x_0, données par les formules (10) et (12), elles sont proportionnelles aux rayons a.

VII. En dernier lieu, considérons l'aire BOAB (*fig.* 7) entre une spirale d'Archimède OB, dont l'origine (pôle) se trouve en O, sa tangente OA en O et un arc de cercle avec le centre au même point O. Si l'on pose le rayon $OA = a$ et si l'on désigne par b le paramètre de la spirale considérée $\rho = b\theta$, on voit bien qu'il doit exister une relation

$$\frac{a}{b} \leqq 2\pi.$$

L'aire considérée nous donnera un bel exemple pour la théorie

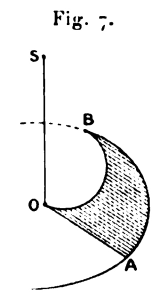
générale développée dans l'article II. La formule (6) nous donnant

$$\mathfrak{I} = k\int_0^{\frac{a}{b}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2\theta^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) d\theta,$$

on obtient sans peine

$$(14) \qquad \mathfrak{I} = \frac{k}{b}\left(x \log \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} - \frac{ax}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right),$$

Fig. 7.



log étant le signe des logarithmes népériens. La forme (14), sous laquelle se présente l'illumination $\mathfrak{I}$ des aires limitées par des spirales d'Archimède et des arcs de cercle, est bien digne d'attention et fournit des propriétés remarquables de cette belle courbe.

Considérons, en effet, deux spirales avec les paramètres b_1 et b_2 ; deux valeurs $\mathfrak{I}_1$ et $\mathfrak{I}_2$ leur correspondent par la formule (14). On a pour une même valeur de x

[redacted]

rement maximum, sera toujours de la forme

$$(16) \qquad \log\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x} - a\frac{x^2+2a^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = 0.$$

Cette équation ne dépend pas des paramètres b. Il s'ensuit un autre théorème fort intéressant sur les spirales du grand géomètre :

Les aires, limitées par des spirales d'Archimède tangentes en O et par un même arc de cercle, ont une même hauteur de l'éclairement maximum.

La hauteur demandée $x = x_0$ est une racine réelle et positive de l'équation (16); cette racine est unique et est une fonction linéaire et homogène de a. C'est ainsi que les hauteurs de l'éclairement maximum sont proportionnelles aux rayons a des cercles, quelles que soient les valeurs des paramètres b des spirales considérées.

Si l'on fait

$$z = \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

on obtient en z l'équation

$$(17) \qquad \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z} = z + z^3,$$

qui est assez commode pour le calcul numérique et nous donne pour la valeur cherchée de x_0

$$(18) \qquad x_0 = 0,34248\,a.$$

VIII. Nous avons supposé jusqu'ici que le pouvoir éclairant du rayon lumineux ne change pas avec la distance, au moins dans les limites de l'aire considérée. Mais il n'est pas difficile d'étendre nos calculs au cas où *le pouvoir éclairant*, grâce à l'absorption du milieu intermédiaire, *diminue proportionnellement à la $n^{ième}$ puissance de la distance.*

L'illumination totale $\mathfrak{J}$ de l'aire donnée $\mathfrak{F}$ se présentant sous la forme

$$(19) \qquad \mathfrak{J} = k\int\frac{x}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^{n+3}}}\,d\mathfrak{F}, \qquad x > 0,$$

nos conclusions précédentes resteront, en termes généraux, invariables. Il suffit, à cet effet, de former l'expression de la dérivée de $\mathfrak{J}$ par rapport à x et de discuter les variations de signe de cette dérivée.

Dans le cas où il y a *deux points* de rencontre des rayons vecteurs issus de O avec le contour de $\mathfrak{F}$, nous aurons, pour l'illumination $\mathfrak{J}$, l'expression

$$(20)\qquad \mathfrak{J} = \frac{k}{n+1}\int_0^\alpha \left[\frac{x}{\sqrt{(x^2+\rho_1^2)^{n+1}}} - \frac{x}{\sqrt{(x^2+\rho_2^2)^{n+1}}}\right] d\theta.$$

Il faut faire remarquer ici que l'ordre μ du contact en O, s'il y a de telles branches du contour, doit vérifier la relation $\mu > n$.

Quant à l'équation pour la détermination des hauteurs demandées, elle devient

$$(21)\qquad \int_0^\alpha \left[\frac{\rho_1^2 - nx^2}{\sqrt{(x^2+\rho_1^2)^{n+3}}} - \frac{\rho_2^2 - nx^2}{\sqrt{(x^2+\rho_2^2)^{n+3}}}\right] d\theta = 0$$

et admet toujours au moins une racine réelle et positive.

L'équation des hauteurs pour les aires annulaires étant de la forme

$$\frac{a^2 - nx^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^{n+3}}} = \frac{b^2 - nx^2}{\sqrt{(x^2+b^2)^{n+3}}},$$

nous donne, dans l'hypothèse $\lim b = a$, la solution

$$(22)\qquad x_0 = \frac{a}{\sqrt{n+2}}.$$

[redacted]

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ÉMILE PICARD ET G. SIMART. — THÉORIE DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES. T. I. Analyse de ce Livre par M. le professeur *P. Stäckel* (¹) (traduite, avec l'autorisation de l'auteur, par M. *L. Laugel*). Paris, Gauthier-Villars, VI-246 p., gr. in-8°.

Il n'y a pas lieu de s'étonner que la théorie des fonctions algébriques de plusieurs variables soit encore dans son enfance, malgré les précieux travaux de Clebsch et Nöther et de MM. Poincaré et Picard, Castelnuovo et Enriques. Les fonctions d'une seule variable ne sont, par rapport aux fonctions d'un nombre quelconque de variables, qu'un *cas singulier*, et les simplifications qui ont lieu dans ce cas singulier sont si considérables que le passage au cas général exige des méthodes auxiliaires d'analyse complètement nouvelles. Il est vrai qu'avec la difficulté augmente aussi l'attrait de la recherche qui, précisément dans ce domaine des fonctions algébriques de plusieurs variables, nous a préparé une riche moisson; c'est donc une entreprise dont on ne saurait trop remercier MM. Picard et Simart que d'avoir, dans cet Ouvrage qui aura deux Volumes, donné un résumé de l'état de la Science dans ce domaine et d'y avoir facilité l'accès à une discipline dont on peut attendre encore de grands progrès.

Le thème du premier Volume peut être rapidement énoncé comme il suit :

Il s'agit d'étendre la théorie riemannienne des fonctions algébriques d'une variable aux fonctions algébriques de deux variables, extension que Riemann, d'ailleurs, avait déjà en vue, comme le montre son œuvre posthume.

La base de la théorie de Riemann consiste en la conception des classes des courbes algébriques. Deux courbes algébriques $f(x,y)=0$, $\varphi(\xi,\eta)=0$ appartiennent à la même classe lorsqu'elles se correspondent point par point, c'est-à-dire lorsque des équations de la forme $\xi=\Xi(x,y)$, $\eta=H(x,y)$, où Ξ et H désignent des fonctions rationnelles de leurs arguments, permet-

(¹) *Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik*, t. XXVIII; 1899.

tent d'établir, entre les points des deux courbes, une correspondance telle que, au moyen des équations $f=0$, $\varphi=0$, l'on ait, inversement, $x=X(\xi,\eta)$, $y=Y(\xi,\eta)$, où X et Y désignent encore des fonctions rationnelles de leurs arguments. Il s'agit alors de trouver des propriétés qui soient communes à toutes les courbes d'une même classe, c'est-à-dire de développer une théorie des invariants des courbes algébriques au point de vue des transformations birationnelles. Un invariant de cette espèce est le nombre p, nommé par Clebsch le *genre* de la courbe. Toutes les courbes de la même classe sont de même genre; mais, dans le problème de la détermination de toutes les courbes algébriques d'un genre p donné, il reste $3p-3$ constantes qui demeurent arbitraires, les modules de la classe, dont les valeurs caractérisent les classes individuelles et qui, ainsi que p, jouissent aussi de la propriété de l'invariance.

On peut procéder d'une manière analogue dans l'étude des surfaces algébriques.

Deux pareilles surfaces $f(x,y,z)=0$, $\varphi(\xi,\eta,\zeta)=0$ appartiennent à la même classe, lorsqu'elles se correspondent point par point, c'est-à-dire lorsque des équations de la forme $\xi=\Xi(x,y,z)$, $\eta=H(x,y,z)$, $\zeta=Z(x,y,z)$, où Ξ, H, Z désignent des fonctions rationnelles de leurs arguments, permettent d'établir, entre les points des deux surfaces, une correspondance telle que, au moyen des équations $f=0$, $\varphi=0$, l'on ait, inversement, $x=X(\xi,\eta,\zeta)$, $y=Y(\xi,\eta,\zeta)$, $z=Z(\xi,\eta,\zeta)$, où X, Y, Z désignent encore des fonctions rationnelles de leurs arguments.
[redacted]

dant et *algébrique*. Ainsi, la définition de p donnée par Riemann comme étant le nombre des intégrales abéliennes de première (ou de seconde) espèce, linéairement indépendantes et appartenant à la courbe $f = 0$, est transcendante et analytique; d'autre part, sa définition de p, au moyen de l'*analysis situs*, c'est-à-dire au moyen de la connexion de la surface de Riemann appartenant à la courbe, est transcendante et géométrique. Nous pouvons aussi caractériser comme algébrico-géométrique la formule de Riemann $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta$, qui donne une relation entre l'ordre n de la courbe, le nombre δ de ses points doubles et son genre p. On obtient cette formule en définissant p comme le nombre des coefficients arbitraires dans l'équation des *courbes adjointes*, c'est-à-dire des courbes d'ordre $n-3$ qui passent par les points doubles de $f = 0$. On peut regarder comme un supplément à cette définition les démonstrations ultérieures de l'invariance du nombre p donné par cette formule, ainsi que les difficiles recherches touchant la réduction des singularités d'ordre supérieur, recherches qui constituent le passage aux méthodes algébrico-analytiques. Ces méthodes sont principalement l'œuvre de Weierstrass, qui chercha à faire dominer les méthodes algébriques dans l'étude des fonctions rationnelles $R(x, y)$ du couple (x, y) (fonctions à zéros et à pôles donnés, théorème des lacunes, etc.).

Dans l'état actuel de nos connaissances, les méthodes algébrico-analytiques ne peuvent être employées à l'étude générale des surfaces algébriques; en effet, dans l'édification d'une théorie des *fonctions rationnelles* $R(x, y, z)$ *du triplet* (x, y, z) qui marcherait parallèlement à la théorie de Weierstrass des fonctions rationnelles $R(x, y)$ du couple (x, y) on rencontre précisément ces difficultés, qui font que la théorie des fonctions analytiques de deux variables est restée jusqu'ici à l'état embryonnaire. Ces méthodes de traitement qui, au point de vue de la logique, doivent être placées au premier rang, sont ici, comme ailleurs, la conclusion et non le commencement du développement chronologique.

On pouvait s'attendre à des résultats plus féconds dans la voie algébrico-géométrique ouverte par Clebsch (*Comptes rendus*, décembre 1868) où il avait donné ce théorème : Pour une surface algébrique d'ordre n à singularités ordinaires, le nombre de con-

stantes arbitraires dans l'équation des *surfaces adjointes*, c'est-à-dire des surfaces d'ordre $n-4$ qui passent par les courbes doubles de $f=0$, est un invariant au point de vue des transformations birationnelles. Ce nombre, le genre *géométrique* (*Flächengeschlecht*), on le désigne par p_g. Or, tandis que l'on était parvenu à réduire les singularités d'ordre supérieur des courbes algébriques, c'est-à-dire à démontrer que toute pareille courbe, lorsqu'il s'agit d'en déterminer le genre, peut être regardée comme cas limite d'une courbe algébrique à singularités toutes ordinaires (points doubles à tangentes séparées), on a reconnu que, pour les surfaces algébriques, aucune réduction de cette nature n'est possible, et que, par conséquent, il n'y a pour p_g aucune formule numérique qui corresponde à la formule de Riemann pour le genre p. Cela tient à ce fait que, tandis que les singularités des courbes se superposent, et que, par conséquent, chaque singularité influe sur p comme si elle se présentait séparément, au contraire, dans les surfaces, les singularités peuvent se compenser, relativement à leur effet sur p_g, c'est-à-dire, par exemple, que la singularité S diminuant p_g de σ, et la singularité S' de σ', p_g peut, lorsque S et S' se présentent ensemble, diminuer de moins que $\sigma+\sigma'$.

Nöther, qui, le premier, a donné une démonstration (algébrique) de l'invariance de p_g a fait cette importante remarque que l'on obtient aussi ce même nombre p_g par voie analytico-transcendante. De même que, à une courbe algébrique $f(x,y)=0$ correspondent les intégrales abéliennes $\int R(x,y)\,dx$, on peut,

[redacted]

en rapport intime avec certaines intégrales appartenant à la surface, c'est-à-dire avec les intégrales de différentielles totales de la forme $P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy$, où P et Q sont des fonctions rationnelles de leurs arguments. Cette découverte mérite d'autant plus d'attirer l'attention que, ainsi qu'on le verra bientôt, la théorie de ces intégrales diffère, *toto cœlo,* de celle des intégrales abéliennes.

Pour l'invariant p_2, il n'y a pas ici de théorème analogue.

Je prendrai la liberté de dire que je soupçonne que cet invariant p_2 a un rapport intime avec les intégrales doubles de *seconde* espèce. Ce n'est pas ici le lieu d'en développer la raison. Quoi qu'il en soit, c'est là un problème qui demande de nouvelles recherches (et qui, du reste, a été traité, entre temps, par M. Picard) (¹).

Si l'on regarde x, y, z comme des variables complexes, alors à la surface algébrique correspond une variété M_4 à quatre dimensions, qui, au moyen de deux équations, est découpée dans un espace plan R_6 à six dimensions. Or, d'après les recherches de Betti et de M. Poincaré, la connexion d'une M_n découpée dans un espace plan, au moyen d'équations, est caractérisée par $n-1$ nombres entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$, les ordres de connexion de la variété, qui se rapportent successivement à la nature des variétés fermées à $1, 2, \ldots, n-1$ dimensions contenues dans la M_n. Entre ces nombres ont lieu les relations de M. Poincaré

$$p_m = p_{n-m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

En particulier, pour $n = 4$, on a donc $p_1 = p_3$, de sorte que, pour les surfaces algébriques, on n'a à considérer que les nombres p_1 et p_2. Une étude plus approfondie nous montre que, pour les surfaces algébriques, on a, en général, $p_1 = 1$, tandis que l'on a, et cela d'une manière générale, $p_2 > 3$.

Quant aux intégrales $\int (P\,dx + Q\,dy)$, M. Picard les distribue, comme les intégrales abéliennes, en intégrales de première, deuxième et troisième espèce; les définir avec précision est chose

(¹) *Journal de Liouville*, 5ᵉ série, t. V, p. 1-54. *Voir* aussi les *Comptes rendus* des 6 décembre 1897, 24 janvier 1898, 24 octobre 1898. L. L.

assez délicate, à cause des singularités des surfaces. On a ensuite le théorème fondamental : Si $p_1 = 1$, les intégrales de deuxième espèce se réduisent toutes à des fonctions rationnelles de x, y, z; mais si $p_1 > 1$, il y a exactement $p_1 - 1$ intégrales de deuxième espèce, linéairement indépendantes. La détermination de ces intégrales peut, dans tous les cas, se ramener au problème qui consiste à déterminer les intégrales rationnelles d'un système d'équations différentielles linéaires homogènes ordinaires à coefficients rationnels. On a donc ainsi trouvé une deuxième méthode pour l'évaluation de p_1, qui n'exige que des différentiations et des éliminations.

Quant aux intégrales de première espèce, il ne s'en présente pas, en général. Les conditions pour l'existence de pareilles intégrales peuvent être mises sous une forme analytique élégante, mais on ne peut donner aucune formule numérique donnant leur nombre, qui soit valable dans le cas général. On trouve, en particulier, que les surfaces du deuxième et du troisième ordre, à l'exception des cônes du troisième ordre, ne possèdent pas d'intégrales de première espèce, et que, parmi les surfaces du quatrième ordre, seules, les surfaces de révolution, les surfaces ayant deux droites doubles ne se rencontrant pas, et les cônes, de même que les surfaces qui en dérivent par voie projective, possèdent une, et une seule intégrale de première espèce; une surface du quatrième ordre ne peut donc jamais en posséder plus d'une.

L'étude des intégrales de troisième espèce présente de très


[redacted]

tions où évoluent les recherches de MM. Picard et Simart. A côté des sujets fondamentaux exposés ici se trouve encore une foule de détails intéressants que nous ne pouvons citer ici. Un fait que nous ne pouvons passer sous silence : l'ordre dans lequel les théorèmes se présentent dans le livre est tout autre que dans cette analyse. Les auteurs, dont la rédaction est un modèle d'élégance et de clarté, ont, pour faciliter l'étude de leur Ouvrage, placé au commencement trois Chapitres introductifs traitant des intégrales multiples de plusieurs variables, de l'*analysis situs* des variétés à plusieurs dimensions et des intégrales des fonctions rationnelles de deux variables complexes. Les singularités et les ordres de connexion des surfaces algébriques forment la matière du quatrième Chapitre, auquel succède la théorie des intégrales des différentielles totales de première, deuxième et troisième espèce (Chap. V et VI). Dans les Chapitres VII et VIII, il est rendu compte des travaux de Clebsch et Nöther, et les auteurs y développent la théorie des intégrales doubles de première espèce.

Le second Volume, outre des suppléments au premier, contiendra des applications au Calcul intégral; les auteurs s'y proposent aussi l'étude des nouvelles recherches de MM. Castelnuovo et Enriques; c'est là un plan dont l'on ne peut trop souhaiter la réalisation.

MUTH. — THEORIE UND ANWENDUNG DER ELEMENTARTHEILER. 1 Vol. in-8°, XVI-236 p., Teubner, Leipzig; 1899.

Rappelons d'abord la définition d'un *diviseur élémentaire*, sous la forme générale que lui a donnée M. Frobenius ([1]).

Soit $|a_{i,k}|$ le déterminant du système de n^2 éléments

$$a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n);$$

ces éléments peuvent être des nombres entiers, ou des fonctions entières d'une ou plusieurs variables. Soit p un nombre entier dans le premier cas, une fonction linéaire (ou irréductible) dans le second cas. Désignons par ρ un nombre entier positif, inférieur

([1]) *Sitzungsberichte der Akad. der Wissensch. in Berlin*, p. 33; 1894.

ou égal au rang r (¹) du système des a_{ik}. Soit l_ρ la plus haute puissance de p telle que p^{l_ρ} soit un diviseur de tous les sous-déterminants de degré ρ ; on a alors

$$l_\rho \geqq l_{\rho-1} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ l_0 = 0).$$

L'égalité $l_\rho = l_{\rho-1}$ ne peut d'ailleurs avoir lieu que si l_ρ et $l_{\rho-1}$ sont nuls ; les nombres

$$e_\rho = l_\rho - l_{\rho-1} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r)$$

sont donc entiers, positifs ou nuls. Chacune des quantités

$$p^{e_\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r),$$

pour laquelle e_ρ n'est pas nul, est un diviseur élémentaire (simple) du système des éléments $a_{i,k}$, ou, dans le cas où $r = n$, du déterminant $|a_{i,k}|$.

En désignant par D_σ le plus grand commun diviseur des sous-déterminants de degré σ du système, si l'on pose

$$E_1 = D_1, \quad E_2 = \frac{D_2}{D_1}, \quad \ldots, \quad E_{r-1} = \frac{D_{r-1}}{D_{r-2}}, \quad E_r = \frac{D_r}{D_{r-1}},$$
$$E_{r+1} = E_{r+2} = \ldots = E_n = 0,$$

$E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont respectivement le premier, le second, ..., le $n^{\text{ième}}$ diviseur élémentaire (composé) (²) du système.

On sait que cette notion de diviseur élémentaire s'est présentée [redacted]

où l'on suppose que

$$\varphi = \sum_{i,k} a_{i,k} x_i y_k, \qquad \psi = \sum_{i,k} b_{i,k} x_i y_k,$$

$$\Phi = \sum_{i,k} A_{i,k} X_i Y_k, \qquad \Psi = \sum_{i,k} B_{i,k} X_i Y_k$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

sont des formes bilinéaires en x_i, y_k d'une part, en X_i, Y_k de l'autre, il était nécessaire et suffisant que les deux déterminants $|\lambda_1 a_{i,k} + \lambda_2 b_{i,k}|$, $|\lambda_1 A_{i,k} + \lambda_2 B_{i,k}|$ eussent les mêmes diviseurs élémentaires ([1]).

[Rappelons que les deux faisceaux sont équivalents si l'on peut passer de l'un à l'autre par des substitutions linéaires à déterminants non nuls, et à coefficients indépendants de λ_1, λ_2 qui expriment les x au moyen des X, les y au moyen des Y; si les substitutions pour les (x, X) sont les mêmes que pour les (y, Y), elles sont dites *congruentes*.]

Cette proposition capitale était bien connue en France depuis le beau Mémoire de M. Darboux sur les formes quadratiques, Mémoire où l'auteur, en introduisant les fonctions qui généralisent naturellement la forme adjointe, était parvenu aux conditions de Weierstrass, par une méthode toute différente.

Qu'une proposition publiée en 1868, par Weierstrass, puisse être aujourd'hui, par ses développements, ses généralisations et ses applications, l'objet de tout un livre, c'est la preuve, sur un point très particulier, de l'activité scientifique de notre époque.

M. Muth a fait précéder son livre d'une Introduction historique que nous croyons devoir reproduire en entier, à cause de son grand intérêt propre, et aussi parce qu'elle donnera, mieux que nous ne pourrions le faire, idée des matières traitées par l'Auteur.

([1]) Signalons une exposition de cette théorie, faite en vue de la théorie des équations différentielles linéaires, par M. Sauvage dans le t. IX des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*.

Introduction.

En Analyse, et surtout en Géométrie analytique, on rencontre souvent le problème d'Algèbre que voici :

Ramener simultanément deux formes quadratiques φ et ψ de n variables à une forme canonique ([1]) (*normale*) *par une substitution linéaire.*

Il suffit de rappeler, par exemple, les problèmes de Géométrie qui correspondent aux cas $n = 3$, ou $n = 4$, et qui se rapportent à l'étude de la situation mutuelle de deux coniques ou de deux quadriques. On sait que, pour la solution de ces problèmes, la façon dont se comporte le déterminant du faisceau $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$, déterminé par φ et ψ, joue un rôle essentiel. Dans le *cas général,* où ce déterminant ne s'annule pas identiquement et se décompose en facteurs linéaires distincts (autrement que par un facteur constant), le problème n'offre aucune difficulté notable et la solution en est depuis longtemps connue ([2]) : on peut ramener simultanément les deux formes à la somme de n carrés de formes linéaires indépendantes ([3]). Les choses se passent tout autrement quand le déterminant du faisceau, que nous supposons toujours ne pas s'annuler identiquement, ne se décompose pas *en facteurs linéaires distincts.* Nous avons alors à distinguer une suite de cas différents, et le nombre de fois que ce diviseur multiple du déter- [redacted]

plusieurs fois étudiées (1), et pour le cas de $n = 4$, qui est déjà plus compliqué, Sylvester a compté treize cas différents (2). Mais ces recherches ne s'étendent pas d'une manière suffisante au cas général où les formes φ et ψ dépendent d'un nombre quelconque de variables. Avant tout, il est nécessaire de pouvoir énumérer tous les cas différents possibles pour n donné.

En 1858 (3), K. Weierstrass avait, dans un cas particulier, approché de la solution générale; il y parvint en 1868 (4) dans le célèbre Mémoire où il fonda la théorie des diviseurs élémentaires, *Ueber Schaaren bilinearer und quadratischer Formen :* non seulement pour deux formes bilinéaires quadratiques, mais aussi pour deux formes bilinéaires à un nombre quelconque de variables, il résolut le problème de la réduction simultanée à des formes canoniques, quelle que fût la composition du déterminant du faisceau relatif aux deux formes, et donna une méthode qui permettait d'énumérer, en les épuisant certainement, tous les cas possibles pour n donné.

Weierstrass y arrive par la décomposition du déterminant $|\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi|$ du faisceau $\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi$ en facteurs (*diviseurs élémentaires* de ce déterminant), facteurs qui sont obtenus en affectant les facteurs simples de $|\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi|$ d'exposants qui dépendent de la façon dont ces facteurs simples entrent dans les sous-déterminants des degrés $n - 1$, $n - 2$ de ce déterminant (5) : il montre que ces diviseurs élémentaires sont des invariants (généralement irrationnels) du faisceau. Nous devons observer ici que la notion de diviseurs élémentaires se trouve déjà dans le travail cité de Sylvester relatif au cas de $n = 3, 4$, et que Sylvester en avait déjà reconnu la nature invariante (6).

---

(1) Il suffit de consulter n'importe quel Traité de Géométrie analytique, un peu étendu.

(2) SYLVESTER, *Enum. of the cont. of lines and surf. of the sec. ord...* (*Phil. Mag.*, 4e série, t. I, p. 119). En comptant le cas où φ et ψ ne diffèrent que par un facteur constant, on a quatorze cas distincts (n° 66).

(3) WEIERSTRASS, *loc. cit.*, p. 207.

(4) WEIERSTRASS, *loc. cit.*, p. 233.

(5) WEIERSTRASS, *Berl. Monat.*, p. 310; 1868; *Œuvres*, t. II; p. 19.

(6) *Voir* E. MEYER, *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie* (*Jahresbericht der deutsch. Math. Verein von* 1890-91, t. I, p. 87): NŒTHER, SYLVESTER, *Math. Ann.*, t. L, p. 133.

Weierstrass ramène par une substitution linéaire le faisceau de formes à un faisceau de formes réduites, dont la construction dépend essentiellement des diviseurs élémentaires du déterminant $|\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi|$. Si ces diviseurs élémentaires sont connus, on peut en déduire une forme simple pour le faisceau réduit; en d'autres termes, on a une forme canonique du couple φ, ψ.

Il y a plus, si les diviseurs élémentaires des déterminants de deux faisceaux coïncident, ces faisceaux sont équivalents au même faisceau réduit et par conséquent équivalents entre eux. Ainsi, la coïncidence des diviseurs élémentaires n'est pas seulement *nécessaire* pour l'équivalence de deux faisceaux, elle est *suffisante*. C'est de cette manière que Weierstrass a démontré son théorème sur l'équivalence de deux faisceaux (§ 6 et § 9 de ce Livre).

Enfin, Weierstrass a montré, en s'appuyant toujours sur son faisceau réduit, que l'on pouvait former un faisceau de formes dont le déterminant ait des diviseurs élémentaires donnés. On est donc en état (§ 7 et § 9) de décrire d'une façon systématique et complète les formes canoniques d'un couple de formes bilinéaires d'un nombre donné de variables, en sorte que la théorie de Weierstrass fournit un principe de classification essentiel, principe dont la Géométrie montre la valeur et la fécondité.

Il n'est pas étonnant que les mathématiciens l'aient immédiatement utilisé; c'est ce que F. Klein a fait le premier dans sa Dissertation inaugurale sur les complexes du second degré [1]. Cette application géométrique de la théorie de Weierstrass fut suivie de beaucoup d'autres que l'on trouvera dans le résumé bibliogra-

[redacted]

un sujet que Heffter, dans son Livre sur les équations différentielles linéaires, a mis en pleine lumière ([1]).

Signalons, enfin, une intéressante application à la théorie des groupes des diviseurs élémentaires de Weierstrass, application due à Maurer ([2]).

A côté des efforts pour étendre la théorie de Weierstrass dans diverses directions, se placent les travaux qui ont eu pour but d'établir cette théorie en toute rigueur. L'exposition de Weierstrass présentait, en effet, une lacune, qu'il n'était pas très facile de combler, et c'est un point autour duquel s'est groupée une riche littérature. Cette exposition aurait été entièrement correcte si elle avait contenu la preuve de ce fait qu'un sous-déterminant régulier d'un système d'éléments entiers contenait au moins comme sous-déterminant un déterminant régulier ([3]). Alors une certaine déformation du faisceau employé par Weierstrass, pour préparer la réduction du faisceau par la transformation de Jacobi, peut être appliquée sûrement. Comme cette preuve faisait défaut, Stickelberger ([4]) (1874) se servit d'un procédé indirect pour montrer que le faisceau peut être effectivement réduit à la forme normale. Puis Darboux ([5]) (1874) et Gundelfinger ([6]) (1876), qui rendit en outre le service de donner à la théorie de Weierstrass toute son extension, évitèrent à la fois cette déformation préalable du faisceau et la transformation de Jacobi. Ils parvinrent ainsi à une nouvelle exposition, en partie plus courte, de notre théorie, exposition qui, comme l'a montré Stickelberger ([7]) (1879) dans un beau

---

([1]) L. HEFFTER, *Einleit. in die Theorie der lin. Differentialgl. mit einer unabh. Variab.*, Leipzig, 1894; Chap. IX. On y trouvera aussi la bibliographie du sujet. *Voir* aussi la page 198 du premier Livre.

([2]) MAURER, *Münchener Berichte*, 1888, p. 103; *Crelle*, t. 107, p. 99.

([3]) Un sous-déterminant d'un système est régulier relativement au facteur premier (ici linéaire) p quand ce facteur entre comme diviseur dans le sous-déterminant autant de fois que dans le plus grand commun diviseur de tous les sous-déterminants du même degré que celui que l'on considère.

J. T.

([4]) STICKELBERGER, *De probl. quod. ad duas form. bilin. vel quod. transform. pertinente*, Dissert. inaug. Berol., 1874.

([5]) DARBOUX, *Mém. sur la théorie algéb. des formes quad.* Liouville, 1874, 2e série, t. XIX, p. 247.

([6]) GUNDELFINGER, dans les *Leçons de Hesse sur la Géométrie analytique.* (2e édition, Leipzig, 1876, supp. IV).

([7]) STICKELBERGER, *Ueber Schaaren von bil. u. quad. Formen* (*Crelle*, 18[illegible], t. 66, p. 20.

travail, peut être faite d'une façon absolument rigoureuse; toutefois, cette méthode reste une méthode indirecte; elle permet de montrer, sur le faisceau réduit la signification et l'importance des diviseurs élémentaires, tandis que Weierstrass introduit directement ces diviseurs élémentaires.

Kronecker ([1]) chercha à combler la lacune en soumettant le faisceau à une transformation linéaire générale avec des coefficients indéterminés, sans toutefois que ce procédé s'applique à un faisceau de formes quadratiques.

Frobenius ([2]) remarqua que la difficulté qui subsistait dans le travail de Weierstrass pouvait être levée directement. En effet, Smith ([3]) avait démontré dès 1861 le théorème relatif aux déterminants réguliers pour un système de nombres entiers; Frobenius en donna une nouvelle démonstration, qui, avec quelques modifications, restait valable pour un système de fonctions entières d'un paramètre. C'est précisément le cas dont on avait besoin. La démonstration de ce lemme repose sur des méthodes arithmétiques; elle put ultérieurement (1894) être notablement simplifiée par Hensel ([4]) lorsque Kronecker eut fait connaître sa méthode de réduction ([5]) pour les systèmes d'éléments entiers.

Ce même lemme pouvait aussi se démontrer algébriquement, comme l'a fait Frobenius (1894) ([6]) et cela d'une manière très intéressante, au moyen d'une identité de la théorie des déterminants découverte dès 1870 par Kronecker ([7]) (n° 5).

Une fois le théorème sur les déterminants réguliers établi, on peut obtenir la déformation préalable d'un faisceau par la simple [redacted]

traires, et dans le cas des formes symétriques, par une transformation congruente extrêmement simple, ainsi que l'a montré Frobenius (1). On a donc le moyen d'établir directement, et en toute rigueur, la théorie de Weierstrass non seulement pour les faisceaux de formes bilinéaires, mais encore pour les faisceaux de formes quadratiques (§ 6 et § 9).

Nous avons exclu jusqu'ici les faisceaux singuliers de formes. Pour de tels faisceaux se posent les mêmes questions que pour les faisceaux ordinaires.

A partir de 1868, et pendant une longue suite d'années, Kronecker (2) s'en est occupé; il parvint en 1890 et en 1891 à des résultats définitifs (3). Le cas de la symétrie était particulièrement important et difficile (4).

Les recherches de Weierstrass et de Kronecker, sur les faisceaux de formes symétriques, conduisirent à ce résultat remarquable que deux faisceaux équivalents $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$ et $\lambda_1\Phi + \lambda_2\Psi$ de formes symétriques sont aussi congruents, en ce sens que l'un des faisceaux peut être transformé dans l'autre au moyen de substitutions congruentes, indépendantes du rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, et de déterminants non nuls : en d'autres termes, les conditions suffisantes pour l'équivalence de deux faisceaux de formes symétriques suffisent aussi pour leur congruence. Il en est de même quand φ et Φ sont des formes symétriques, ψ et Ψ des formes alternées (5) et aussi quand les formes fondamentales des deux faisceaux sont alternées (6).

Frobenius montra complètement la raison profonde de ce ré-

---

(1) FROBENIUS, *loc. cit.*, § 2.

(2) *Voyez* ses travaux sur les faisceaux de formes dans les *Berl. Monatsb.* de 1868 et 1874 (*Œuvres*, t. I), en particulier : *Ueber Schaaren v. quad. Formen* (*Berl. Monatsb.*, 1874, p. 59; *Œuvres*, t. I, p. 349). *Voyez* aussi DARBOUX, *loc. cit.*, p. 383.

(3) KRONECKER, *Algebr. Reduktion der Schaaren quad. Formen* (*Sitzb. der Berl. Akad.*, 1890, p. 1225, p. 1375, et 1891, p. 9 et 33).

(4) Une forme bilinéaire est symétrique ou alternée suivant que son déterminant est symétrique ou symétrique gauche. J. T.

(5) KRONECKER, *Ueber die congr. Transf. der bil. Formen* (*Berl. Monatsb.*, 1874, p. 441; *Œuvres*, t. I, p. 477).

(6) FROBENIUS, *Theorie der lin. Form. mit ganz. Koeff.* (*Crelle*, 1879, t. 86, § 7 et 13).

sultat (1896) dans un travail [1] où se trouve établie à nouveau toute la théorie des transformations congruentes des formes bilinéaires. Il obtient les principaux résultats des recherches de Kronecker sur les faisceaux singuliers de formes quadratiques et sur les formes congruentes, et cela sans les développements pénibles de Kronecker.

Nous avons mentionné ici une suite de recherches sur les faisceaux particuliers de formes, parmi lesquelles doivent figurer celles qui concernent la congruence des formes, les faisceaux étant formés au moyen de formes fondamentales conjuguées (§ 10), [c'est-à-dire de deux formes dont l'une se déduit de l'autre par l'échange des variables x, y].

Sans entrer ici dans les nombreuses recherches sur les faisceaux spéciaux de formes qui ont pour fondement les travaux de Kronecker et de Weierstrass (§§ 12-15), nous signalons toutefois comme particulièrement importantes celles qui concernent les faisceaux dont le déterminant n'a que des diviseurs élémentaires du premier degré; un tel faisceau peut être mis sous la même forme qu'un faisceau général (p. 93 et 124); c'est ce que Weierstrass avait déjà reconnu, dès 1858, au début du travail déjà cité, pour un faisceau de formes contenant au moins une forme définie (§ 14). Dans le cas où le déterminant d'un faisceau de formes bilinéaires ou quadratiques n'admet que des diviseurs élémentaires du premier degré, on peut, au moyen d'une méthode introduite par Cauchy, séparer du faisceau les faisceaux élémentaires qui correspondent au diviseur élémentaire du déterminant. C'est ce qu'a [redacted]

Les recherches de Kronecker et de Weierstrass sur l'équivalence des faisceaux de formes ont été récemment généralisées par S. Kantor (¹). Pendant que les recherches des premiers concernent des formes dont les coefficients sont des formes linéaires de deux variables, celles de Kantor s'étendent à des formes dont les coefficients sont des formes linéaires d'un nombre quelconque de variables. Aux diviseurs de Weierstrass correspondent alors certains nombres invariants que S. Kantor désigne sous le nom de *nombres élémentaires*.

Le concept de diviseurs élémentaires s'étend facilement à de tels systèmes, d'un rang (²) aussi élevé qu'on le veut, dont les éléments sont des nombres entiers ou des fonctions entières d'une ou de plusieurs variables de degré quelconque, ou des éléments entiers d'un corps de nombres algébriques, ou de fonctions algébriques.

Dès 1861, Smith (³) avait, pour un système de nombres entiers, introduit les nombres (invariants) que Frobenius (⁴) devait désigner comme les $\rho^{\text{ièmes}}$ diviseurs élémentaires du système considéré. En décomposant ceux-ci en facteurs qui soient les puissances de nombres premiers, on obtient tous les diviseurs élémentaires du système. En dehors de Smith, c'est surtout Frobenius (⁵) qui s'est servi de cette importante notion de la théorie des nombres, et qui l'a étendue aux systèmes précédemment décrits (⁶). Une propriété fondamentale du $\rho^{\text{ième}}$ diviseur élémentaire consiste en ce qu'il est divisible par le $(\rho-1)^{\text{ième}}$, en supposant que ρ ne soit pas plus

(¹) S. Kantor, *Theorie der Aequivalenz von linearen* x^λ *Schaaren bilinearer Formen* (*Sitz. der math.-phys. Klasse der k. b. Akad. der Wissensch. zu München von* 1897, p. 367).

(²) C'est par erreur qu'on attribue généralement à Kronecker le concept et le nom de *rang*. Frobenius a introduit l'usage de la chose dans son Mémoire *Ueber das Pfaff'sche Problem* (*Crelle*, t. 82, p. 230); il s'est servi plus tard du mot *rang* (*Crelle*, t. 86, p. 1 et 148). Kronecker, qui avait aussitôt reconnu la grande importance de ce concept, trouva aussi la dénomination très bien choisie et l'adopta (*Sitz. der Berl. Akad.*, 1884, p. 1078).

(³) Smith, *Phil. Trans.*, 1861, p. 293.

(⁴) Frobenius, *Crelle*, t. 86, p. 148.

(⁵) Frobenius, *Crelle*, t. 86, p. 149; t. 88, p. 96.

(⁶) Frobenius, *loc. cit.*, et *Sitzungsberichte der Berl. Akad.*, 1890, p. 31.

grand que le rang du système; elle ressort des recherches de Weierstrass, dans le cas dont il s'est occupé. Dans la théorie de la composition des systèmes d'éléments entiers, ces diviseurs élémentaires jouent un rôle important. Il arrive, en effet, que le $\rho^{\text{ième}}$ diviseur élémentaire d'un système qui s'obtient par la composition de deux ou plusieurs systèmes de même espèce, est un multiple entier du $\rho^{\text{ième}}$ diviseur élémentaire de chacun de ces systèmes. C'est Frobenius qui, le premier, a démontré ce théorème dans sa généralité ([1]).

Il est naturel de se demander si cette proposition peut se retourner. Qu'il en soit ainsi, c'est ce qu'il est aisé d'établir pour les systèmes de nombres entiers ou de fonctions entières ([2]); mais on n'est pas encore parvenu à l'établir dans les autres cas (p. 231).

Considérons, en particulier, deux systèmes quadratiques A et B dont les éléments soient des fonctions linéaires d'une variable λ, et tels que leurs $\rho^{\text{ièmes}}$ diviseurs élémentaires coïncident. Alors, d'après ce qui a été dit plus haut, chacun peut être déduit de l'autre par composition avec des systèmes P, Q dont les déterminants, comme on le reconnaît ensuite, sont différents de zéro et ne dépendent pas de λ; en outre, ces systèmes P, Q s'obtiennent rationnellement. En 1879, Frobenius a montré, dans le cas où les déterminants des systèmes A et B ne sont pas identiquement nuls, pour ces systèmes P, Q ainsi déterminés rationnellement, que non seulement leurs déterminants, mais encore leurs éléments, sont indépendants de λ ([3]).

Le théorème fondamental de Weierstrass sur l'équivalence des

[redacted]

necker ont été étendues par Hensel (¹), qui a, en outre, considéré des systèmes dont les éléments sont des éléments entiers ou rationnels d'un corps de nombres algébriques ou de fonctions algébriques, ce qui l'a conduit à une extension du concept de diviseur élémentaire (²). Les théorèmes essentiels sur les diviseurs élémentaires subsistent encore pour de tels systèmes (§ 18). Un intérêt particulier s'attache aux systèmes de cette espèce pour lesquels les éléments de chaque ligne sont des éléments conjugués du corps de fonctions algébriques d'une variable. On peut alors déterminer rationnellement les $\rho^{\text{ièmes}}$ diviseurs élémentaires, et obtenir ainsi la ramification de la surface de Riemann qui appartient à l'équation algébrique correspondant au corps (³). Nous touchons ici aux plus récentes applications des diviseurs élémentaires à la théorie des fonctions.

BURKHARDT (H.) UND MEYER (F.). — ENCYCLOPÄDIE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLASS IHRER ANWENDUNGEN. Erster Band : *Arithmetik und Algebra*. Redigiert von *W. Fr. Meyer*. Drittes Heft, pp. 225-352. Zweiter Band : *Analysis*. Redigiert von *H. Burkhardt*. Erstes Heft, pp. 1-160.

Nous avons essayé antérieurement de donner aux lecteurs du *Bulletin* quelque idée de l'*Encyclopédie mathématique*, de son extrême utilité, de la richesse des renseignements qu'elle contient; nous n'avons qu'à signaler l'apparition des divers fascicules à mesure que cette importante publication se développe.

Le troisième fascicule du Tome premier contient deux articles complets, et le commencement d'un autre. Le premier, dû à M. Netto, est intitulé : *Rationale Funktionen einer Veranderlichen; ihre Nullstellen*. On y trouvera les propositions

(¹) HENSEL, *Crelle*, t. 114, p. 25; *Ueber die Elementartheiler componirte Systeme, loc. cit.*, p. 109.

(²) HENSEL, *Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der algebr. Funkt. einer Variabeln* (*Crelle*, t. 115, p. 254).

(³) HENSEL, *Ueber die Ordnungen der Verzweigungen einer Riemann'schen Fläche* (*Sitz. der Berl. Akad.*, 1895, p. 933); *Ueber die Verzweigungsp. der 3 und 4-blätterigen Riemann'schen Flächen, Ibid.*, p. 1103). On trouve dans le *Journal de Crelle* (t. 117, 118) une suite d'autres travaux de Fischer, Hensel, et Landsberg sur le même sujet.

fondamentales de l'Algèbre concernant les sujets suivants : interpolation, existence des racines, décomposition en facteurs, réductibilité, plus grand commun diviseur, racines multiples, résultants, discriminants, équations à racines réelles, caractéristiques, etc. Il va de la page 227 à la page 282. Le second article, dû à M. Landsberg, est intitulé : *Algebraische Gebilde. Arithmetische Theorie algebraischer Grössen.* Il traite des *corps* ou *domaines de rationalité* (Dedekind, Kronecker), de la place de ces notions dans la théorie de Galois, des formes de Kronecker et des idéaux de Dedekind, des systèmes de modules (Dedekind), de l'extension des concepts de divisibilité et d'équivalence, etc. Il va de la page 283 à la page 319. Le troisième article se rapporte à la théorie des invariants; il est dû à M. W.-Fr. Meyer. La partie parue (p. 320-352) contient en particulier ce qui concerne l'équivalence des formes quadratiques et bilinéaires, les formes automorphes, les recherches de Gordan, Peano, Hilbert, sur le nombre fini de formes primordiales (*Urformen*), etc.

Le premier fascicule du deuxième Volume contient un article de M. Pringsheim : *Sur les fondements de la théorie des fonctions,* qui comporte un intéressant historique sur le concept de fonction, et un exposé des principales notions qui s'y rapportent. La partie la plus développée concerne naturellement les fonctions d'une seule variable. L'article se termine par quelques pages où sont condensées les notions essentielles relatives à la définition des fonctions de plusieurs variables. Il est à peine utile de dire que cet exposé, qui va de la page 1 à la page 53, est purement analytique.

[redacted]

FEHR (H.). — Application de la méthode vectorielle de Grassmann a la Géométrie infinitésimale. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Genève pour obtenir le grade de Docteur ès sciences. 1 Vol. in-8°, 94 p., Carré et Naud, Paris; 1897.

Le travail de M. Fehr se recommande par son élégance et son extrême clarté; des publications de ce genre, où les choses sont mises dans un ordre simple et naturel, où la lecture est aisée, ne peuvent qu'aider beaucoup à vulgariser quelques-unes au moins des idées de Grassmann, en montrant les simplifications qu'elles permettent d'apporter dans l'exposition. Si même le lecteur est déjà familier avec la plupart des propositions qu'établit M. Fehr, le bénéfice n'en sera que plus grand pour lui, puisque son attention se portera principalement sur la méthode. L'auteur signale, parmi les travaux antérieurs, les Mémoires de M. Herm. Grassmann fils (*Programmes de Halle*, 1886, 1888, 1893), Mémoires dont il a dû reproduire quelques passages. Cela était indispensable pour l'unité de l'exposition, qui comprend toutes les propositions essentielles d'une théorie élémentaire des propriétés infinitésimales des courbes et des surfaces.

M. Fehr rappelle d'abord quelques notions relatives au calcul géométrique : produit extérieur de deux vecteurs (bivecteur), de trois vecteurs (trivecteur); produit intérieur de deux vecteurs, opération index (au sens de M. Burali-Forti) appliquée à un vecteur ou à un bivecteur; produit intérieur de deux bivecteurs. Les définitions et propositions fondamentales concernant ces notions ne tiennent que quelques pages.

Passant ensuite aux courbes gauches définies comme le lieu de l'extrémité d'un vecteur dont l'origine est fixe, il introduit les dérivées géométriques de ce vecteur et obtient immédiatement les équations de la tangente, du plan normal, du plan osculateur, de la normale principale, les propriétés relatives à la courbure, à la torsion, les formules de Frenet et de Lancret. Pour étudier une surface considérée comme lieu de l'extrémité d'un vecteur qui dépend de deux variables u, v, M. Fehr introduit trois vecteurs-unités, dirigées, les uns suivant les tangentes aux courbes (u), (v), l'autre suivant la normale; les différentielles géométriques

du premier et du second ordre du vecteur qui définit la surface conduisent immédiatement aux deux formes quadratiques en du, dv, dont la considération fournit de la façon la plus simple les propriétés les plus importantes des surfaces, tant pour ce qui concerne la courbure des sections planes, que pour la théorie de la courbure totale ou moyenne. Un paragraphe est consacré à la courbure moyenne quadratique (Casorati, d'Ocagne).

M. Fehr traite enfin des systèmes conjugués sur une surface, pour en déduire, comme cas particuliers, les lignes de courbure et les lignes asymptotiques; les dernières pages de son Livre se rapportent aux lignes et à la courbure géodésiques. J. T.

POINCARÉ (H.). — CINÉMATIQUE ET MÉCANISMES. POTENTIEL ET MÉCANIQUE DES FLUIDES. Cours professé à la Sorbonne, rédigé par *A. Guillet*, in-8°, 385 p., C. Carré et Naud, Paris; 1899.

Le cours que M. Poincaré a fait à la Sorbonne, lorsqu'il était chargé de l'enseignement de la Mécanique physique et expérimentale, avait été très apprécié de ses auditeurs, et une reproduction autographique en avait été publiée par l'Association des anciens élèves de la Faculté des Sciences. Cette reproduction est épuisée depuis longtemps; les exemplaires en sont rares et recherchés. Aussi nous sommes assurés d'avance que, sous leur forme nouvelle, les Leçons de Cinématique et de Mécanismes seront accueillies avec la faveur qui s'attache, à juste titre, à toutes les productions

[redacted]

L. LORENZ. — ŒUVRES SCIENTIFIQUES, revues et annotées par *H. Valentiner*. Tome second, premier fascicule, in-8°, 315 p., Lehmann et Stage, Copenhague; 1899.

Nous avons déjà signalé la publication du premier Volume des Œuvres de Lorenz. Le nouveau fascicule, qui vient de paraître, a été publié avec le même soin, la même conscience que les précédents. Il contient les travaux suivants :

Mémoire sur la théorie de l'élasticité des corps homogènes à élasticité constante (publié dans le t. 58 du *Journal de Crelle*);

Sur le nombre des molécules contenues dans 1^{mgr} *d'eau;*

Détermination du degré de chaleur en mesures absolues;

La résistance électrique du mercure en mesures absolues;

Sur les méthodes à employer pour la détermination de l'ohm;

Détermination de la résistance électrique du mercure en mesures électromagnétiques absolues;

Sur la propagation de l'électricité;

Sur les conductibilités électrique et calorifique des métaux.

JULIUS LANGE (Prof. D^{r}.). — JACOB STEINERS LEBENSJAHRE IN BERLIN, 1821-1863. Nach seinen Personalakten dargestellt. Tirage à part du *Festschrift zur Erinnerung an das 75 jährige Bestehen der Friedrichs-Werdeschen Oberrealschule* (*chem. Gewerbe-Schule*). In-4° 70 p., R. Gaertner, Berlin; 1899.

Le grand géomètre Steiner naquit le 18 mars 1796 à Utzisdorf, dans le canton de Berne, en Suisse. Ses parents étaient de pauvres villageois qui désiraient utiliser ses services et le garder auprès d'eux. Mais son goût pour l'étude se déclara de très bonne heure, malgré tous les obstacles qu'il put rencontrer autour de lui. A dix-neuf ans, c'est à peine s'il savait lire; mais il avait des dispositions pour le calcul mental. En regardant et en admirant le ciel pendant la nuit, il avait acquis quelques connaissances empiriques et l'étude de l'Astronomie lui paraissait la plus belle et la plus importante dont un homme pût s'occuper.

Présenté à Pestalozzi en 1814, accueilli gratuitement dans son

établissement à Yverdon, il s'y consacra avec ardeur aux Mathématiques; il fut bientôt en état d'enseigner les éléments de ces sciences et d'acquitter ainsi une partie de sa dette envers son bienfaiteur. En 1818, il se rendit à l'Université d'Heidelberg, où, pendant cinq semestres consécutifs, il se consacra presque entièrement aux Mathématiques. En 1821, il fut appelé, sur la recommandation d'un ami, à occuper, à titre provisoire, un poste de Mathématiques au *Werdersche Gymnasium* de Berlin; mais, n'ayant pas complètement réussi dans les examens qui auraient pu lui assurer cette place, il dut y renoncer en 1822 et pourvoir à son existence à l'aide de leçons particulières. Heureusement, en 1824, fut créée la *Gewerbe Schule*, et, en 1826, Crelle fit paraître le premier numéro de son *Journal*. Steiner put, dès 1825, obtenir une place de professeur de Mathématiques à la *Gewerbe Schule*, et il put publier dans les premiers cahiers du *Journal de Crelle* ses premiers travaux, qui attirèrent sur lui l'attention de tous les géomètres et lui assurèrent, dans la personne de l'éditeur, un protecteur toujours disposé à lui venir en aide. A partir de ce moment, la carrière de Steiner était fixée. Pourtant, malgré l'éclat de ses découvertes, Steiner a dû passer dix ans dans l'enseignement secondaire. Successivement *Hilfslehrer* et *Oberlehrer*, à la *Gewerbe Schule*, c'est seulement après de nombreuses demandes et sur une chaude recommandation de Crelle qu'il fut nommé, à la fin de 1834, professeur extraordinaire à l'Université de Berlin, et il est resté professeur extraordinaire jusqu'à sa mort, survenue le 1er avril 1863. En 1881 et 1882, l'Académie de Berlin a réim- [redacted]

J.-A. GRAF, *Der Mathematiker Jacob Steiner von Utzensdorf*. Berne; 1897.

A cette seconde brochure, qui a été publiée à l'occasion du centième anniversaire de la naissance de Steiner, on peut joindre la Correspondance entre Steiner et Schlæfli, qui a été également publiée par M. Graf, à Berne, en 1896.

La nouvelle publication dont nous avons à rendre compte apportera à tout ce que nous savions de Steiner de très importantes contributions. Publiée à l'occasion du soixante-quinzième anniversaire de la fondation de la *Gewerbe Schule*, en l'honneur du géomètre qui est un des premiers et des plus illustres professeurs de cet établissement, elle offre surtout de l'intérêt pour ce qui concerne la période la plus intéressante peut-être de la vie de Steiner, celle où, dans toute la force de l'âge et du talent, il a mûri toutes ses découvertes en enseignant les Mathématiques dans une des Écoles supérieures de Berlin. La brochure de M. Lange nous fait connaître Steiner successivement comme professeur auxiliaire au *Werdersche Gymnasium* et professeur particulier (1821-1825), comme professeur auxiliaire à la *Gewerbe Schule* (1825-1829), puis *Oberlehrer* à la même École (1829-1835), enfin comme professeur d'Université (1835-1863). Son Ouvrage est composé de première main, et il a eu à sa disposition un grand nombre de documents personnels et officiels. C'est ainsi qu'il débute en donnant le *Curriculum*, si digne d'intérêt, que Steiner a écrit lui-même lorsqu'il s'est présenté, le 15 avril 1821, devant la Commission chargée de délivrer les certificats d'aptitude à l'enseignement secondaire. Il serait beaucoup trop long de signaler tout ce qu'il y a d'intéressant et de nouveau sur la vie et sur la carrière de Steiner. Tout est à lire pour qui s'intéresse au grand géomètre dans le petit Ouvrage de M. Julius Lange.

G. D.

BRIEFWECHSEL ZWISCHEN CARL FRIEDRICH GAUSS UND WOLFGANG BOLYAI, mit unterstützung der ungarischen Akademie der Wissenschaften, herausgegeben von *Franz Schmidt* und *Paul Stäckel*. In-4°, XIV-208 p., B.-G. Teubner, Leipzig; 1899.

Nous rendions compte récemment de la magnifique publication

du *Tentamen*, de Wolfgang Bolyai, publiée, sous les auspices de l'Académie hongroise des Sciences, par MM. J. König et M. Réthy, membres de cette Académie. La nouvelle publication dont nous avons aujourd'hui à rendre compte viendra naturellement se placer à côté de la précédente. Imprimée dans le même format, avec les mêmes caractères et le même luxe, elle contient un ensemble de quarante-deux lettres échangées entre Gauss et Wolfgang Bolyai, de septembre 1799 jusqu'en février 1833. Cet ensemble, il est inutile de le dire, est du plus haut intérêt. Rien de ce qui touche à Gauss ou aux Bolyai ne peut aujourd'hui nous laisser indifférents; non seulement nous tenons à ne rien ignorer des remarques mathématiques qu'ils ont pu échanger, mais toutes les indications relatives à leur vie, à leurs sentiments, ne peuvent que nous être précieuses et doivent être soigneusement recueillies. A ce point de vue, la correspondance, qui a été surtout active de 1799 à 1808, puisque trente et une lettres sur quarante-deux se rapportent à cette période, nous donne les renseignements les plus complets sur la jeunesse de Gauss; nous n'avons pas besoin de dire qu'elle nous fait connaître les deux amis sous le jour le plus favorable. Leur amitié datait de l'époque où ils étudiaient tous les deux ensemble à l'Université. Elle persista jusqu'à la mort de W. Bolyai.

Au point de vue scientifique aussi, la nouvelle publication sera bien accueillie. Il y est parlé des *Disquisitions arithmeticæ*, de la *Theoria motus*. La théorie des parallèles y tient naturellement une place importante, en particulier dans la trente sixième et la trente-septième lettre.

[redacted]

BIANCHI (L.). — **Vorlesungen über Differentialgeometrie, autorisierte deutsche Übersetzung**, von *Max Lukat*. In-8°, xvi-659 p., B.-G. Teubner, Leipzig; 1899.

Nous avons déjà rendu compte de l'excellent Ouvrage de M. L. Bianchi. Il nous suffira donc de signaler à nos lecteurs la traduction allemande, dont la publication vient d'être terminée il y a quelques jours. Cette traduction, où naturellement on n'a négligé aucune des améliorations de détail qui se présentent à l'esprit quand on revient sur les choses déjà publiées, se distingue à un point de vue plus important de l'édition italienne. Deux Chapitres nouveaux et étendus y ont été ajoutés sur la Géométrie infinitésimale des espaces à n dimensions, où l'on a envisagé plus particulièrement les espaces à courbure constante. Un Supplément qui termine l'Ouvrage contient un aperçu des recherches qu'ont inspirées à M. Bianchi les belles propositions de M. Guichard sur la déformation des quadriques de révolution.

Tout est à louer dans ces Leçons, sauf leur titre : les géomètres français avaient compris sous le nom de *Géométrie infinitésimale* l'ensemble des études exposées par M. L. Bianchi; pourquoi avoir affaibli en quelque sorte cette dénomination, en la réduisant à celle de *Géométrie différentielle?* On risque ainsi de laisser croire que la Géométrie trouve tout son domaine dans les opérations de différentiation, alors qu'elle a à son actif tant de belles intégrations inspirées ou obtenues par les méthodes qui la constituent. On fournit en outre à certains un prétexte pour la négliger, en la faisant figurer tout entière dans le Calcul différentiel, qui est considéré comme entièrement achevé et même comme se réduisant à des opérations purement mécaniques. G. D.

PIETZKER (F.). — **Beiträge zur Funktionen-Lehre**. 1 Vol. in-8°, vi-64 p., Teubner, Leipzig; 1899.

Ces *Essais* contiennent deux Mémoires très distincts par leur objet : toutefois, quelques-uns des résultats obtenus dans le premier sont utilisés dans le second.

Dans le premier Mémoire, l'auteur étudie ce qu'il appelle l'*association*; pour lui, associer deux variables x, y c'est opérer d'une manière déterminée sur les deux nombres x, y pour en déduire un troisième qui reste d'ailleurs le même quand on échange les deux nombres x, y. En spéculant sur ce seul concept et sur le concept correspondant à l'opération inverse, M. Pietzker retrouve des notions analogues à celles de l'élévation aux puissances entières ou fractionnaires, positives ou négatives, de logarithme, de quantité imaginaire, de fonction algébrique ou analytique, de dérivation et d'intégration. Il est amené à créer une suite de signes typographiques nouveaux correspondant à ces diverses notions.

Le second Mémoire se rapporte à la notion de fonction d'une variable complexe, et particulièrement de fonction *monogène*. M. Pietzker étudie les conditions auxquelles doit satisfaire une représentation géométrique d'une telle fonction. J. T.

PINET (H.). — MÉMOIRE SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES, suivi d'un Appendice donnant le détail des opérations, par *Émile Krauss*. 47 p. in-4°. Nony, Paris; 1899.

Il s'agit principalement de la recherche des racines d'une équation de degré m dont toutes les racines sont entières : l'auteur montre quel parti on peut tirer, pour limiter le nombre des essais, [redacted]

DUPORCQ (E.). — PREMIERS PRINCIPES DE GÉOMÉTRIE MODERNE à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales et des candidats à la licence et à l'agrégation. 1 Vol. in-8°, VII-160 p., Gauthier-Villars, Paris; 1899.

Le petit Volume que M. Duporcq publie sous ce titre modeste rendra d'incontestables services à une catégorie assez nombreuse d'étudiants, qui ont entendu parler des méthodes de la *Géométrie moderne*, mais qui, pressés par les exigences des examens, n'ont pas eu le temps de se familiariser avec ces méthodes, dont il est sans doute inutile de vanter ici l'élégance et la fécondité. Les études ultérieures, qu'ils ont faites dans les Écoles techniques, peuvent très bien leur avoir laissé la curiosité et le goût de ce Chapitre de la Science, qui avait été, autrefois, entr'ouvert devant eux, et où se trouvaient traitées, en quelques lignes, des questions dont ils n'entrevoyaient la solution qu'au travers de longs calculs. Il est certain, d'un autre côté, que tous ceux qui veulent acquérir des connaissances d'ensemble sur la Géométrie, et développer un peu ces connaissances dans n'importe quelle direction, doivent s'habituer à parler le langage de la *Géométrie moderne* et à en manier les méthodes. Enfin, ceux des élèves de la classe de Mathématiques spéciales, qui, grâce à une intelligence un peu vive, ont quelque loisir, tireront sans doute grand parti du Livre de M. Duporcq. Ce dernier estime que l'étude de la *Géométrie moderne* est plus profitable pour la formation de l'esprit que l'étude de l'équation aux inégalités séculaires. Il ne semble pas certain que cette dernière étude prenne dans l'enseignement une place si démesurée, eu égard à l'importance incontestable de ladite équation, qu'elle méritât une pareille mise à l'index, et, peut-être, la plupart des professeurs de Mathématiques spéciales laissent-ils à l'enseignement de la Géométrie plus de place que ne pense l'auteur. Dans des temps très reculés, l'enseignement que l'on donnait dans cette classe était destiné à préparer les élèves à l'étude du Calcul différentiel et intégral, et, par là, de la Mécanique rationnelle, étude qui, semble-t-il, reste l'objet essentiel de l'enseignement dans les hautes écoles techniques, en raison même de l'utilité que présente, dans les applications, la connaissance de ces chapitres de la Science. Il ne manque pas de bons esprits pour

regretter que ce but ait été un peu oublié. Ceux des professeurs ou des examinateurs qui l'ont encore devant les yeux sont aussi sans doute ceux qui ne font pas à la *Géométrie moderne,* dans l'enseignement, toute la place que d'autres voudraient lui attribuer. Je crois bien que personne n'en conteste l'importance intrinsèque; la discussion roule seulement sur le moment et le lieu où elle doit être enseignée; doit-on la faire pénétrer résolument dans l'enseignement élémentaire, doit-on la réserver pour les Facultés, où elle pourrait être exposée avec l'ampleur qu'elle comporte? ou bien faut-il s'arrêter à une solution intermédiaire, et se contenter de donner aux élèves des indications qui ne peuvent manquer d'exciter l'intérêt de ceux dont la curiosité n'est pas atrophiée? C'est cette dernière solution qui, le plus souvent, est adoptée dans la pratique, et il ne semble pas qu'elle soit la plus mauvaise.

Dans la mesure où la *Géométrie moderne* permet de simplifier et de coordonner les théories qui font l'objet de l'enseignement de la classe de Mathématiques spéciales, de donner plus de généralité aux énoncés des propositions qui constituent ces théories, plus de portée aux démonstrations, tout en les rendant plus brèves, il est bon de l'introduire. Et, sans doute, si les élèves s'aperçoivent que les indications qu'on est ainsi amené à leur donner sont susceptibles d'être prolongées, et ne sont, pour ainsi dire, qu'une amorce, il n'y a à cela que des avantages. Il ne faut pas, toutefois, oublier que la *Géométrie moderne* est d'une médiocre utilité pour l'étude des éléments du Calcul différentiel et intégral, et que l'introduction courante des éléments imaginaires en Géométrie ne va pas

[redacted]

souvent très facile; il en résulte cependant quelques longueurs. Et si la théorie des formes algébriques, dont la *Géométrie moderne* n'est d'ordinaire qu'une expression très élégante, doit envahir à son tour la classe de Mathématiques spéciales, quelques personnes timides ne s'effaroucheront-elles pas, et sera-t-on bien sûr que cet *esprit géométrique* dont M. Duporcq souhaite avec raison le développement y gagnera beaucoup?

Le développement de l'*esprit géométrique* accompagne-t-il nécessairement l'habitude d'un langage géométrique où les mots ont si peu la signification concrète de la Géométrie proprement dite que, pour les entendre, il faut perdre l'habitude des figures géométriques? A ce degré d'abstraction, la soi-disant Géométrie ressemble terriblement à l'Algèbre, à cette Algèbre dont les équations donnent aux propositions de la *Géométrie moderne* leur base solide et leur signification réelle. Aussi bien, il semble fort raisonnable, pour des commençants, de ne pas trop séparer des chapitres de la Science qui se recouvrent si parfaitement et qui, sauf le langage qu'on y parle, les notations qu'on emploie, traitent du même objet. L'intelligence même du langage soi-disant géométrique ne peut qu'y gagner, et les commençants risquent moins de parler une langue qu'il n'entendent pas, d'être les dupes d'analogies de mots, de se laisser éblouir par des paradoxes verbaux.

L'oubli partiel du but primitif de la classe où l'on prépare à nos grandes Écoles, que je signalais plus haut, tient sans doute à l'intérêt propre des matières qu'on y enseigne, et à cette recherche de la perfection que les professeurs apportent dans leur métier. Ces matières, on ne les enseigne plus comme une préparation, mais pour elles-mêmes, et aussi, bien entendu, pour satisfaire les examinateurs. Il est naturel que le langage de la *Géométrie moderne* ait pénétré dans l'enseignement, il n'est pas mauvais que cette pénétration ait été prudente et se soit faite toute seule. Ceux même qui auraient désiré qu'elle fût consacrée par une indication discrète insérée dans les programmes, pourraient craindre une refonte de ces programmes et les excès qu'elle risquerait d'amener : la publication d'un bon Livre élémentaire, qui permette aux élèves de développer leurs connaissances, vaut assurément mieux qu'une telle refonte.

Il est grand temps de parler de celui que vient de publier

M. Duporcq, car les observations qui précèdent ne le touchent en aucune façon, sauf peut-être une phrase de la Préface.

Le Livre lui-même est divisé en six Chapitres.

L'auteur explique d'abord l'emploi des imaginaires en Géométrie analytique (plane ou non), ainsi que l'usage des coordonnées barycentriques. Il donne des notions générales sur les méthodes de transformation, notions qui comprennent la définition des transformations de contact. Il passe ensuite à l'étude des divisions et des faisceaux homographiques, pour en donner l'application à la génération des coniques, des quadriques et des cubiques gauches, puis il traite en général des transformations homographiques et corrélatives; montre en particulier combien d'éléments correspondants il faut donner pour définir ces transformations, dont il étudie aussi les cas particuliers (perspective, homologie, etc.). La théorie des coniques est élégamment exposée en prenant pour point de départ le théorème de Desargues : outre les théorèmes fondamentaux (Pascal, Brianchon, pôles et polaires, etc.), outre les propriétés principales relatives aux normales, on trouvera dans ce Chapitre un intéressant paragraphe sur les coniques harmoniquement circonscrites ou inscrites à une conique. Les théories correspondantes, pour les quadriques, sont l'objet du Chapitre suivant. Dans ces deux Chapitres, c'est, en quelque sorte, les théorèmes généraux qui, en se développant, fournissent les propriétés particulières; dans le dernier Chapitre, l'auteur montre comment les méthodes de transformation permettent de déduire un théorème général d'une proposition démontrée dans un cas [redacted]

rales, pour en tirer, de la façon la plus brève et la plus heureuse, une foule de propriétés particulières. Signalons enfin une suite d'énoncés intéressants, sur lesquels le lecteur s'exercera avec intérêt, et qui occupent les dernières pages du Livre. J. T.

PASCAL (E.). — REPERTORIO DI MATEMATICHE SUPERIORI (DEFINIZIONI, FORMOLE, TEOREMI, CENNI BIBLIOGRAFICI). T. II, *Geometria*. 1 Vol. in-18 de la collection des manuels Hoepli. XVIII-928 p., Hoepli, Milan; 1900.

Le premier Volume du *Répertoire de Mathématiques supérieures*, consacré à l'Analyse, a eu un rapide et légitime succès : on en prépare actuellement une traduction allemande et une traduction polonaise. Le présent Volume, consacré à la Géométrie, n'est pas moins intéressant et ne rendra pas moins de services. Comme le premier Volume, il ne contient que des énoncés et des renseignements bibliographiques; les neuf cents pages qu'il renferme sont bien remplies. Voici les principales divisions :

Fondements de la Géométrie projective et analytique. Formes algébriques ternaires, quaternaires, etc. Connexes. Coniques. Quadriques. Courbes planes en général. Cubiques planes et gauches. Quartiques planes et gauches. Surfaces et courbes gauches en général. Surfaces du troisième ordre. Surfaces du quatrième ordre. Surfaces d'ordre supérieur. Géométrie de la droite. Géométrie de la sphère. Géométrie énumérative. Géométrie infinitésimale et intrinsèque. Courbes et surfaces spéciales. *Analysis situs*. Géométrie projective dans l'hyperespace. Géométrie infinitésimale et intrinsèque dans l'hyperespace. Géométrie non euclidienne. Géométrie du triangle.

Enfin, une Table alphabétique, qui comporte 28 pages de petit texte, permet de chercher dans l'un ou l'autre Volume du *Répertoire* le renseignement dont on a besoin. J. T.

SERRET (J.-A.). — LEHRBUCH DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel **Harnack**. Zweite, durchgesehene Auflage mit Unterstützung der Herren **H. Liebmann** und E. Zermelo, herausgegeben von Georg Behlmann. **Zweiter Band** : ***Integralrechnung***. 1 Vol. in-8°, XII-428 p., Teubner, **Leipzig**; 1899

Nous sommes heureux d'annoncer la **publication du second** Volume de la deuxième édition de la **traduction allemande du** *Traité de Calcul différentiel* de *J.-A. Serret*, **traduction que** l'on doit à Axel Harnack. Naturellement, le texte de cette nouvelle édition s'éloigne un peu plus encore du texte de l'auteur, lequel est devenu « *der alte Serret* ». Outre plusieurs améliorations de détail, il convient de signaler les Chapitres VII et VIII, dont le premier concerne les fonctions de plusieurs variables et les intégrales curvilignes, dont le second contient les propositions fondamentales de la théorie des fonctions d'une variable complexe, dans le sens de Cauchy. J. T.

MÉLANGES.

SUR CERTAINS SYSTÈMES TRIPLEMENT CONJUGUÉS;

PAR M. TZITZÉICA.

[redacted]

J'ajoute maintenant qu'on peut reconnaître de même sur l'élément linéaire de l'espace s'il existe ou non, en dehors des solutions x, y, z, une quatrième solution R de (1) de manière que $x^2+y^2+z^2-R^2$ en soit aussi une solution. La démonstration en est aisée.

Remarquons tout d'abord que les coefficients A_{ik} qui entrent dans les équations (1) s'expriment à l'aide des coefficients de l'élément linéaire

$$dx^2+dy^2+dz^2=\Sigma a_{ik}\,d\rho_i\,d\rho_k \qquad (i,k=1,2,3).$$

Maintenant, en vertu de l'hypothèse faite,

$$a_{ik}=\frac{\partial R}{\partial \rho_i}\frac{\partial R}{\partial \rho_k} \qquad (i \neq k=1,2,3),$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial R}{\partial \rho_1}=\sqrt{\frac{a_{31}a_{12}}{a_{23}}}, \qquad \frac{\partial R}{\partial \rho_2}=\sqrt{\frac{a_{12}a_{23}}{a_{31}}}, \qquad \frac{\partial R}{\partial \rho_3}=\sqrt{\frac{a_{23}a_{31}}{a_{12}}};$$

et l'on a une première série de relations en écrivant les conditions d'intégrabilité. On obtient une seconde série en exprimant que R est une solution du système (1). Comme dans toutes ces relations il n'y a que les coefficients a_{ik} qui interviennent, le théorème est démontré. Il est manifeste d'ailleurs que ces relations sont en même temps nécessaires et suffisantes.

2. Il résulte encore de ce qui précède qu'il n'existe pas de solution R_1 de (1) et différente de R et telle que $x^2+y^2+z^2-R_1^2$ satisfasse aussi à (1).

Il n'en est pas de même d'un réseau conjugué tracé sur une surface; en d'autres termes, il se peut très bien que x, y, z, R et $x^2+y^2+z^2-R^2$ soient des solutions d'une équation de Laplace

$$(2) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=A\frac{\partial\theta}{\partial u}+B\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

et qu'il existe en même temps une autre solution R_1 différente de R, telle que $x^2+y^2+z^2-R_1^2$ satisfasse encore à (2).

Je vais énoncer ici quelques résultats se rapportant à cette question. D'abord, s'il y a deux solutions de (1) R et R_1 différentes,

qui sont telles que $x, y, z, x^2+y^2+z^2-R^2$ et $x^2+y^2+z^2-R_1^2$ soient aussi des solutions, il y en a ∞^n (je fais toujours abstraction de la constante qu'on peut ajouter à une solution R).

Étant donné un réseau conjugué décrit par le point (x, y, z) on peut reconnaître si l'on se trouve dans ce dernier cas, où l'on a ∞^2 solutions R en même temps que les solutions $x^2+y^2+z^2-R^2$. L'équation de Laplace (1) n'est pas quelconque. On a

$$\frac{1}{A}\frac{\partial^2 A}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial v}+2\frac{\partial A}{\partial u}$$
$$=\frac{1}{B}\frac{\partial^2 B}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{B^2}\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial B}{\partial v}+2\frac{\partial B}{\partial v}=\frac{\partial A}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial v}+4AB.$$

Ensuite, si

$$dx^2+dy^2+dz^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

on a encore

$$\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial u}+2B,\qquad \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial v}=\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial v}+2A.$$

Ces conditions sont en même temps nécessaires et suffisantes.

[redacted]

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXIII; 1899. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.



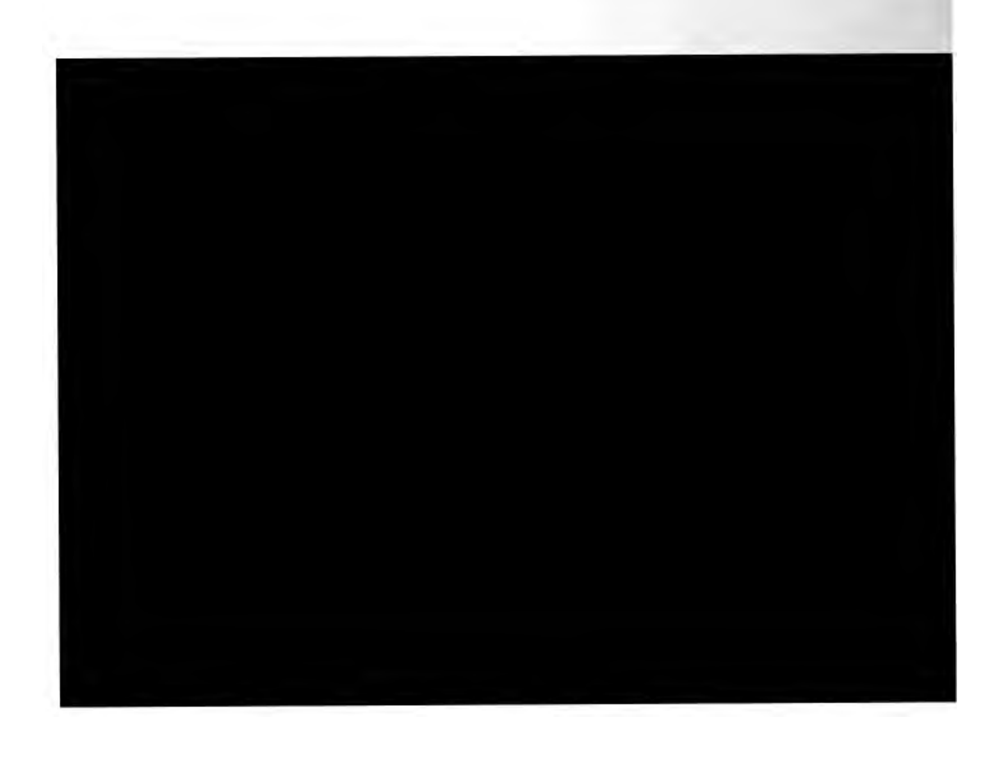
[redacted]

TABLE DES NOMS D'AUTEURS.

MÉLANGES.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXIII.

26723 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.



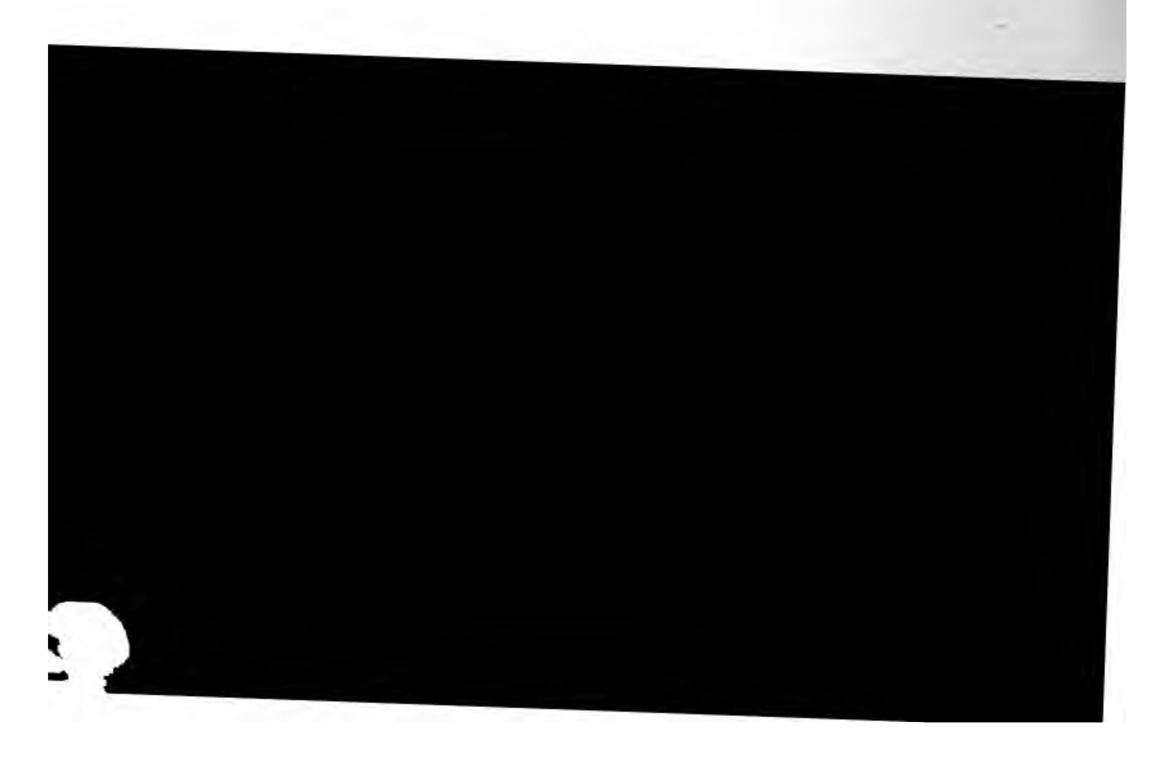
BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.



BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES É
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION, MOLK, POKROVSKY, RADAU, RAYET, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXIII. — ANNÉE 1899.

(TOME XXXIV DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

où $\Phi(x)$ désigne une fonction entière donnée, à coefficients entiers, a un nombre déterminé de racines réelles. M. Frobenius se propose de développer et de compléter ces indications de Kronecker.

Rappelons d'abord quelques définitions.

Envisageons le groupe formé par toutes les $n!$ substitutions que l'on peut obtenir au moyen de n symboles; soient A, B, S trois substitutions de ce groupe telles que l'on ait

$$S^{-1}AS = B;$$

on dit alors que les deux substitutions A et B sont *semblables*. On appelle *classe de substitutions* l'ensemble de toutes les substitutions du groupe envisagé qui sont semblables entre elles.

Si une substitution A est formée de e cycles contenant respectivement f_1, f_2, ..., f_e éléments, on dit que $f_1, f_2, \ldots, f_e$ sont les *invariants* de la classe de substitutions dont A fait partie. Cauchy a montré, en effet, que si ces nombres sont les mêmes pour deux substitutions A et B, ces deux substitutions sont semblables, et qu'inversement si A et B désignent deux substitutions semblables, ces deux substitutions sont formées du même nombre de cycles contenant respectivement les mêmes nombres d'éléments. (*Exercices d'Analyse*, t. III.)

M. Frobenius démontre que si $\varphi(x)$ désigne une fonction entière quelconque de x, à coefficients entiers, de degré n, n'ayant pas de racines doubles, et telle que le coefficient de x^n soit égal à 1, et si p désigne un nombre premier positif qui ne soit pas contenu dans le discriminant de $\varphi(x)$, on peut toujours former une substitution F de n éléments telle que la classe de substitutions dont F fait partie soit *entièrement déterminée* par le nombre p seulement. Si $\varphi(x)$ est congrue, modulo p, à un produit de e facteurs premiers de degrés $f_1, f_2, \ldots, f_e$, ces derniers nombres sont les invariants de la classe de substitutions déterminée par p.

Envisageons ensuite un groupe quelconque G de substitutions formées au moyen des mêmes n symboles; soit g l'ordre de ce groupe. On dit d'une fonction entière à coefficients entiers de n variables indépendantes $t_1, t_2, \ldots, t_n$, qui ne change pas par les substitutions de G et change par toute autre substitution effectuée sur $t_1, t_2, \ldots, t_n$, qu'elle *appartient* au groupe G. Soit [redacted]

où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ désignent les n racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, o

$$\begin{pmatrix} \xi_{\alpha_1}, & \xi_{\alpha_2}, & \ldots & \xi_{\alpha_n} \\ \xi_1, & \xi_2, & \ldots, & \xi_n \end{pmatrix}$$

est une quelconque des $n!$ substitutions possibles de ces n symboles et où le produit est étendu à tous les systèmes $\xi_{\alpha_1}, \xi_{\alpha_2}, \ldots, \xi_{\alpha_n}$. C'est à cette fonction $\Phi(x)$ que M. Frobenius applique la relation de Kronecker. Il obtient ainsi, en utilisant pour déterminer m un théorème démontré par M. Jordan au § 366 de son *Traité des substitutions,* le théorème fondamental que voici :

« Envisageons l'ensemble des nombres premiers p_λ qui déterminent la même *classe* (λ) de substitutions formées au moyen de n symboles. Appe ons *densité* de cet ensemble de nombres premiers p_λ le nombre D_λ défini co coefficient de $\log \frac{1}{w}$ dans la relation

$$\Sigma p_\lambda^{-1-w} = D_\lambda \log \frac{1}{w}$$

dans laquelle $P(w)$ désigne une série entière en w et où la somme du premier membre est étendue à tous les nombres p_λ. *La densité de l'ensemble de nombres premiers envisagés est égale au quotient du nombre de substitutions de la classe envisagée, par l'ordre du groupe de l'équation* $\varphi(x) = 0$. »

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_e$ les invariants de la classe (λ) envisagée. Il résulte du théorème fondamental que nous venons d'énoncer que si le groupe de $\varphi(x)$ contient des substitutions formées de e cycles de $f_1, f_2, \ldots, f_e$ éléments, il existe un nombre infini de nombres premiers qui déterminent cette classe (λ), tandis que dans le cas contraire, il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers déterminant cette classe (λ).

Ce théorème fondamental ne diffère, d'ailleurs, que par la forme du théorème de Dedekind (*Göttinger Abhandlungen*, t. XXIII) :

« Si l'on envisage un corps algébrique de degré n et e nombres positifs $f_1, f_2, \ldots, f_e$ dont la somme soit égale à n, la densité des nombres premiers (rationnels) qui se décomposent en e facteurs premiers idéaux de degrés $f_1, f_2, \ldots, f_e$ est à la densité de tous les nombres premiers, comme le nombre de celles des substitutions du groupe du corps envisagé qui sont formées de e cycles de $f_1, f_2, \ldots, f_e$ symboles est au nombre de toutes les substitutions de ce groupe. »

On en déduit immédiatement les corollaires suivants :

« La densité des nombres premiers p tels que la congruence

$$\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p},$$

où $\varphi(x)$ désigne une fonction entière, à coefficients entiers donnés, d'une variable x, admette le même nombre ν de racines réelles, est égale au quotient du nombre des substitutions du groupe de $\varphi(x)$ qui laissent invariables ν, et ν seulement, des symboles qui figurent dans ces substitutions, par l'ordre du groupe de ces substitutions. »

« Si le groupe d'un corps algébrique ne contient aucune substitution formée

de e cycles de $f_1, f_2, \ldots, f_e$ symboles, la densité des nombres premiers (rationnels) qui se décomposent en e facteurs premiers idéaux de degrés $f_1, f_2, \ldots, f_e$ est nulle. »

Par contre, le théorème de M. Dedekind, d'après lequel si un nombre premier (rationnel) p se décompose, dans un corps algébrique, en e facteurs premiers idéaux de degrés $f_1, f_2, \ldots, f_e$, le groupe de ce corps algébrique contient nécessairement une substitution formée de e cycles de $f_1, f_2, \ldots, f_e$ symboles, ne peut être rattaché au théorème fondamental. M. Frobenius reproduit la démonstration de ce théorème que M. Dedekind lui avait communiquée en 1882.

2. On peut restreindre la notion de classe de substitutions et toutes celles qui s'y rattachent en prenant comme point de départ, au lieu du groupe formé par les $n!$ substitutions de n symboles, un groupe déterminé H formé par un nombre moindre de substitutions de ces n symboles.

Si le groupe H contient une substitution S telle que, A et B désignant deux substitutions de H, on ait

$$S^{-1}AS = B,$$

on dit que les deux substitutions A et B sont *conjuguées*. L'ensemble des substitutions de H qui sont conjuguées entre elles forme une *classe* de substitutions dans le sens restreint que nous adopterons maintenant. Deux substitutions conjuguées sont nécessairement semblables; mais deux substitutions semblables ne sont pas nécessairement conjuguées. Si une des substitutions d'une classe déterminée est formée de e cycles de $f_1, f_2, \ldots, f_e$ éléments, il en sera de même des autres substitutions de cette classe, mais $f_1, f_2, \ldots, f_e$ ne seront plus les seuls invariants de cette classe.

Si le groupe envisagé H, d'ordre h, est formé par les substitutions $S_1, S_2, \ldots, S_h$, et si A désigne une des substitutions d'une classe donnée (λ), les substitutions

$$S_1^{-1}AS_1, \quad S_2^{-1}AS_2, \quad \ldots, \quad S_h^{-1}AS_h$$

représenteront toutes les substitutions de la classe (λ). Si parmi ces substitutions il y en a ν_λ qui soient échangeables avec A et si h_λ est le nombre des substitutions différentes de la classe (λ), on a



On dira que la substitution A et le nombre premier idéal π se *correspondent*. Aux divers nombres premiers idéaux contenus dans un même nombre premier rationnel p correspondront alors les diverses substitutions de la classe dont A fait partie. On peut donc aussi dire que cette classe de substitutions et le nombre premier rationnel p se correspondent.

3. Soit G un groupe quelconque contenu dans le groupe envisagé H. Désignons par ξ un nombre de l'espèce ω qui reste le même quand on applique les substitutions de G, mais change quand on applique toute autre substitution, et par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ce que devient ξ quand on applique toutes les substitutions de H; on sait que n est égal au quotient de l'ordre h de H par l'ordre g de G.

Si l'on applique la formule de Kronecker à la fonction

$$\Phi(x) = \left[\prod_{\nu=1}^{n}(x-\xi_\nu)\right]^g,$$

on démontre aisément que, A désignant toujours une substitution quelconque du groupe H, a l'ordre de A, et $\varphi(a)$ le nombre d'entiers premiers relatifs à a et inférieurs à a, le nombre de celles des substitutions différentes de H qui sont conjuguées aux puissances

$$A, A^2, \ldots, A^{\varphi(a)}$$

est proportionnel à la densité des nombres premiers (rationnels) qui correspondent aux diverses classes de substitutions dont A, A^2, ..., $A^{\varphi(a)}$ font partie. M. Hurwitz avait adressé, en 1896, à M. Frobenius une lettre dans laquelle il était parvenu au même résultat.

Toutefois avec cette notion de classe plus restreinte que celle du n° 1, on ne peut démontrer, en suivant la même voie qu'au n° 1, la formule

$$\Sigma p_\lambda^{-1-w} = \frac{h_\lambda}{h}\log\left(\frac{1}{w}\right) + P(w),$$

dans laquelle les lettres ont le même sens qu'au n° 1, mais se rapportent à la notion *restreinte* de classe. Il est toutefois possible que cette formule ait encore lieu et il y aurait dans ce cas un grand intérêt à en rechercher la démonstration.

Si, en effet, on pouvait, par un procédé quelconque, démontrer que cette formule a encore lieu lorsqu'on restreint la notion de classe comme on l'a indiqué au n° 2, on pourrait aussi, comme le fait observer M. Frobenius, énoncer le théorème bien remarquable que voici :

« La densité des nombres premiers qui correspondent à une même classe de substitutions d'un groupe H est égale à la densité de cette classe. »

M. Frobenius montre enfin que, à chaque substitution du groupe H correspond une infinité de nombres premiers idéaux. La densité de ces nombres premiers idéaux est égale à la valeur réciproque de l'ordre de la substitution envisagée.

Fuchs (*L.*). — Sur une classe d'équations différentielles linéaires homogènes. (753-769).

1. Soit

$$\frac{d^n u}{dz^n} + p_2 \frac{d^{n-2} u}{dz^{n-2}} + \ldots + p_n u = 0$$

une équation différentielle linéaire homogène dans laquelle le coefficient de $\frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}}$ est nul, et qui soit telle que, quand la variable z décrit un contour fermé quelconque (U) autour de un ou de plusieurs des points singuliers, l'équation fondamentale correspondante soit vérifiée par les valeurs réciproques des racines de l'équation que l'on obtient en changeant, dans cette équation fondamentale, les coefficients des diverses puissances de la variable par les expressions conjuguées. Supposons aussi que les racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de l'une au moins de ces équations fondamentales soient inégales et qu'elles soient égales à 1 en valeur absolue.

Désignons par (C) un des contours fermés décrits par z, pour lesquels l'équation fondamentale correspondante ait précisément pour racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Soit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ le système fondamental correspondant d'intégrales de l'équation différentielle envisagée. Quand z a décrit le contour (C), les intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont devenues

$$\overline{u_1} = \lambda_1 u_1 = u_1, \qquad \overline{u_2} = \lambda_2 u_2, \qquad \ldots, \qquad \overline{u_n} = \lambda_n u_n;$$

quand z a décrit un contour fermé quelconque (U), les intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont devenues

$$\begin{aligned} \overline{u_1} &= a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + \ldots + a_{1n} u_n, \\ \overline{u_2} &= a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + \ldots + a_{2n} u_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overline{u_n} &= a_{n1} u_1 + a_{n2} u_2 + \ldots + a_{nn} u_n. \end{aligned}$$

Nous désignerons, pour abréger, par $(a_{k,l})$ la substitution

[redacted]

à coefficients indépendants de z et tels que leurs rapports soient
réels, qui ne change pas quel que soit le chemin fermé que l'on fa
la variable z. »

2. Plaçons-nous, au contraire, dans l'hypothèse de l'existence d'une forme bilinéaire

$$\varphi = \sum_{k,l} Q^{(k,l)} u_k u'_l \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ l = 1, 2, \ldots, n),$$

à coefficients $Q^{(k,l)}$ indépendants de z, ne changeant pas quand on re
les u_k et les u'_l par les expressions

$$\overline{u_k} = a_{k1} u_1 + \ldots + a_k$$
$$\overline{u'_l} = a'_{l1} u_1 + \ldots +$$

dans lesquelles se transforment u_k et u'_l lorsque z é
quelconque, et supposons en outre que, pour un au moins de ces chemins fermés, les racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de l'équation fondamentale correspondante soient inégales et égales à 1 en valeur absolue; supposons aussi que $u_1, u_2, \ldots, u_n$ désignent précisément le système fondamental d'intégrales de cette équation fondamentale, et enfin supposons qu'il n'existe entre les divers produits

$$u_k u'_l$$

aucune relation linéaire homogène à coefficients constants.

M. Fuchs démontre que φ est alors nécessairement de la forme

$$\varphi = A_1 u_1 u'_1 + A_2 u_2 u'_2 + \ldots + A_n u_n u'_n,$$

où les rapports des coefficients A sont des nombres réels.

Il démontre ensuite que chaque déterminant mineur principal du déterminant

$$|A'_{kl}|$$

coïncide avec le déterminant mineur principal correspondant du déterminant

$$|a_{kl}|;$$

il en résulte, d'après un théorème bien connu de la théorie des déterminants, que tout déterminant mineur principal M d'ordre $(n-p)$ du déterminant

$$|a'_{kl}|$$

coïncide avec celui des déterminants mineurs principaux d'ordre p du déterminant $|a_{kl}|$ dont les termes diagonaux exclus ont pour indices ceux du mineur M envisagé.

Ce théorème permet d'établir la réciproque du théorème démontré à la fin du n° 1. M. Fuchs montre, en effet, que sous les hypothèses faites concernant

l'existence de φ, l'équation fondamentale

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\omega & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-\omega & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}-\omega \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^n \omega^n + a_1 \omega^{n-1} + a_2 \omega^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\omega + 1 = 0,$$

correspondant à un chemin fermé quelconque (U) parcouru par la variable z, est vérifiée par les valeurs réciproques des racines de l'équation

$$(-1)^n \omega^n + a'_1 \omega^{n-1} + a'_2 \omega^{n-2} + \ldots + a'_{n-1}\omega + 1 = 0,$$

c'est-à-dire par les racines de l'équation

$$(-1)^n + a'_1 \omega + a'_2 \omega^2 + \ldots + a'_{n-1}\omega^{n-1} + \omega^n = 0.$$

3. On étend facilement les deux théorèmes démontrés à la fin des n°s 1 et 2 au cas où l'équation différentielle envisagée est remplacée par l'équation plus générale

$$\frac{d^n w}{dz^n} + q_1 \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + q_2 \frac{d^{n-2} w}{dz^{n-2}} + \ldots + q_n w = 0,$$

dans laquelle la quantité q_1 est supposée différente de zéro. Mais le déterminant $|a_{kl}|$ n'étant alors plus égal à 1, les deux théorèmes intermédiaires du n° 2 doivent être modifiés; ils sont remplacés par les théorèmes suivants :

« Tout déterminant mineur principal d'ordre p du déterminant

$$|A'_{kl}|$$

est égal au produit du mineur principal correspondant du déterminant $|a_{kl}|$ par l'expression

$$|A'_{kl}|^p. \text{ »}$$

« Tout déterminant mineur principal M d'ordre $(n-p)$ du déterminant

$$|A'_{kl}|$$

inversement, toute fonction monogène de $x+iy$ qui vérifie cette équation aux dérivées partielles vérifie aussi l'équation différentielle du n° 3.

Ainsi, lorsqu'il existe une forme bilinéaire

$$\varphi = A_1 u_1 u'_1 + A_2 u_2 u'_2 + \ldots + A_n u_n u'_n$$

[où $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des coefficients constants, où $u_1, u_2, \ldots, u_n$ désigne un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle du n° 3, et $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$ les quantités conjuguées de $u_1, u_2, \ldots, u_n$], ne changeant pas quand z parcourt un chemin fermé quelconque, l'équation différentielle qui est vérifiée par les carrés des intégrales de l'équation aux dérivées partielles que nous venons d'écrire, est vérifiée par des fonctions univoques de x et de y.

5. Plaçons-nous maintenant dans le cas particulier où les intégrales de l'équation différentielle envisagée n'ont, pour chacune des valeurs de la variable z, qu'un nombre *fini* de valeurs différentes. Si alors ω désigne l'une des racines de l'équation fondamentale correspondant à un contour fermé quelconque (U) décrit par z autour d'un ou de plusieurs points singuliers, on sait (*Journal de Crelle*, t. 66) qu'une des intégrales u de l'équation différentielle se transforme, quand z a parcouru (U), en

$$\overline{u} = \omega u;$$

comme en faisant décrire à z le contour (U) un nombre quelconque de fois, on ne peut obtenir qu'un nombre fini de valeurs de u, il faut donc que ω soit une racine de l'unité. Si donc on sait seulement que les racines de l'équation fondamentale correspondant à l'un des contours fermés (U) sont inégales, on peut en conclure qu'il existe une forme bilinéaire

$$\varphi = A_1 u_1 u'_1 + A_2 u_2 u'_2 + \ldots + A_n u_n u'_n$$

(où $A_1, A_2, \ldots, A_n$ désignent des constantes à rapports réels; $u_1, u_2, \ldots, u_n$ un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle; $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$ les quantités conjuguées), ne changeant pas quand z parcourt tous les contours fermés (U) possibles.

Ce théorème s'applique manifestement aux équations différentielles linéaires homogènes intégrables algébriquement. On peut donc compléter les recherches de M. Picard sur ce sujet (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV), car il résulte du dernier théorème que, dans le cas du quatrième type de M. Jordan aussi bien que dans les autres cas, il existe une forme bilinéaire φ ne changeant pas quand on effectue une substitution fondamentale quelconque. Dans le cas du quatrième type de M. Jordan, la forme

$$\varphi = u_1 u'_1 + u_2 u'_2 + 2a(1-a) u_3 u'_3,$$

où a désigne un nombre réel quelconque, jouit de cette propriété.

***Kœnigsberger* (*L.*).** — Sur les principes de la Mécanique. (899-944).

1. Dans son Mémoire fondamental sur le principe de la moindre action (*Journal de Crelle*, t. 100), Helmholtz a appelé l'attention des géomètres sur

les avantages qu'il y aurait non seulement en Physique mathématique, mais aussi en Mécanique rationnelle, à se placer à un point de vue plus général que celui que l'on adopte d'ordinaire, en établissant les principes de ces Sciences. Ce point de vue plus général consiste à remplacer, dans les équations différentielles du mouvement d'un ensemble de points matériels quelconques, la fonction

$$-\mathrm{T}-\mathrm{U},$$

où T désigne la force vive et U la fonction des forces données *intérieures*, par une fonction *quelconque donnée* H de t, des coordonnées des points de l'ensemble et des dérivées premières de ces coordonnées prises par rapport à t.

M. Kœnigsberger développe cette idée de Helmholtz en la généralisant encore. Il suppose, en effet, que les dérivées qui figurent dans la fonction H ne sont pas nécessairement du premier ordre seulement, mais peuvent être d'ordres quelconques inférieurs à un nombre arbitrairement fixé.

Au lieu d'étudier les mouvements des ensembles de points matériels ayant lieu conformément à l'équation qui traduit en langue algébrique le principe de d'Alembert

$$\sum\left[\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-\mathrm{X}\right)\delta x+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-\mathrm{Y}\right)\delta y+\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-\mathrm{Z}\right)\delta z\right]=0,$$

où les δx, δy, δz désignent les composantes des déplacements virtuels des points (x, y, z) de l'ensemble de points envisagés, compatibles avec les liaisons de cet ensemble, supposées bilatérales, où m désigne la masse, $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ les composantes de l'accélération et X, Y, Z les composantes de la force totale donnée appliquée en (x, y, z), M. Kœnigsberger étudie les mouvements des ensembles de points (x, y, z) ayant lieu de façon que l'équation fondamentale

$$\sum\left[\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x'}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x''}-\ldots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x^{(\nu)}}+\mathrm{Q}\right]\delta x$$

$$+\sum\left[\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial y}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial y'}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial y''}-\ldots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial y^{(\nu)}}+\mathrm{R}\right]\delta y$$

[redacted]

où $f_1, f_2, \ldots, f_m, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ désignent des f[illegible] tinues données, d'ailleurs arbitraires, de t et des coordonnées x, y [illegible] quantités Q, R, S désignent également des fonctions arbitraires[illegible] de t et des coordonnées x, y, z.

De cette équation fondamentale il déduit, par la méthode des mu[illegible] les équations différentielles du mouvement des points de l'ensemble en

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x'_k} + \ldots + (-1)^\nu \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}} + Q_k + \lambda_1 f_{1k} + \lambda_2 f_{2k} + \ldots + \lambda_m f_{mk} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial y'_k} + \ldots + (-1)^\nu \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial y_k^{(\nu)}} + R_k + \lambda_1 \varphi_{1k} + \lambda_2 \varphi_{2k} + \ldots + \lambda_m \varphi_{mk} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial z_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial z'_k} + \ldots + (-1)^\nu \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial z_k^{(\nu)}} + S_k + \lambda_1 \psi_{1k} + \lambda_2 \psi_{2k} + \ldots + \lambda_m \psi_{mk} = 0,$$

dans lesquelles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sont les m multiplicateurs. Si l'ensemble est formé par n points de coordonnées $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$ ces équations sont au nombre de $3n$; on les obtient en remplaçant successivement l'indice k par les nombres $1, 2, \ldots, n$.

2. Si les fonctions $f_{ik}, \varphi_{ik}, \psi_{ik}$ sont, pour $i = 1, 2, \ldots, m$ et $k = 1, 2, \ldots, n$, les dérivées partielles par rapport à x_k, y_k, z_k d'une même fonction F_i de t, $x_1, \ldots, z_n$, les équations différentielles du mouvement peuvent être transformées en équations analogues à celles de Lagrange qui comprennent d'ailleurs les équations de Lagrange comme cas particulier. En désignant par $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ des variables indépendantes définissant à tout instant la position de l'ensemble envisagé, on a pour $s = 1, 2, \ldots, \mu$ la relation

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_s}\right) + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) + P_s = 0,$$

où l'on a posé pour abréger

$$P_s = \sum_{k=1}^{n}\left(Q_k \frac{\partial x_k}{\partial p_s} + R_k \frac{\partial y_k}{\partial p_s} + S_k \frac{\partial z_k}{\partial p_s}\right),$$

de sorte que P_s est une fonction de $t, p_1, p_2, \ldots, p_\mu$.

3. Si les fonctions P_s ne dépendent que de t, la variation

$$\delta \int_{t_0}^{t_1}\left(H + \sum_{\lambda=1}^{\mu} P_\lambda p_\lambda\right) dt,$$

qui comprend comme cas particulier celle de l'intégrale envisagée par Helmholtz au début de son Mémoire fondamental sur le principe de la moindre action, est nécessairement nulle lorsqu'on suppose seulement que les variations δp_1, $\delta p_2, \ldots, \delta p_\mu, \delta p'_1, \delta p'_2, \ldots, \delta p'_\mu, \ldots, \delta p_1^{(\nu-1)}, \delta p_2^{(\nu-1)}, \ldots, \delta p_\mu^{(\nu-1)}$, arbitraires entre t_0 et t_1, sont nulles pour $t = t_0$ et pour $t = t_1$.

On peut dire aussi, et sous cette forme le théorème est souvent plus commode à appliquer dans diverses questions de Physique, que si l'on convient d'envisager dans l'expression de H les quantités $p'_1, p'_2, \ldots, p'_\mu, p''_1, \ldots, p_\mu^{(\nu)}$ comme

des variables indépendantes $p_{11}, p_{21}, \ldots, p_{\mu 1}, p_{12}, \ldots, p_{\mu\nu}$ la variation

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ H + \sum_{\lambda=1}^{\mu} \left[P_\lambda p_\lambda - (p_{\lambda 1} - p'_\lambda) \frac{\partial H}{\partial p_{\lambda 1}} - (p_{\lambda 2} - p''_\lambda) \frac{\partial H}{\partial p_{\lambda 2}} - \ldots \right. \right.$$
$$\left. \left. - (p_{\lambda\nu} - p_\lambda^{(\nu)}) \frac{\partial H}{\partial p_{\lambda\nu}} \right] \right\} dt,$$

est nulle, si l'on suppose seulement que les variations

$$\delta p_s, \quad \delta p'_s, \quad \ldots, \quad \delta p_s^{(\nu-1)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu),$$

soient nulles pour $t = t_0$ et pour $t = t_1$, et que le déterminant

$$\left| \frac{\partial^2 H}{\partial p_{\alpha\beta}\, \partial p_{\gamma\delta}} \right|, \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots, \mu \\ \beta = 1, 2, \ldots, \nu \\ \gamma = 1, 2, \ldots, \mu \\ \delta = 1, 2, \ldots, \nu \end{pmatrix}$$

ne soit pas nul identiquement.

4. Lorsque H ne dépend pas de t explicitement, on déduit aisément des équations analogues à celles de Lagrange précédemment établies la relation suivante, qui est analogue à celle qui exprime le théorème de la conservation des forces vives et la comprend comme cas particulier :

$$H - \sum_{s=1}^{\mu} p'_s \left[\frac{\partial H}{\partial p'_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p''_s} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial p'''_s} - \ldots + (-1)^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right]$$
$$- \sum_{s=1}^{\mu} p''_s \left[\frac{\partial H}{\partial p''_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p'''_s} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\text{iv})}} - \ldots + (-1)^{\nu-2} \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right]$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- \sum_{s=1}^{\mu} p_s^{(\nu)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} + \sum_{s=1}^{\mu} \int P_s p'_s \, dt = h,$$

où h désigne une constante.

Si l'on définit une fonction E de $p_1, p_2, \ldots, p_\mu, p'_1, p'_2, \ldots, p'_\mu, \ldots, p_s^{(2\nu-1)}$,

[redacted]

Si l'on observe que dans le cas particulier où l'on a $H = -T - U$, l'expression qui définit E se réduit à celle qui définit l'*énergie* de l'ensemble de points matériels auquel se réduit l'ensemble de points en mouvement envisagés, et si, pour cette raison, l'on désigne encore, dans le cas général, E sous le nom d'*énergie de l'ensemble des points envisagés*, la dernière relation met en évidence le fait que dans tous les mouvements de points géométriques envisagés par M. Kœnigsberger, aussi bien que dans le cas des mouvements de points matériels envisagés en Mécanique rationnelle, l'énergie de l'ensemble de points augmente ou diminue dans la mesure où le travail des forces extérieures diminue ou augmente.

5. L'expression qui définit E la définit univoquement dès que H est donnée en fonction univoque de $p_1, \ldots, p_\mu^{(\nu)}$. Supposons inversement que E soit donnée en fonction univoque de $p_1, \ldots, p_\mu^{(2\nu-1)}$ et cherchons à déterminer H. En suivant toujours la marche suivie par Helmholtz quand $H = -T - U$, on voit aisément que H est nécessairement de la forme

$$H = -p'_1 \int \frac{(E)}{p'^2_1} dp'_1 + A_1 p'_1 + A_2 p'_2 + \ldots + A_\mu p'_\mu,$$

où (E) est la transformée de la fonction donnée E par les substitutions

$$p'_2 = \alpha_2 p'_1, \quad p'_3 = \alpha_3 p'_1, \quad \ldots, \quad p'_\mu = \alpha_\mu p'_1,$$

dans lesquelles $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\mu$ désignent des constantes arbitraires qui, après l'intégration, doivent être remplacées par les quotients

$$\frac{p'_2}{p'_1}, \quad \frac{p'_3}{p'_1}, \quad \ldots, \quad \frac{p'_\mu}{p'_1},$$

et où $A_1, A_2, \ldots, A_\mu$ désignent des fonctions *arbitraires* de $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$. *La fonction* H *n'est donc déterminée par la fonction* E *qu'à une fonction linéaire près des dérivées premières des paramètres indépendants, prises par rapport à t.*

C'est à cette fonction linéaire de $p'_1, p'_2, \ldots, p'_\mu$ que correspondent les *mouvements cachés* d'Helmholtz et de Hertz.

6. Dans ce qui suit, les équations de condition sont supposées contenir, en général, t explicitement. Envisageons l'expression

$$M = \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_k^{(\nu)2}}} \left[\frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x'_k} + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}} + Q_k \right]^2$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{\dfrac{\partial^2 H}{\partial y_k^{(\nu)2}}} \left[\frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial y'_k} + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial y_k^{(\nu)}} + R_k \right]^2$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{\dfrac{\partial^2 H}{\partial z_k^{(\nu)2}}} \left[\frac{\partial H}{\partial z_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial z'_k} + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial z_k^{(\nu)}} + S_k \right]^2$$

dans laquelle H est supposée être une fonction entière des dérivées d'ordre ν,

$$x_1^{(\nu)},\ y_1^{(\nu)},\ z_1^{(\nu)},\ \ldots,\ x_n^{(\nu)},\ y_n^{(\nu)},\ z_n^{(\nu)},$$

telle que l'on ait, quels que soient ceux des nombres 1, 2, ..., n que l'on prenne pour chacun des deux indices ρ et σ,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_\rho^{(\nu)}\,\partial y_\sigma^{(\nu)}} = \frac{\partial^2 H}{\partial y_\rho^{(\nu)}\,\partial z_\sigma^{(\nu)}} = \frac{\partial^2 H}{\partial z_\rho^{(\nu)}\,\partial x_\sigma^{(\nu)}} = 0,$$

et quels que soient ceux des nombres *différents* 1, 2, ..., n que l'on prenne pour chacun des indices ρ et σ,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_\rho^{(\nu)}\,\partial x_\sigma^{(\nu)}} = \frac{\partial^2 H}{\partial y_\rho^{(\nu)}\,\partial y_\sigma^{(\nu)}} = \frac{\partial^2 H}{\partial z_\rho^{(\nu)}\,\partial z_\sigma^{(\nu)}} = 0,$$

tandis que, pour $\rho = 1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_\rho^{(\nu)2}},\quad \frac{\partial^2 H}{\partial y_\rho^{(\nu)2}},\quad \frac{\partial^2 H}{\partial z_\rho^{(\nu)2}}$$

soient tous négatifs.

On peut démontrer que si l'on fixe les coordonnées et leurs dérivées d'ordres inférieurs à 2ν, la fonction M de

$$x_1^{(2\nu)},\ y_1^{(2\nu)},\ z_1^{(2\nu)},\ \ldots,\ x_n^{(2\nu)},\ y_n^{(2\nu)},\ z_n^{(2\nu)}$$

prend une valeur plus petite pour les valeurs de $x_1^{(2\nu)}, \ldots, z_n^{(2\nu)}$ qui vérifient les équations analogues à celles de Lagrange que pour tout autre système de valeurs de $x_1^{(2\nu)}, \ldots, z_n^{(2\nu)}$ choisies parmi celles qui vérifient les équations de liaison. Ce théorème est la généralisation du *principe de Gauss*.

[redacted]

sant $H = - T - U$,

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{s=1}^{\mu} \Big\{ p'_s \left[\frac{\partial H}{\partial p'_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p''_s} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial p'''_s} - \ldots + (-1)^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right]$$

$$+ p''_s \left[\frac{\partial H}{\partial p''_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p'''_s} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\text{IV})}} - \ldots + (-1)^{\nu-2} \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right] + \ldots$$

$$+ p_s^{(\nu)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \Big\} dt$$

$$= - \int_{t_0}^{t} \delta E \, dt - \int_{t_0}^{t} \sum_{s=1}^{\mu} P_s \, \delta p_s \, dt$$

$$+ \left(\sum_{s=1}^{\mu} \Big\{ \left[\frac{\partial H}{\partial p'_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p''_s} + \ldots + (-1)^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right] \delta p_s \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial H}{\partial p''_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p'''_s} + \ldots + (-1)^{\nu-2} \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right] \delta p'_s + \ldots + \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \delta p_s^{(\nu-1)} \Big\} \right)_{t_0}^{t}$$

$$+ \left(\sum_{s=1}^{\mu} \Big\{ p'_s \left[\frac{\partial H}{\partial p'_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p''_s} + \ldots + (-1)^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right] \right.$$

$$\left. + p''_s \left[\frac{\partial H}{\partial p''_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p'''_s} + \ldots + (-1)^{\nu-2} \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right] + \ldots + p_s^{(\nu)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \Big\} \right) \delta t.$$

Ce théorème comprend (pour $H = - T - U$), comme cas particulier, celui que M. Boltzmann a établi en 1866 (*Sitzungsberichte der Kais. Akad. der Wissenschaften zu Wien*) et qui joue par rapport au second théorème fondamental de la Théorie mécanique de la chaleur le même rôle que joue le théorème des forces vives par rapport au premier théorème fondamental de cette théorie.

8. M. Kœnigsberger montre ensuite qu'au point de vue général auquel il se place, les propriétés des fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$, démontrées par Helmholtz dans le cas des ensembles de points matériels, continuent à avoir lieu. Il démontre ensuite le théorème de Helmholtz d'après lequel, lorsque les fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ envisagées comme des fonctions linéaires quelconques données de $p''_1, p''_2, \ldots, p''_\mu$ dont les coefficients dépendent de $p_1, p_2, \ldots, p_\mu, p'_1, p'_2, \ldots, p'_\mu$, vérifient les équations

$$\frac{\partial P_s}{\partial p''_\sigma} = \frac{\partial P_\sigma}{\partial p''_s},$$

$$\frac{\partial P_s}{\partial p'_\sigma} + \frac{\partial P_\sigma}{\partial p'_s} = 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial P_\sigma}{\partial p''_s},$$

$$\frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P_s}{\partial p'_\sigma} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p'_s} \right),$$

où chacun des deux indices s et σ peut prendre une quelconque des valeurs 1, 2, ..., μ, il existe une fonction H de $p_1, p_2, \ldots, p_\mu, p'_1, p'_2, \ldots, p'_\mu$ qui vérifie les équations de Lagrange. Les calculs ne sont effectués que dans le cas où

$\mu = 2$, mais la marche suivie ne dépend pas de cette hypothèse. Helmholtz s'était contenté d'indiquer comment, dans le cas où μ est égal à 3, on peut démontrer le théorème en s'appuyant sur des propriétés empruntées à la théorie du potentiel.

9. La notion si importante de mouvement caché due, elle aussi, à Helmholtz et que Hertz a prise comme point de départ dans son exposé des principes de la Mécanique rationnelle, peut être généralisée de la même façon que toutes les notions précédentes.

Envisageons, à cet effet, la fonction

$$H_1 = H - \sum_{\lambda=1}^{r} (c_{\sigma_\lambda} p_{\sigma_\lambda} + c'_{\sigma_\lambda} p'_{\sigma_\lambda} + \ldots + c^{(\nu)}_{\sigma_\lambda} p^{(\nu)}_{\sigma_\lambda}),$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ désignent r quelconques des μ paramètres $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ et où $c_{\sigma_\lambda}, c'_{\sigma_\lambda}, \ldots, c^{(\nu)}_{\sigma_\lambda}$ sont, pour $\lambda = 1, 2, \ldots, r$, des constantes quelconques. Quand on y remplace $p_{\sigma_1}, p_{\sigma_2}, \ldots, p_{\sigma_r}$ et leurs dérivées des divers ordres prises par rapport à t par leurs valeurs en fonction des autres paramètres $p_{\rho_1}, p_{\rho_2}, \ldots, p_{\rho_{\mu-r}}$ et de leurs dérivées prises par rapport à t, tirées des équations

$$(2) \qquad \frac{\partial H}{\partial p_{\sigma_\lambda}} = c_\lambda, \qquad \frac{\partial H}{\partial p'_{\sigma_\lambda}} = c'_\lambda, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_{\sigma_\lambda}} = c^{(\nu)}_{\sigma_\lambda},$$

elle se transforme en une fonction H' des $(p - r)$ paramètres $p_{\rho_1}, \ldots, p_{\rho_{\mu-r}}$ et de leurs dérivées prises par rapport à t, qui vérifie les équations

$$(3) \qquad \frac{\partial H'}{\partial p_{\rho_\delta}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H'}{\partial p'_{\rho_\delta}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H'}{\partial p''_{\rho_\delta}} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H'}{\partial p^{(\nu)}_{\rho_\delta}} + P_{\rho_\delta} = 0,$$

$$(\delta = 1, 2, \ldots, \mu - r),$$

dont la forme est la même que celle des équations analogues à celles de Lagrange, mais où la fonction H est remplacée par la fonction H' qui contient moins de paramètres et a, en général, une toute autre forme analytique.

Dans le cas particulier où $H = -T - U$ et où H ne dépend pas de p_{σ_1},

[redacted]

Désignons, pour $s = 1, 2, \ldots, \mu$, par ω_s les quantités

$$p_s^{(\nu)} = \omega_s\left[p_1, \ldots, p_\mu, \ldots, p_1^{(\nu-1)}, \ldots, p_\mu^{(\nu-1)}, \frac{\partial\Phi}{\partial p_1^{(\nu-1)}}, \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial p_\mu^{(\nu-1)}}\right]$$

obtenues en résolvant, par rapport à $p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, \ldots, p_\mu^{(\nu)}$, les μ équations

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_1^{(\nu-1)}} = \frac{\partial H}{\partial p_1^{(\nu)}}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial p_2^{(\nu-1)}} = \frac{\partial H}{\partial p_2^{(\nu)}}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial p_\mu^{(\nu-1)}} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu^{(\nu)}};$$

et envisageons l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \sum_{s=1}^{\mu} p'_s \frac{\partial\Phi}{\partial p_s} + \sum_{s=1}^{\mu} p''_s \frac{\partial\Phi}{\partial p'_s} + \ldots + \sum_{s=1}^{\mu} p_s^{(\nu-1)} \frac{\partial\Phi}{\partial p_s^{(\nu-2)}} \\
&\quad + \sum_{s=1}^{\mu} \omega_s\left[p_1, \ldots, p_\mu, \ldots, p_1^{(\nu-1)}, \ldots, p_\mu^{(\nu-1)}, \frac{\partial\Phi}{\partial p_1^{(\nu-1)}}, \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial p_\mu^{(\nu-1)}}\right] \frac{\partial\Phi}{\partial p_s^{(\nu-1)}} \\
&\quad = H\left[p_1, \ldots, p_\mu, \ldots, p_1^{(\nu-1)}, \ldots, p_\mu^{(\nu-1)}, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu\right] + \sum_{s=1}^{\mu} P_s p_s.
\end{aligned}$$

Si l'on peut déterminer une intégrale complète de cette équation, de la forme

$$\Phi\left[t, p_1, \ldots, p_\mu, \ldots, p_1^{(\nu-1)}, \ldots, p_\mu^{(\nu-1)}\right],$$

c'est-à-dire une intégrale dépendant de $\mu\nu$ constantes arbitraires pour lesquelles on pourra choisir les valeurs initiales

$$p_1^{(0)}, \ldots, p_\mu^{(0)}, \ldots, p_1^{(\nu-1),(0)}, \ldots, p_\mu^{(\nu-1),(0)}$$

des variables $p_1, \ldots, p_\mu, \ldots, p_1^{(\nu-1)}, \ldots, p_\mu^{(\nu-1)}$, et une constante arbitraire additive, et si l'on résout par rapport à $p_1, \ldots, p_\mu, \ldots, p_1^{(\nu-1)}, \ldots, p_\mu^{(\nu-1)}$, les équations

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial p_s^{(0)}} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial p'}\right)_0 + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p''_1}\right)_0 - \ldots + (-1)^{\nu}\left(\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)_0, \\
\frac{\partial\Phi}{\partial p_s^{\prime(0)}} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right)_0 + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'''_s}\right)_0 - \ldots + (-1)^{\nu-1}\left(\frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{\partial\Phi}{\partial p_s^{(\nu-2),(0)}} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu-1)}}\right)_0 + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)_0, \\
\frac{\partial\Phi}{\partial p_s^{(\nu-1),(0)}} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)_0,
\end{aligned}$$

dans lesquelles $p_1^{(\nu),(0)}, \ldots, p_\mu^{(\nu),(0)}, \ldots, p_1^{(2\nu-1),(0)}, \ldots, p_\mu^{(2\nu-1),(0)}$ sont à envisager comme de nouvelles constantes arbitraires, les expressions $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ seront les intégrales générales du mouvement de l'ensemble de points envisagés qui définissent la position de cet ensemble dès que l'on connaît la valeur des

constantes arbitraires y figurant, et les expressions de $p'_1, \ldots, p_\mu^{(\nu-1)}$ fourniront les dérivées d'ordre $1, \ldots, (\nu-1)$ de ces intégrales générales.

11. Dans le cas où il n'y a pas de forces extérieures et où le théorème de la conservation des forces vives a lieu, les équations analogues aux équations canoniques et qui s'y réduisent pour $H = -T - U$, sont les suivantes, que l'on suppose écrites pour $s = 1, 2, \ldots, \mu$,

$$\frac{dp_{s,2\nu-1}}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_{s,2\nu-2}}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial p'_s}, \quad \ldots, \quad \frac{dp_{s,\nu}}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial p_s^{(\nu-1)}},$$
$$\frac{dp_s^{(\nu-1)}}{dt} = -\frac{\partial(E)}{\partial p_{s,\nu}}, \quad \frac{dp_s^{(\nu-2)}}{dt} = -\frac{\partial(E)}{\partial p_{s,\nu+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial(E)}{\partial p_{s,2\nu-1}},$$

où les quantités $p_{s,2\nu-1}, p_{s,2\nu-2}, \ldots, p_{s,\nu}$ **sont définies par les relations**

$$p_{s,2\nu-1} = \frac{\partial H}{\partial p'_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_s} + \ldots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} = p_{s,2\nu-1},$$
$$p_{s,2\nu-2} = \frac{\partial H}{\partial p''_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'''_s} + \ldots + (-1)^{\nu-2}\frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} = p_{s,2\nu-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$p_{s,\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}},$$

et où (E) désigne la fonction dans laquelle se transforme E **lorsque l'on y** substitue aux dérivées $p_s^{(\nu)}, p_s^{(\nu+1)}, \ldots, p_s^{(2\nu-1)}$ **leurs valeurs en fonction des** quantités $p_s, p'_s, \ldots, p_s^{(\nu-1)}, p_{s,2\nu-1}, p_{s,2\nu-2}, \ldots, p_{s,\nu}$ **tirées des dernières relations.**

Frobenius (*G.*). — Sur les caractères d'un groupe fini. (985-1021).

1. On dit que deux éléments A et B d'un groupe H sont *conjugués* (par rapport à ce groupe) lorsque, C désignant un élément du même groupe, on a

$$C^{-1}AC = B;$$

[redacted]

la classe (β) de ce groupe [la classe (β) n'est pas nécessairement [illegible] le la classe (α)], et désignons par

$$h_{\alpha,\beta}$$

le nombre de ceux de ces éléments AB qui sont identiques à l'élément principal U. Si les deux classes (α') et (β) ne sont pas inverses on a $h_{\alpha,\beta} = 0$; si elles sont inverses on a $h_{\alpha,\alpha'} = h_\alpha = h_{\alpha'}$.

Envisageons, de même, tous les éléments ABC du groupe, pour lesquels A désigne un quelconque des éléments de la classe (α), B un quelconque des éléments de la classe (β), C un quelconque des éléments de la classe (γ) de ce groupe, et désignons par

$$h_{\alpha,\beta,\gamma}$$

le nombre de ces éléments ABC qui sont identiques à l'élément principal U; les classes (α), (β), (γ) peuvent être distinctes ou non. On démontre aisément que le nombre $h_{\alpha,\beta,\gamma}$ ne change pas quand on permute ses trois indices d'une façon quelconque, et aussi que l'on a

$$h_{\alpha\beta_0} = h_{\alpha\beta}, \qquad h_{\alpha'\beta'\gamma'} = h_{\alpha\beta\gamma},$$

que $h_{\alpha,\beta,\gamma}$ est divisible par le plus petit commun multiple des trois nombres h_α, h_β, h_γ, enfin que l'on a toujours

$$\sum_{\gamma=0}^{k-1} h_{\alpha\beta\gamma} = h_\alpha h_\beta;$$

ces relations permettent de calculer plus aisément les différents nombres $h_{\alpha,\beta,\gamma}$ pour un groupe donné H et la dernière fournit des vérifications faciles de l'exactitude de ces calculs.

Si l'on définit de la même façon des nombres

$$h_{\alpha,\beta,\gamma,\dots,\nu}$$

ayant un nombre quelconque d'indices plus petit ou égal à $\varkappa$, on voit sans peine que ces nombres jouissent des mêmes propriétés que les nombres $h_{\alpha,\beta,\gamma}$; ils peuvent d'ailleurs être composés avec ces derniers nombres comme il résulte de la relation générale

$$h_{\alpha,\beta,\gamma,\dots,\xi,\eta,\dots,\nu} = \sum \frac{1}{h_\lambda} h_{\alpha,\beta,\gamma,\dots,\xi,\lambda} h_{\lambda',\eta,\dots,\nu},$$

où le signe Σ indique que l'on doit former l'expression à sommer, pour chacun des indices $\lambda = \alpha, \beta, \dots, \nu$ en donnant chaque fois à l'indice λ' la valeur indiquant la classe (λ') inverse de la classe (λ), puis faire la somme des $\varkappa$ expressions ainsi formées. Ainsi on a en particulier

$$h_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = \sum \frac{1}{h_\lambda} h_{\alpha\beta\lambda} h_{\lambda'\gamma\delta}.$$

2. Si l'on pose

$$p_{\alpha,\beta} = \sum \frac{1}{h_\varkappa h_\lambda} h_{\varkappa'\lambda\sigma} h_{\sigma'\varkappa\beta},$$

où le signe Σ indique qu'il faut former l'expression à sommer, en remplaçant,

indépendamment l'un de l'autre $\varkappa$ et λ par chacun des indices $0, 1, \ldots, k-1$ et en donnant chaque fois à $\varkappa'$ et λ' les valeurs indiquant les classes inverses $(\varkappa')$ et (λ') des classes $(\varkappa)$ et (λ), le déterminant

$$|p_{\alpha,\beta}| \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, k-1,\ \beta = 0, 1, \ldots, k-1)$$

est nécessairement différent de zéro. Il en résulte, d'après le théorème fondamental établi par Weierstrass et M. Dedekind (*Göttinger Nachrichten*, 1884 et 1885), que les k équations

$$h_\beta h_\gamma x_\beta^{(\varkappa)} x_\gamma^{(\varkappa)} = f^{(\varkappa)} \sum h_{\alpha'\beta\gamma} x_\alpha^{(\varkappa)}$$

[où le signe Σ indique qu'il faut former l'expression à sommer pour chacun des k indices $\alpha = 0, 1, \ldots, k-1$, en donnant chaque fois à α' la valeur indiquée par la classe (α') inverse de la classe (α), et où $f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(k-1)}$ désignent des constantes arbitrairement fixées] admettent k systèmes différents de solutions

$$\begin{array}{llll} \chi_0^{(0)}, & \chi_1^{(0)}, & \ldots, & \chi_{k-1}^{(0)}, \\ \chi_0^{(1)}, & \chi_1^{(1)}, & \ldots, & \chi_{k-1}^{(1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \chi_0^{(k-1)}, & \chi_1^{(k-1)}, & \ldots & \chi_{k-1}^{(k-1)}; \end{array}$$

le déterminant

$$|\chi_\alpha^{(\varkappa)}| \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \ldots, k-1 \\ \varkappa = 0, 1, \ldots, k-1 \end{pmatrix}$$

formé au moyen de ces solutions est différent de zéro.

Si l'on désigne par r un paramètre indéterminé, par $z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}$ des variables indépendantes, le déterminant

$$\left| \sum_{\gamma=0}^{k-1} h_{\alpha\beta'\gamma} z_\gamma - r h_{\alpha\beta'} \right| \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \ldots, k-1 \\ \beta = 0, 1, \ldots, k-1 \end{pmatrix},$$

qui s'annule quand on y remplace r par l'une quelconque des k valeurs

[redacted]

3. Les relations

$$\sum h_\alpha \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_{\alpha'}^{(\lambda)} = 0,$$

dans lesquelles le signe Σ a toujours le même sens que précédemment, ont lieu pourvu que $\varkappa$ soit différent de λ; lorsque $\varkappa = \lambda$, on a, au contraire, les relations

$$\sum h_\alpha \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_{\alpha'}^{(\varkappa)} = \frac{1}{e^{(\varkappa)}} h f^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, k-1),$$

où $e^{(0)}, e^{(1)}, \ldots, e^{(k-1)}$ désignent des constantes. Les k^2 quantités $\chi_\alpha^{(\varkappa)}$ vérifient d'ailleurs le système formé par les k^2 équations linéaires et homogènes

$$\frac{h}{e^{(\varkappa)} f^{(\varkappa)}} h_\alpha \chi_\alpha^{(\varkappa)} = \sum p_{\alpha\beta'} \chi_\beta^{(\varkappa)} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, 2, \ldots, k-1 \\ \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, k-1 \end{pmatrix},$$

où le signe Σ indique que la somme porte sur les k indices $\beta = 0, 1, \ldots, k-1$, en donnant dans chacun des termes à β' la valeur indiquée par la classe (β') inverse de la classe (β). Il en résulte que les k quantités

$$g^{(\varkappa)} = e^{(\varkappa)} f^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1)$$

sont les racines de l'équation du $k^{\text{ième}}$ degré que l'on obtient en égalant à zéro le développement du déterminant

$$| g p_{\alpha\beta'} - h h_{\alpha\beta'} | \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, 2, \ldots, k-1 \\ \beta = 0, 1, 2, \ldots, k-1 \end{pmatrix}.$$

M. Frobenius démontre aisément que ces k racines sont réelles et positives.

4. L'équation

$$\left| \sum_{\gamma=0}^{k-1} h_{\alpha\beta'\gamma} z_\gamma - r h_{\alpha\beta'} \right| = 0,$$

de degré k en r, n'a que des racines simples, mais son premier membre se décompose, après qu'on a résolu l'équation

$$| g p_{\alpha\beta'} - h h_{\alpha\beta'} | = 0$$

qui est de degré k en g, en autant de facteurs que cette dernière équation a de racines distinctes, de façon que, à une racine d'ordre de multiplicité m de l'équation en g corresponde un facteur de degré m en r.

5. Jusqu'ici les constantes $f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(k-1)}$ étaient arbitrairement fixées. Si l'on prend pour ces constantes les racines carrées positives des nombres $g^{(0)}$, $g^{(1)}, \ldots, g^{(k-1)}$, les k quantités $\chi_0^{(0)}, \chi_0^{(1)}, \ldots, \chi_0^{(k-1)}$ qui sont respectivement égales aux k quantités $f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(k-1)}$, sont aussi égales aux k quantités $e^{(0)}, e^{(1)}, \ldots, e^{(k-1)}$ et les $k(k-1)$ quantités

$$\chi_\alpha^{(\varkappa)} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, 2, \ldots, k-1 \\ \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, k-1 \end{pmatrix}$$

peuvent être mises sous la forme de sommes de racines $n_\alpha^{\text{ièmes}}$ de l'unité, où n_α est l'ordre des éléments de la classe (α).

6. M. Frobenius nomme *caractères* du groupe H, chacun des k systèmes

$$\chi_0^{(\varkappa)},\ \chi_1^{(\varkappa)},\ \ldots,\ \chi_{k-1}^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, k-1);$$

le système où l'indice supérieur est ($\varkappa$) est le $\varkappa^{\text{ième}}$ caractère de ce groupe.

Chaque caractère d'un groupe est formé d'autant de nombres que ce groupe contient de classes et chacun de ces nombres correspond à l'une des classes du groupe.

A deux classes inverses (α) et (α') correspondent des valeurs $\chi_\alpha^{(\varkappa)}$ et $\chi_{\alpha'}^{(\varkappa)}$ qui sont conjuguées, pourvu que l'on prenne pour $f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(k-1)}$ des nombres réels; à une classe bilatérale correspond donc alors, dans chacun des k caractères une valeur réelle $\chi_\alpha^{(\varkappa)}$; à chaque caractère imaginaire

$$\chi_0^{(\varkappa)},\ \chi_1^{(\varkappa)},\ \ldots,\ \chi_{k-1}^{(\varkappa)}$$

est joint un caractère imaginaire conjugué

$$\chi_{0'}^{(\varkappa)},\ \chi_{1'}^{(\varkappa)},\ \ldots,\ \chi_{(k-1)'}^{(\varkappa)}.$$

On nomme souvent (Weber, *Mathematische Annalen*, t. XX) un caractère réel : *caractère bilatéral*, et deux caractères imaginaires conjuguées : *caractères inverses*.

7. M. Dedekind a, le premier, mis en évidence le rôle capital que joue dans l'étude d'un groupe quelconque H d'ordre h le déterminant de degré h du système

$$(\xi_{PQ^{-1}}),$$

dont les éléments de chaque colonne s'obtiennent en faisant parcourir à P les h éléments du groupe H rangés dans un ordre arbitrairement fixé, les éléments de chaque ligne étant alors ceux que l'on obtient en faisant parcourir à Q les h éléments du groupe H rangés dans le même ordre; Q^{-1} désigne, comme tou- [redacted]

C'est en s'appuyant sur cette relation et sur celles qui ont été éta haut qu'il établit que *les racines de l'équation du $k^{\text{ième}}$ degré en g,*

$$|gp_{\alpha\beta'} - hh_{\alpha\beta'}| = 0,$$

qui, nous le savons déjà (n° 3), sont des nombres réels et positifs, *sont des nombres entiers.* Il démontre également que si $z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}$ désignent des variables indépendantes, la fonction Θ n'a que des diviseurs élémentaires *linéaires.*

Le déterminant

$$\left|\sum_{\gamma=0}^{k-1} h_{\alpha\beta'\gamma} z_\gamma - r h_{\alpha\beta'}\right|$$

dont les zéros sont les valeurs $\zeta^{(\varkappa)}$ de r qui permettent de déterminer les caractères du groupe envisagé, est ainsi lié d'une façon bien remarquable à la fonction caractéristique

$$\Theta(z_0 - r, z_1, z_2, \ldots, z_{k-1})$$

du déterminant de ce groupe. On a, en effet, d'après ce qui précède, d'une part, puisque $\gamma^{(\varkappa)} = g^{(\varkappa)}$, la relation

$$\Theta(z_0 - r, z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}) = \prod_{\varkappa=0}^{k-1} [\zeta^{(\varkappa)} - r]^{g^{(\varkappa)}},$$

et l'on a, d'autre part, la relation

$$\left|\sum_{\gamma=0}^{k-1} h_{\alpha\beta'\gamma} z_\gamma - r h_{\alpha\beta'}\right| = \prod_{\varkappa=0}^{k-1} h_\varkappa [\zeta^{(\varkappa)} - r].$$

8. La fonction caractéristique du déterminant d'un groupe engendre bien simplement les nombres $h_{\alpha,\beta}, h_{\alpha,\beta,\gamma}, h_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}, \ldots, h_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\nu}$ concernant ce groupe; M. Frobenius montre que l'on a, en effet, le développement en série

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\,\frac{\partial \log \Theta(z_0 - r, z_1, z_2, \ldots, z_{k-1})}{\partial r}
&= r^{-1} + z_0 r^{-2} + \Big(\sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha,\beta} z_\alpha z_\beta\Big) r^{-3} \\
&\quad + \Big(\sum_{\alpha,\beta,\gamma} h_{\alpha,\beta,\gamma} z_\alpha z_\beta z_\gamma\Big) r^{-4} + \ldots \\
&\quad + \Big(\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\nu} h_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\nu} z_\alpha z_\beta z_\gamma \ldots z_\nu\Big) r^{-n-1} + \ldots,
\end{aligned}$$

où les sommes sont étendues à toutes les combinaisons possibles des indices marqués, choisies parmi les nombres $0, 1, 2, \ldots, k-1$. Elle permet donc aussi d'obtenir les *caractères* du groupe, car, une fois les nombres h connus, on déduit de la relation

$$\left|\sum_{\gamma} h_{\alpha\beta'\gamma} z_\gamma\right| = \prod_{\varkappa=0}^{k-1} h_\varkappa \zeta^{(\varkappa)},$$

les valeurs des k quantités $\zeta^{(\varkappa)}$ et, par suite, celles des quantités dont les $\zeta^{(\varkappa)}$ sont, par définition, des fonctions linéaires et homogènes à coefficients connus.

Dans le cas particulier d'un groupe H dont deux quelconques des éléments sont échangeables, le nombre de classes est manifestement égal au nombre d'éléments du groupe; on a alors pour $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, h-1$,

$$e^{(\varkappa)} = f^{(\varkappa)} = 1, \qquad h_\varkappa = 1;$$

le déterminant Θ du groupe est donc identique au déterminant

$$\left|\sum_\gamma h_{\alpha\beta'\gamma} z_\gamma\right|.$$

Pour les groupes cycliques, la fonction linéaire et homogène ζ n'est autre que la résolvante de Lagrange. C'est M. Spottiswoode (*Crelle*, t. 51) qui a le premier effectué, dans ce cas très particulier, la décomposition de la fonction Θ pour tous les groupes à éléments échangeables.

9. Les définitions, les théorèmes et les formules précédents peuvent être étendus sans modification au cas où l'on remplace, dès le début des recherches, la notion de *classe* par une notion plus générale sur laquelle M. Frobenius appelle l'attention.

Convenons de dire de deux éléments A et A_1 d'un groupe H qu'ils sont conjugués *par rapport à un groupe* G *dont* H *est un sous-groupe invariant*, lorsque, S désignant une substitution de G, on a

$$A_1 = S^{-1}AS;$$

les éléments $A_1, B_1, \ldots$ conjugués, par rapport à G, des éléments A, B, ... du groupe H appartenant à une même classe (α) de H, forment eux aussi une classe (β) de H, si, pour former $A_1, B_1, \ldots$ au moyen de A, B, ... on emploie la même substitution S de G. Si l'on envisage successivement toutes les substitutions S de G, on obtient une suite de classes (α), (β), (γ), ... de H, que M. Frobenius réunit en une même *classe généralisée* $((\rho))$; les diverses classes (α), (β), (γ), ... sont dites *conjuguées entre elles par rapport au groupe* G.

En reprenant la chaîne des définitions et raisonnements des numéros précédents, on est amené à définir des quantités

[redacted]

où $\tau_1^{(\varkappa)}$ est un des facteurs linéaires du déterminant Θ_1 que l'on obti[illegible] -lant, dans le déterminant Θ du groupe H, les variables z dont les [illegible], β, γ, ... sont ceux qui figurent dans les classes (α), (β), (γ), ... ré[illegible]s une même classe généralisée $((\rho))$.

Il en résulte que l'on a entre les diverses quantités χ et $\bar{\chi}$ les rela[illegible]

$$\frac{f^{(\varkappa)}}{f_1^{(\varkappa)}}\bar{\chi}_\rho^{(\varkappa)} = \frac{1}{r}[\chi_\alpha^{(\varkappa)} + \chi_\beta^{(\varkappa)} + \chi_\gamma^{(\varkappa)} + \ldots],$$

où r est le nombre de classes (α), (β), (γ), ... contenues dans la classe généralisée $((\rho))$.

Si l'on désigne par ψ une quantité que l'on formera au moyen de l'élément A du groupe H comme on a formé χ au moyen de l'élément

$$A_1 = S^{-1}AS,$$

où S est un élément déterminé du groupe G, les quantités

$$\psi_0^{(\varkappa)}, \quad \psi_1^{(\varkappa)}, \quad \ldots, \quad \psi_{k-1}^{(\varkappa)},$$

représentent le même caractère du groupe H que les quantités

$$\chi_0^{(\varkappa)}, \quad \chi_1^{(\varkappa)}, \quad \ldots, \quad \chi_{k-1}^{(\varkappa)};$$

l'ordre seul des termes de ces deux suites est, en général différent.

Si l'on fait varier l'élément S de G, cet ordre changera encore en général, mais, quel qu'il soit, les caractères relatifs par rapport à G n'auront pas changé.

M. Frobenius désigne les diverses suites

$$\psi_0^{(\varkappa)}, \quad \psi_1^{(\varkappa)}, \quad \ldots, \quad \psi_{k-1}^{(\varkappa)}$$

obtenues en prenant successivement pour S tous les éléments du groupe G, sous le nom de *caractères conjugués* du caractère

$$\chi_0^{(\varkappa)}, \quad \chi_1^{(\varkappa)}, \quad \ldots, \quad \chi_{k-1}^{(\varkappa)}.$$

Les facteurs linéaires du déterminant Θ du groupe H qui donnent naissance à des facteurs linéaires égaux du déterminant Θ_1, correspondent précisément à des caractères conjugués entre eux. Si s est le nombre de ces caractères conjugués, il peut être avantageux dans les calculs de choisir, au moins pour certaines valeurs de $\varkappa$,

$$f_1^{(\varkappa)} = sf^{(\varkappa)}, \qquad e_1^{(\varkappa)} = e^{(\varkappa)};$$

mais alors, pour ces indices $\varkappa$, le nombre $g_1^{(\varkappa)} = e_1^{(\varkappa)} f_1^{(\varkappa)}$, qui est toujours un nombre entier, n'est plus nécessairement, comme l'était $g^{(\varkappa)} = e^{(\varkappa)} f^{(\varkappa)} = [\chi_0^{(\varkappa)}]^2$, (*voir* n° 5), *le carré d'un nombre entier*.

De ce que H est un sous-groupe invariant de G, on déduit que les classes généralisées du groupe H sont des classes du groupe G; ce ne sont naturellement pas toutes les classes de ce groupe.

10. M. Frobenius donne plusieurs exemples de la détermination des caractères d'un groupe. Il envisage en particulier les groupes d'ordres $h = 12$, 24, 60,

120; puis le groupe d'ordre $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ étudié par Gierster (*Mathematische Annalen*, t. XVIII) et formé par les substitutions linéaires

$$y = \frac{\gamma + \delta z}{\alpha + \beta z} \text{ (mod. } p\text{)}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \text{ (mod } p\text{)},$$

où p désigne un nombre premier impair.

Jahnke (*E.*). Sur un système orthogonal général formé au moyen de fonctions Thêta de deux arguments et sur les applications que l'on en peut faire en Mécanique rationnelle. (1023-1030).

M. Caspary a établi des relations entre les éléments d'un système orthogonal et les fonctions Thêta (*Comptes rendus* et *Journal de Mathématiques*, 1890; *Annales de l'École Normale*, 1893), et en a déduit un nouveau procédé pour résoudre des problèmes de Mécanique rationnelle.

Il exprime d'abord d'une façon générale, au moyen des fonctions Thêta, les neuf coefficients

$$a_{m,n} \qquad (m = 1, 2, 3;\ n = 1, 2, 3)$$

d'une substitution orthogonale à déterminant $+1$ et les six expressions différentielles

$$p_h = -(a_{1k}da_{1l} + a_{2k}da_{2l} + a_{3k}da_{3l}),$$
$$v_h = \quad a_{k1}da_{l1} + a_{k2}da_{l2} + a_{k3}da_{l3},$$

où les indices h, k, l désignent respectivement soit les nombres 1, 2, 3, soit les nombres 2, 3, 1, soit les nombres 3, 1, 2; puis, tenant compte des équations différentielles du problème de Mécanique envisagé, il détermine convenablement les fonctions arbitraires figurant dans ces expressions et les arguments arbitraires dont dépendent les fonctions Thêta.

M. Caspary a appliqué ce procédé à la résolution du problème de la rotation d'un solide rigide autour d'un point fixe et à celle du problème du mouvement [redacted]

Kœnigsberger (L.). — Sur les principes de la Mécanique. Second article. (1173-1182).

Supposons que la fonction donnée H soit de la forme

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H} = \omega\,[&x_1^2+y_1^2,\ z_1,\ \ldots,\ x_n^2+y_n^2,\ z_n,\ x_1'^2+y_1'^2,\ z_1',\ \ldots,\\
&x_n'^2+y_n'^2,\ z_n',\ \ldots,\ x_1^{(\nu)2}+y_1^{(\nu)2},\ z_1^{(\nu)},\ \ldots,\ x_n^{(\nu)2}+y_n^{(\nu)2},\ z_n^{(\nu)}]\\
&+\Omega\,[t,\ \mathrm{R}_1,\ \mathrm{R}_1',\ \ldots,\ \mathrm{R}_1^{(\nu)},\ \mathrm{R}_2,\ \mathrm{R}_2',\ \ldots,\ \mathrm{R}_2^{(\nu)},\ \ldots],
\end{aligned}
$$

où ω et Ω désignent des fonctions quelconques données des quantités écrites entre crochets, et où R_1, R_2, ... représentent des fonctions de

$$t,\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_n,\ z_n,$$

vérifiant les relations

$$\sum_{k=1}^{n}\left(y_k\frac{\partial \mathrm{R}_\mu}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial \mathrm{R}_\mu}{\partial y_k}\right)=0, \qquad (\mu=1,2,\ldots,m),$$

tandis que $\mathrm{R}_1^{(h)}$, $\mathrm{R}_2^{(h)}$, ... désignent les dérivées d'ordre h de ces fonctions par rapport à t. Supposons aussi que les forces extérieures et les équations de liaison vérifient les relations

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(y_k\mathrm{Q}_k-x_k\mathrm{R}_k)=0,\\
&\sum_{k=1}^{n}(y_k f_{\mu k}-x_k\varphi_{\mu k})=0, \qquad (\mu=1,2,\ldots,m).
\end{aligned}
$$

Sous ces hypothèses, les équations analogues à celles de Lagrange (et qui s'y réduisent quand l'ensemble de points envisagés est un ensemble de points *matériels* et que $\mathrm{H}=-\mathrm{T}-\mathrm{U}$, où T désigne la force vive et U la fonction des forces intérieures appliquées aux points de cet ensemble de points matériels) admettent comme intégrale l'équation différentielle d'ordre $2\nu-1$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{\nu}(-1)^r\sum_{\lambda=0}^{r-1}(-1)^\lambda\Bigg\{&\frac{d^{r-\lambda-1}}{dt^{r-\lambda-1}}\left(\frac{\partial\omega}{\partial u_{kr}}\right)\left[y_k^{(\lambda)}x_k^{(r)}-x_k^{(\lambda)}y_k^{(r)}\right]\\
&+(r-\lambda-1)\frac{d^{r-\lambda-2}}{dt^{r-\lambda-2}}\left(\frac{\partial\omega}{\partial u_{kr}}\right)\left[y_k^{(\lambda)}x_k^{(r+1)}-x_k^{(\lambda)}y_k^{(r+1)}\right]\\
&+\ldots+\frac{\partial\omega}{\partial u_{kr}}\left[y_k^{(\lambda)}x_k^{(2r-\lambda-1)}-x_k^{(\lambda)}y_k^{(2r-\lambda-1)}\right]\Bigg\}=\mathrm{C},
\end{aligned}
$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$u_{kr}=x_k^{(r)2}+y_k^{(r)2},$$

et où C désigne une constante.

Si ω est une fonction de

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2,\ \ldots,\ \ x_n^2+y_n^2+z_n^2,\ \ x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2,\ \ldots,\ \ x_n^{(\nu)2}+y_n^{(\nu)2}+z_n^{(\nu)2}$$

et si les relations de condition que nous venons d'énumérer ont lieu ainsi que celles qui s'en déduisent par des permutations circulaires, les équations analogues à celles de Lagrange admettent, outre l'intégrale précédente, les deux intégrales qui s'en déduisent par des permutations circulaires.

Quand H est égal à $-T-U$, ces théorèmes se réduisent aux théorèmes des aires.

Si les fonctions f_{ik}, φ_{ik}, ψ_{ik} sont pour $i=1, 2, \ldots, m$ et $k=1, 2, \ldots, n$, les dérivées partielles par rapport à x_k, y_k, z_k d'une même fonction F_i de t et des *différences* des coordonnées de même nom x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2, x_1-x_3, y_1-y_3, z_1-z_3, $\ldots$, $x_{n-1}-x_n$, $y_{n-1}-y_n$, $z_{n-1}-z_n$, de sorte que l'on puisse poser, en désignant par p, q, r des quantités infiniment petites arbitraires

$$\begin{aligned}\delta x_1 &= \delta x_2 = \ldots = \delta x_n = p,\\ \delta y_1 &= \delta y_2 = \ldots = \delta y_n = q,\\ \delta z_1 &= \delta z_2 = \ldots = \delta z_n = r,\end{aligned}$$

on peut mettre les équations différentielles du mouvement de l'ensemble de points envisagé sous la forme

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial x_k}-\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial x'_k}+\ldots+(-1)^{\nu}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}}+\sum_{k=1}^{n}Q_k=0,\\
&\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial y_k}-\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial y'_k}+\ldots+(-1)^{\nu}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial y_k^{(\nu)}}+\sum_{k=1}^{n}R_k=0,\\
&\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial z_k}-\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial z'_k}+\ldots+(-1)^{\nu}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial z_k^{(\nu)}}+\sum_{k=1}^{n}S_k=0.
\end{aligned}$$

Dans le cas où la fonction donnée H est de la forme

$$\begin{aligned}H=&\sum_{k=1}^{n}a_{k0}[x_k^2+y_k^2+z_k^2]+\sum_{k=1}^{n}a_{k1}[x_k'^2+y_k'^2+z_k'^2]+\sum_{k=1}^{n}a_{k,\nu}[x_k^{(\nu)2}+y_k^{(\nu)2}+z_k^{(\nu)2}]\\ &+\Omega[t, R_1, R'_1, \ldots, R_1^{(\nu)}, R_2, R'_2, \ldots, R_2^{(\nu)}, \ldots],\end{aligned}$$

[redacted]

qui peuvent être envisagées comme les équations analogues à celles qui expriment le théorème de la conservation du centre de masses dans le cas où l'ensemble de points envisagés est un ensemble de points *matériels*. Si l'on fait, pour $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$a_{k0} = a_{k1} = \ldots = a_{k,\delta-1} = a_{k,\delta+1} = \ldots = a_{k,\nu} = 0, \quad a_{k,\delta} = -\frac{m_k}{2},$$

en choisissant pour δ celui des nombres $1, 2, \ldots, \nu$ que l'on veut, les trois relations obtenues se réduisent, en effet, aux suivantes

$$-\sum_{k=1}^{n} m_k x_k^{(2\delta)} + \sum_{k=1}^{n} Q_k = 0,$$

$$-\sum_{k=1}^{n} m_k y_k^{(2\delta)} + \sum_{k=1}^{n} R_k = 0,$$

$$-\sum_{k=1}^{n} m_k z_k^{(2\delta)} + \sum_{k=1}^{n} S_k = 0,$$

qui, pour $\delta = 1$, sont identiques aux équations bien connues qui expriment le théorème de la conservation du centre de masses d'un ensemble de points matériels.

M. Kœnigsberger démontre enfin que si H est une fonction *algébrique* de t, $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, x'_1, y'_1, z', \ldots, x_n^{(\nu)}, y_n^{(\nu)}, z_n^{(\nu)}$, et si les équations analogues aux équations canoniques du mouvement d'un ensemble de points matériels admettent une intégrale *algébrique*, cette dernière ne peut être que, ou bien une fonction rationnelle de H, de t, des coordonnées $x_1, \ldots, z_n$ et de leurs dérivées d'ordres $1, 2, \ldots, 2\nu - 1$, prises par rapport à t, ou bien l'une des racines d'une équation algébrique ayant pour coefficients de telles fonctions rationnelles de H, t, $x_1, \ldots, z_n^{(2\nu-1)}$, intégrales des équations générales envisagées analogues aux équations canoniques du mouvement d'un ensemble de points matériels.

Kohlrausch (*F.*). — Sur les déplacements électrolytiques dans des dissolutions et des mélanges de dissolutions. (1233-1241).

Richarz (*F.*) et *Krigar-Menzel* (*O.*). — Sur la détermination de la constante de l'attraction universelle et sur celle de la densité moyenne de la Terre. (1305-1318).

Ce Mémoire contient le résultat final déduit des pesées effectuées de 1884 à 1896, à Spandau, et fait suite à la Communication sur le même sujet qui a été analysée dans le *Bulletin* (1897, p. 149).

Une première suite d'expériences avait permis de déterminer expérimentalement la différence des valeurs de g dans les plateaux inférieurs et supérieurs de la balance dont on a parlé. Pour déterminer la constante de l'attraction

universelle, dans le système solaire au moins, constante que l'on désigne généralement par la lettre f, on s'est arrangé de façon qu'entre les plateaux supérieurs et inférieurs de la balance se trouve une masse cubique homogène de plomb de 9^{mc} environ, pesant donc plus de 100 000^{kg}; cette masse énorme remplit presque tout l'intervalle entre les plateaux et est traversée, en son milieu environ, par les deux tiges verticales qui relient les plateaux supérieurs aux plateaux inférieurs. La présence de la masse de plomb a pour effet d'augmenter la valeur de g dans les plateaux supérieurs et de diminuer d'autant la valeur de g dans les plateaux inférieurs.

Si l'on effectue maintenant à nouveau les pesées déjà faites avant la présence de la masse de plomb (*Bulletin*, 1897, p. 150), on obtient, au lieu de la différence de la valeur de g dans les plateaux inférieurs et supérieurs, cette différence diminuée du double de l'attraction du plomb rapportée à l'unité de masse. Puisque la première suite d'expériences, effectuée sans la masse de plomb, a permis de déterminer la différence de la valeur de g dans les plateaux inférieurs et supérieurs, on peut donc déduire des résultats obtenus expérimentalement dans la seconde suite d'expériences faites en présence de la masse de plomb, la valeur de l'attraction exercée par cette masse de plomb à une distance donnée, et, par suite, la valeur de la constante f, puisque l'on connaît les dimensions et la densité de la masse de plomb homogène.

La mesure de la différence de la poussée de l'air dans les plateaux supérieurs et inférieurs de la balance, différence en partie compensée en mettant des sphères creuses dans les plateaux non occupés par les sphères pleines servant aux pesées (ces sphères ont des aires à peu près égales), a été effectuée avec soin et il en a été tenu compte dans les calculs.

Il a été également tenu compte de la différence $\theta_s - \theta_n$ de la température de l'air dans les plateaux supérieurs et inférieurs. Cette différence toujours positive en été, a atteint jusqu'à $\pm 0°,7$; il en résultait un courant d'air vertical sensible quand on transportait les sphères d'un plateau à l'autre.

Enfin, on a naturellement tenu compte des différences de température se produisant au même endroit dans les diverses séries d'observations.

Il convient de signaler comme cause possible d'erreur dans l'application de cette méthode les défauts, toujours possibles, de construction dans le mécanisme permettant de changer la sphère de place.

[redacted]

Terre,

$$g = \frac{4}{3}\pi R_p \delta f\left(1 + \varpi - \frac{3}{2}m\right)\left[1 + \left(\frac{5}{2}m - \varpi\right)\sin^2\varphi\right],$$

où R_p, ϖ et m désignent respectivement le rayon polaire de la Terre, l'aplatissement de la Terre et le rapport de l'intensité de la force centrifuge équatoriale à l'intensité de la pesanteur à l'équateur, on a une égalité qui, devant avoir lieu quel que soit φ, entraîne la relation

$$978{,}00 = \frac{4}{3}\pi R_p \delta f\left(1 + \varpi - \frac{3}{2}m\right),$$

dans laquelle tout est connu, sauf δ.

En prenant pour R_p, ϖ et m les valeurs données par M. Helmert dans son *Traité de Géodésie*, déjà cité,

$$R_p = 635608000,$$
$$\varpi = 0{,}0033416,$$
$$m = 0{,}0034672,$$

on en déduit

$$\delta = [5{,}505 \pm 0{,}009]\,\frac{\text{grammes}}{(\text{centimètres})^3}.$$

Les meilleures mesures effectuées jusqu'ici avaient donné pour δ des valeurs comprises entre 5,46 et 5,59. MM. Richarz et Krigar-Menzel rangent parmi ces mesures celles de MM. Wilsing, Poynting et Boys. Les mesures effectuées par MM. Cornu et Baille ($\delta = 5{,}56$ et $\delta = 5{,}50$) et celles effectuées par M. von Jolly ($\delta = 5{,}692$) semblent à MM. Richarz et Krigar-Menzel être entachées de nombreuses causes d'erreur.

Frobenius (*G.*) — Sur les facteurs irréductibles du déterminant d'un groupe quelconque donné. (1343-1382).

Dans le Mémoire de M. Frobenius, analysé un peu plus haut, *sur les caractères d'un groupe quelconque donné* H *d'ordre h*, on a défini le déterminant Θ

$$\Theta = |\, z_{PQ^{-1}} \,|$$

de ce groupe; si $a_1, a_2, \ldots, a_h$ désignent les éléments du groupe envisagé, Θ est formé au moyen des variables $z_{a_1}, z_{a_2}, \ldots, z_{a_h}$; comme on avait égalé entre elles celles des variables $z_{a_1}, z_{a_2}, \ldots, z_{a_h}$ dont l'indice correspond aux éléments d'une même classe de substitutions du groupe envisagé, la fonction Θ ne dépendait que des k variables $z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}$ correspondant aux k classes de substitutions de ce groupe.

Dans le Mémoire actuel, M. Frobenius commence par envisager $z_{a_1}, z_{a_2}, \ldots, z_{a_h}$ comme des variables indépendantes et

$$\Theta = |\, z_{PQ^{-1}} \,|$$

comme une fonction de ces variables. Il démontre d'abord que le nombre des

facteurs irréductibles inégaux de Θ est égal au nombre k de classes du groupe envisagé. Si Φ_ν désigne l'un de ces facteurs irréductibles, fonction homogène entière de $z_{a_1}, z_{a_2}, \ldots, z_{a_h}$, on a donc

$$\Theta = \Phi_1^{e_1} \Phi_2^{e_2} \ldots \Phi_k^{e_k},$$

où $e_1, e_2, \ldots, e_k$ désignent des nombres entiers. Si f_ν est le degré de la fonction Φ_ν entière homogène en $z_{a_1}, z_{a_2}, \ldots, z_{a_h}$, il est remarquable que $e_\nu = f_\nu$. La démonstration de cette proposition fondamentale est difficile; avant de l'établir dans toute sa généralité, M. Frobenius l'établit successivement pour $f = 1, 2, 3$. Chacune des fonctions Φ_ν peut d'ailleurs être transformée, par une substitution linéaire convenablement choisie, en une fonction de f_ν^2 variables et ne peut l'être en une fonction d'un nombre moindre de variables; si l'on transforme ainsi les divers facteurs inégaux $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$ de Θ, les $h = \sum_{\nu=1}^{k} f_\nu^2$ nouvelles variables dont dépendent les fonctions transformées sont indépendantes les unes des autres.

Si l'on égale maintenant, comme dans le Mémoire précédent, les variables z dont les indices désignent les éléments d'une même classe, chacune des fonctions Φ_ν se réduit à la $f_\nu^{\text{ième}}$ puissance d'une fonction linéaire ξ_ν des k variables indépendantes $z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}$, et les k fonctions linéaires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ sont linéairement indépendantes les unes des autres. Si ξ_ν est de la forme

$$\xi_\nu = \frac{1}{f_\nu} \sum_{\mu=0}^{k-1} \chi_\mu^{(\nu)} x_\mu,$$

les coefficients

$$\chi_0^{(\nu)}, \quad \chi_1^{(\nu)}, \quad \ldots, \quad \chi_{k-1}^{(\nu)}$$

représentent un des *caractères* du groupe envisagé. Les coefficients de la fonction Φ_ν s'expriment donc au moyen du $\nu^{\text{ième}}$ caractère de ce groupe.

On peut ramener l'étude du déterminant d'un groupe donné, dans lequel on [redacted]

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES. Journal des candidats aux Écoles spéciales, à la Licence et à l'Agrégation, dirigé par MM. C.-A. LAISANT et X. ANTOMARI [1]. — 3e série.

Tome XVI, 1897.

Vicaire (A.). — Étude générale des lentilles épaisses au moyen de l'homographie. (5-8).

Simple indication de démonstrations fondées sur les principes élémentaires de l'homographie.

Jamet (V.). — Sur une question de licence. (8-13).

Étude d'une intégrale, à propos d'une question donnée à la session de Licence de novembre 1895 à Rennes.

Gallucci (G.). — Quelques théorèmes de Géométrie. (13-18).

Propriétés corrélatives de triangles et de tétraèdres particuliers.

Un « Correspondant » des Nouvelles Annales. — Solution du problème de spéciales donné au Concours d'Agrégation de 1896. (31-40).

Solutions géométrique et analytique d'une question relative à des propriétés d'un ellipsoïde et d'une sphère concentriques.

La Rédaction. — Le nouveau programme d'admission à l'École Polytechnique. (40-45).

Réflexions sur les remaniements qui viennent d'être apportés à ce programme.

Lémeray (E.-M.). — Sur les racines de l'équation $x = a^x$. (54-61).

L'étude des racines réelles a fait l'objet d'une Note précédente; l'auteur s'occupe ici des racines imaginaires.

Rhéville (H. de). — Sur une représentation géométrique du développement en fraction continue ordinaire. (61-62).

---

[1] Voir *Bulletin*, XVII_2, p. 204; XIX_2, p. 117; XX_2, p. 47 et 209.

Remarque au sujet d'une Communication analogue de M. Klein, parue au Volume de 1896 (p. 327).

Antomari (*X.*). — Sur les conditions qui expriment qu'une équation algébrique de degré m n'a que p racines distinctes ($p < m$). (63-75).

Après avoir traité la question générale et indiqué le moyen de lever la difficulté qu'elle présente, l'auteur applique son analyse à la recherche des conditions que doivent remplir les coefficients de l'équation du quatrième degré pour que cette équation n'ait que deux racines distinctes, etc.

Stäckel (*P.*) (Traduction *L. Laugel*). — Le théorème d'addition de la fonction $\wp(u)$. (75-76).

Démonstration simple, extraite des *Mathematische Annalen*, XLVII, p. 604; 1896.

Mangeot (*S.*). — Sur l'application de deux covariants à la construction de quelques espèces de courbes. (76-78).

Ces covariants fournissent un moyen de reconnaître si la courbe donnée, du troisième ou du quatrième ordre, est une cissoïde, une strophoïde droite, ou une lemniscate, et de déterminer certains paramètres de ces courbes.

Farjon (*F.*). — Théorèmes de Pascal et de Brianchon (78-79).

Démonstration de ces théorèmes déduite de la configuration de six génératrices rectilignes d'une quadrique gauche alternativement du premier et du deuxième système.

Correspondance. — M. M. (Paris). (Extrait d'une Lettre).

Solution géométrique d'une partie de la question 1498 (insérée au volume

[redacted]

REVUE DES PUBLICATIONS.

Suite à l'exposé paru au précédent Volume (1896, p. 345) :

Groupes de substitutions. — Groupe orthogonal. — Groupe symétrique. — Groupe cyclique. — Groupe des puissances d'une substitution. — Groupe des substitutions à coefficients entiers. — Essai de généralisation. — Sur les progressions des divers ordres.

Bioche (*C.*). — Sur les surfaces qui ont pour génératrices les cordes d'une cubique gauche. (168-169).

Remarques diverses et établissement de l'équation générale des surfaces réglées dont les génératrices sont les cordes d'une cubique gauche.

Sondat. — Théorèmes sur les équations algébriques (169-171).

Propriété de l'équation de degré pair, à coefficients binomiaux, qui a $\frac{n}{2}+1$ racines égales.

Boulanger (*A.*). — Sur le biais passé gauche. (171-176).

Détermination du volume limité par le biais, par les murs de tête et par le plan des naissances. — Détermination graphique de l'indicatrice en un point P de la surface du biais.

Deuxième Concours des *Nouvelles Annales* pour 1897. (197-200).

Le sujet proposé se rapporte à des propriétés de la cubique équilatère et du tétraèdre orthocentrique.

Schwarz (*H.-A.*) (Traduction *L. Laugel*). — Sur certains problèmes de représentation conforme. (200-231).

Ce Travail, déjà ancien, remonte à 1869. C'est l'extrait d'une Communication à M. Richelot, de Kœnigsberg, parue au *Journal de Crelle*, t. 70 (105-120), février 1869.

Parmi les problèmes traités se trouve celui de la représentation conforme d'un carré sur l'aire du cercle.

Sartiaux (*F.*). — Composition mathématique pour l'admission à l'École Polytechnique en 1863. (232-235).

Exposé d'une solution exclusivement géométrique de cette question dont la solution analytique a été publiée dans ce journal en 1864 (p. 268).

Correspondance. — Extraits de lettres. (237-238).

Saint-Germain (*A. de*). — Construction graphique de $\sqrt{\pi}$, d'après M. H. Guillot : l'hypoténuse d'un triangle rectangle étant 2, et l'un des côtés une fois et demie le côté du décagone régulier inscrit dans le cercle de rayon 1, l'autre côté est très sensiblement égal à $\sqrt{\pi}$.

Ocagne (*M. d'*). — Remarque au sujet de la solution de la question 1717.

Lemoine (*E.*). — Remarque au sujet de la solution de la question 1743.

Schur (*F.*). — Remarque bibliographique au sujet de l'article de M. Farjon, inséré p. 78.

Saltykow (*N.*). — Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible. (245-249).

Démonstration, d'après la théorie de M. Korkine, de l'existence de cinq cas dans lesquels le problème proposé admet des intégrales communes.

Mannheim (*A.*). — Sur la déviation dans l'ellipse. (249-252).

Étude géométrique à propos d'un article déjà ancien de M. d'Ocagne sur le même sujet (1886, 370 et 534).

Ocagne (*M. d'*). — Sur les coniques qui ont, avec une courbe donnée en un de ses points, un contact d'ordre supérieur (à propos de la question 1757). (252-262).

Lorsque ces coniques sont des paraboles, l'enveloppe de leurs axes est une hypocycloïde à trois rebroussements, si le contact de la parabole et de la courbe est du second ordre.

Examen de la même question lorsque le contact est supposé du troisième ordre, ou du quatrième.

Gino-Loria. — Identité de la strophoïde avec la focale à nœud. Son application à l'Optique géométrique. (262-265).

Note historique sur la strophoïde oblique ou focale de Quetelet, signalée d'abord par Torricelli, étudiée ensuite par Guido Grandi et par Grégoire Cazalis; puis retrouvée par Quetelet en 1819 et étudiée à nouveau par Dandelin et [redacted]

Application à deux paraboles homothétiques et à deux hyperboles [illegible]tiques.

Jaggi (*E.*). — Sur une formule de la théorie générale des fonctions de plusieurs variables et de l'intégration des différentielles totales. (297-306).

Extrait d'un Mémoire sur la théorie générale des fonctions présenté par l'auteur à l'Académie des Sciences, en 1892.

La formule proposée est destinée à prendre, dans la théorie des fonctions de plusieurs variables, la place que prend la formule

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{dF(x)}{dx}\, dx$$

dans la théorie des fonctions d'une seule variable.

Lémeray (*E.-M.*). — Sur la convergence des substitutions uniformes. (306-319).

Si f désigne une fonction holomorphe ou méromorphe, la substitution $x\,fx$ répétée indéfiniment fournit une suite de fonctions $fx, f^2x, \ldots$ qui, pour une valeur donnée de x, prennent des valeurs pouvant présenter trois cas :

1° Elles croissent ou décroissent sans limite;

2° Elles tendent vers n limites distinctes qui sont racines de l'équation $f^n x - x = 0$;

3° Ou enfin elles tendent vers une seule limite qui est racine de $fx - x = 0$.

L'auteur se propose d'étudier le cas où $\text{mod}\left(\frac{dfx}{dx}\right)a = 1$, a étant un point racine de l'équation du n° 3.

Saint-Germain (*A. de*). — Note sur les déplacements d'une figure invariable. (319-322).

Indication d'une méthode simple et uniforme pour démontrer le théorème fondamental sur les déplacements finis d'une figure dans un plan (rotation), ou d'un solide dans l'espace (mouvement hélicoïdal).

Klein (*F.*) (Traduction *L. Laugel*). — Sur la stabilité d'une toupie qui dort (sleeping). (323-328).

Examen d'une difficulté qui se présente dans la discussion approfondie de la stabilité d'une toupie animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe dirigé suivant la verticale.

Concours de 1897. — École Polytechnique (329-330); École Normale supérieure (330-331); Concours général (332-334);

Agrégation des Sciences mathématiques (431-435); Bourses de Licence (435-436); École centrale des Arts et Manufactures (575-576).

Pagès (A.). — Premier concours des *Nouvelles Annales* pour 1897. (341-365).

Ravut (L.). — Extension du théorème de Cauchy aux fonctions d'une variable complexe de la forme $\rho e^{ie^{iA}\alpha}$. (365-367).

Maillard. — Représentation géométrique de la fonction arc tang z. (368-369).

Bourlet (C.). — Sur un déterminant remarquable. (369-373).

Si dans une équation différentielle linéaire homogène, d'ordre m, on prend la dérivée logarithmique de la fonction comme nouvelle inconnue, on obtient une nouvelle équation différentielle d'ordre $(m-1)$, mais qui n'est plus linéaire. L'auteur a pu mettre cette équation sous forme de déterminant. Se référant ensuite à un résultat analogue obtenu par M. Laisant, il a été amené à chercher d'une façon générale tous les déterminants tels que leur développement soit, à un facteur constant près, indépendant des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$, identique au polynome

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Karagiannidès. — Sur l'équilibre indifférent d'une chaîne pesante sur une courbe. (374-376).

Détermination d'une courbe dont tout arc de longueur l ait toujours son [redacted]

Mannheim (*A.*). — Sur le tracé de l'anse de panier. (

Exposé de diverses propriétés utiles au tracé de l'anse de pa
centres.

Mangeot (*S.*). — Des conditions nécessaires et suffis
qu'une surface d'ordre quelconque soit de révolution.

L'auteur a déjà résolu ce problème dans le numéro de mai 1897 des *Annales de l'École Normale supérieure*; il en expose ici une nouvelle solution.

Autonne (*L.*). — Sur les symboles $\frac{0}{-}$ à plusieurs varia
pendantes. (420-426).

Généralisation basée sur les recherch
à plusieurs variables. Applications à quelques ex

Bourlet (*C.*). — Sur l'équilibre de la vis. (426-429).

Exposé d'une démonstration affranchie de certaines restrictions introduites dans la démonstration habituelle des conditions d'équilibre de la vis.

Vicaire (*A.*). — Démonstration géométrique d'une propriété de la cycloïde. (430-431).

Il s'agit de cette proposition : la courbe telle que la distance de chacun de ses points au centre de courbure correspondant de la développée soit constante est une cycloïde.

Fontené (*G.*). — Sur la correspondance biforme; extension des polygones de Poncelet. (437-463).

Parmi plusieurs résultats importants démontrés dans ce Travail, nous mentionnerons le suivant :

Deux correspondances biformes symétriques

$$F(x, y) = 0, \qquad F'(y, z) = 0,$$

donnent entre x et z une correspondance qui se décompose en deux correspondances biformes

$$F''(x, z) = 0, \qquad F'''(x, z) = 0,$$

lorsqu'elles ont les mêmes valeurs critiques. Chacune des correspondances obtenues admet ces mêmes valeurs critiques, d'où il suit que ces nouvelles correspondances sont également symétriques.

Dumont. — Note sur la symétrie dans les surfaces algébriques. (463-472).

L'auteur donne au mot *axe de symétrie* un sens plus général q
qu'on lui attribue ordinairement, et il ajoute qu'une droite sera dit
symétrie binaire, ternaire, quaternaire, quinaire, sénaire d'une surfac
que la surface pourra coïncider avec elle-même, après une rotation de
120°, de 90°, de 72°, de 60°. Un axe de symétrie quaternaire ou sé
évidemment en même temps axe binaire.

Application aux surfaces du troisième ordre et aux surfaces du q
ordre.

Caronnet (*T.*). — Sur le joint de Cardan. (472-474).

Contribution à la théorie de ce mécanisme.

Ocagne (*M. d'*). — Sur le déplacement d'un triangle v
semblable à un triangle donné. (474-476).

Démonstration nouvelle du théorème suivant, déjà obtenu par M. G
Si les sommets a et b du triangle abc, semblable à un triangle fixe, d
deux droites parallèles aa' et bb', l'ordre de la courbe décrite par le s
est égal à la classe de la courbe enveloppe du côté ab.

Richard. — Solution de la question proposée au Concours
de Mathématiques spéciales en 1897. (476-482).

Étude du déplacement d'un certain tétraèdre trirectangle et dont
arêtes rectangulaires sont de longueurs égales.

Premier Concours des *Nouvelles Annales* pour 1898. (48

Étude résumée des diverses théories successivement proposées pour
lité de l'équilibre des corps flottants. Bibliographie du sujet.

La Rédaction. — Les certificats d'études supérieures des F



à rechercher les formes *dégénérées*, c'est-à-dire les formes de évanouissant, puis de celles-ci à remonter aux formes *générales*, aux formes de déterminant non évanouissant. Ce principe se m grande fécondité; non seulement il conduit au but très aisément, ici traité des formes binaires à coefficients réels, mais il est encor aussi aux formes à nombre quelconque d'indéterminées, que les soient supposés réels ou complexes.

Blondlot (*R.*). — Nouvelle démonstration du théorème de Stokes. (501-504).

On a donné le nom de *théorème de Stokes* à la proposition qui la transformation d'une intégrale prise le long d'un co grale prise sur une surface limitée à ce contour. M. remarquer avec raison que cette proposition était moins dans des cas particuliers.

L'auteur propose une démonstration particulièrement simple e on voit l'intégrale superficielle naître, pour ainsi dire, de l'intégrale curviligne.

Concours de 1895. — Agrégation des Sciences mathématiques. (520-524).

Un Correspondant. — Concours d'Agrégation de 1895. Solution de la question de Mathématiques spéciales. (524-530).

Cahen (*E.*). — Théorie des régions. (533-539).

Lémeray (*E.-M.*). — Racines de quelques équations transcendantes. Intégration d'une équation aux différences mêlées. (540-546).

Les équations traitées sont des types $xa^x = b$, $(x + K)^m a^{px+q} = b$, ..., et l'équation aux différences mêlées est $y^{(m+p)} - ay_{-i}^{(m)} = 0$, où a et i sont deux constantes, y_{-i} étant la valeur de la fonction quand la variable a pour valeur x_{-i}.

Bricard (*R.*). — Sur le caractère quadratique du nombre 3 par rapport à un nombre premier quelconque. (546-549).

L'auteur parvient à cette proposition : le nombre -3 est résidu quadratique des nombres premiers de la forme $3q + 1$, et non résidu des nombres premiers de la forme $3q + 2$.

Licence ès Sciences mathématiques. — Le Journal a continué l'annonce, inaugurée en 1876, des questions d'Analyse, de Mé-

canique et d'Astronomie proposées aux examens de Licence ès Sciences mathématiques à Paris et dans la plupart des Universités françaises. *Voir* p. 18-31, 80-90, 129-143, 176-184, 268-289, 379-381, 505-520 et 550-574.

Solutions de questions.

Audibert. — Ellipse lieu du centre de courbure de l'épicycloïde roulant sur une droite.

Lieu géométrique déduit d'une série d'hyperboles équilatères homothétiques.

Enveloppe des axes des paraboles ayant un contact du second ordre avec une courbe plane donnée, en un même point de cette courbe.

Brocard (H.). — Note bibliographique sur cette question qui a été proposée et résolue sous le n° 1266.

Canon. — Note sur deux propositions de Géométrie cinématique.

Droz-Farny (A.). — Génération d'une certaine quartique trinodale.

Propriété de triangles homologiques deux à deux et de trois coniques associées.

Propriété d'un triangle et d'un rectangle associés à l'ellipse.

Propriété des rayons de courbure d'une parabole aux pieds des normales issues d'un point non situé sur la courbe.



par les points de contact du cercle inscrit et des cercles exinscrits se coupent au centre du cercle circonscrit.

Gilbert (*R.*). — Propriété de triangles homologiques et de coniques associées.

Leinekugel (*G.*). — Degré d'une certaine courbe en relation donnée avec deux faisceaux d'ordres m et n.

Lemoine (*E.*). — Remarque sur la définition des cercles de Neuberg.

Lez (*H.*). — Relation dans le triangle.

Rayon du cercle passant par trois points dont les coordonnées trilinéaires sont $(-a, b, c)(a, -b, c)(a, b, -c)$.

Mannheim (*A.*). — Construction d'une certaine quartique lieu des milieux des cordes d'un cercle ayant une projection donnée sur un diamètre fixe.

Circonférence lieu des pôles des spirales logarithmiques osculatrices aux diverses sections ayant même tangente en un point d'une surface.

Ocagne (*M. d'*). — Note sur la solution donnée p. 187.

Sur les coniques qui ont avec une courbe donnée en un de ses points un contact d'ordre supérieur.

Rédaction (*La*). — Note sur deux questions résolues au *Journal de Mathématiques élémentaires* en 1882.

Retali (*V.*). — Identité algébrique résultant d'un certain déterminant.

Propriété du centre de courbure d'une conique.

Taratte (*E.*). — Propriété des racines de l'équation binome.

Thévenet (*A.*). — Hyperboloïde à deux nappes, lieu géométrique du point commun à certaines sphères.

Tzitzéica (*G.*). — Limites d'une certaine fraction algébrique.

Questions de divisibilité.

Une trentaine de solutions publiées, 32 questions nouvelles proposées, et enfin une liste des questions non résolues au 31 décembre 1897, donnent la preuve que la Rédaction des *Nouvelles Annales* tient absolument à liquider l'arriéré et à rétablir dans son intégrité le régime habituel des questions et des réponses.

La liste précitée comprend 251 numéros, mais il est bien certain que c'est là un maximum et qu'en réalité le stock de questions non résolues est inférieur de 10 à 15 unités pour le moins. C'est ce que j'ai reconnu immédiatement par la comparaison avec le répertoire spécial que j'ai depuis longtemps dressé pour mon usage personnel.

Je me réserve d'ailleurs de communiquer ultérieurement à la Rédaction des *Nouvelles Annales* les rectifications qu'il conviendra d'apporter à cette liste, indépendamment de celles que d'autres collaborateurs pourront y faire de leur côté.

Pour le moment, il y a là une tentative des plus utiles et dont il faut savoir gré aux savants rédacteurs d'un journal qui peut compter parmi les doyens de la presse qui s'adresse au public mathématique.

H. B.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

Troisième série, t. XIV, 1897 (1).

Mangeot (S.). — Sur la détermination des centres, axes et plans de symétrie dans les figures algébriques. (9-19).

Le caractère propre des procédés de M. Mangeot pour la recherche des [redacted]



par l'équation

$$A[x-x_0+i(y-y_0)]^t+B[x-x_0-i(y-y_0)]^t=0,$$

Ax^t+By^t désignant le plus grand commun diviseur des coefficients

$$a_k x^k + b_k y^k$$

des diverses puissances de xy dans le polynome

$$f[x+y+x_0,\ i(y-x)+x_0].$$

Quand ces coefficients sont tous constants, la courbe est formée de cercles concentriques au précédent.

Pour une surface $f(x,y,z)=0$ d'ordre m, tout axe ou tout plan de symétrie doit être axe ou plan de symétrie de *chacune* des surfaces définies par les équations

$$\frac{\partial^2 f_{k-1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_{k-1}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_{k-1}}{\partial z^2}=0 \qquad (k=1,2,3,\ldots;f_0=f),$$

$$\sum \frac{h!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\left(\frac{\partial^h f_r}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}\right)^2=0 \qquad \begin{pmatrix} r=0,1,2,\ldots \\ h=\quad 1,2,\ldots \end{pmatrix},$$

et en particulier de la quadrique qui correspond à $r=0$, $h=m-1$.

« Ces procédés pratiques aboutissent toujours dans le cas des figures d'ordre inférieur à 6; et c'est là un résultat important pour l'étude de ces figures, si l'on remarque que la construction par points d'une courbe plane ou surface du troisième, quatrième ou cinquième ordre qui possède un centre, ou un axe ou un plan de symétrie, peut être ramenée, au moyen d'une transformation de coordonnées évidente, à la construction des racines d'une équation du second degré ou d'une équation bicarrée. »

Delassus. — Sur les systèmes algébriques et leurs relations avec certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. (21-44).

La méthode que l'auteur a indiquée dans le Volume précédent des *Annales* pour la réduction des systèmes différentiels les plus généraux à une forme canonique peut, sans modifications importantes, s'appliquer aux systèmes d'équations algébriques.

C'est ce que M. Delassus montre dans le premier Chapitre du présent Mémoire, en effectuant la réduction générale d'un système algébrique homogène S à m variables à une forme canonique, qui dépend uniquement de $m-1$ indices β_1, β_2, ..., β_{m-1} et d'un entier n. On peut d'ailleurs déterminer tous ces nombres sans être obligé de faire le changement linéaire à coefficients indéterminés qui conduit à des calculs très pénibles.

L'étude de la forme canonique à laquelle est consacré le second Chapitre porte d'abord sur la forme des *identités d'intégrabilité* et contient la démonstration de l'existence des solutions d'un système canonique, ramenée à dépendre du théorème classique de D'Alembert. Comparant ensuite avec la méthode donnée par Kronecker (*Journal de Crelle*, t. 92), on reconnaît que les indices β_i sont précisément les degrés des facteurs de l'équation que Kronecker appelle

la *résolvante générale* du système S, ce qui peut s'énoncer en langage géométrique de la façon suivante :

Si, dans l'espace à $m-1$ dimensions, les surfaces forment un système ayant $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ pour indices, leur intersection complète I *se compose*

d'une multiplicité	I_{m-2}	*à* $m-2$	*dimensions et de degré*	β_1
»	I_{m-3}	*à* $m-3$	»	β_2
.....	.....	.....	.....	.....
»	I_1	*à* 1	»	β_{m-2}
»	I_0	*à* 0	»	β_{m-1}

en convenant de désigner par *multiplicité à* 0 *dimension et de degré* $m-1$ un système de β_{m-1} points. Les raisonnements par lesquels on arrive à cette conclusion montrent que la méthode de M. Delassus n'est autre que celle de Kronecker, dans laquelle on s'assujettirait à effectuer toutes les éliminations par le procédé de Sylvester.

Mais l'intérêt de cette méthode tient aux rapprochements qu'elle établit entre les systèmes algébriques et certains systèmes différentiels dont traite le troisième et dernier Chapitre du Mémoire. Soit Σ un système d'équations aux dérivées partielles à une seule inconnue z, aux m variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et dont chaque équation a pour premier membre une fonction linéaire homogène et à coefficients constants des dérivées d'un même ordre de z. Si, dans toutes les équations du système Σ, on remplace chaque dérivée

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

par le monôme correspondant

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m},$$

on forme un système algébrique S homogène à m inconnues, qui est dit le *transformé algébrique* de Σ. On sait depuis longtemps que, si

$$a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_m$$

[redacted]

les a étant des constantes arbitraires et les P *des polynômes entiers en* x_1, x_2, ..., x_m.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale générale d'un système Σ *dépende de*

β_1 *fonctions arbitraires de* $m-1$ *variables*
β_2 » $m-2$ »
....
β_{m-1} » *de* 1 *variable*

et d'un nombre limité de constantes arbitraires est que la solution générale du système algébrique S *se compose*

d'une multiplicité I_{m-2} *de degré* β_1
» I_{m-1} » β_2
....
» I_0 » β_{m-1}.

Thybaut. — Sur la déformation du paraboloïde et sur quelques problèmes qui s'y rattachent. (45-98).

M. Weingarten a fait connaître dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (mars 1891) un théorème qui ramène la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée à celle des surfaces dont les rayons de courbure vérifient une certaine relation involutive à coefficients variables. Dans la première Partie de son Mémoire, M. Thybaut rattache ce résultat curieux, dont M. Weingarten n'avait pas indiqué l'origine, à la théorie des congruences rectilignes, de la façon suivante :

Deux points A *et* A_1 *ayant respectivement pour coordonnées rectangulaires, l'un* x, y, z, *l'autre* x_1, y_1, z_1 *fonctions de deux paramètres* u *et* v, *on joint ces points à l'origine des coordonnées* O; *on pose*

$$\overline{OA}^2 = G, \qquad \overline{OA_1}^2 = E, \qquad \cos AOA_1 = \frac{F}{\sqrt{EG}};$$

on considère la congruence (C) *formée par la droite* AB *parallèle à* OA_1 *et les points focaux* F, F' *situés sur* AB.

Si les développables de la congruence (C) *sont définies par les relations*

$$\frac{du}{dv} = k = \frac{AF}{OA_1}, \qquad \frac{du}{dv} = k' = \frac{AF'}{OA_1},$$

k *et* k' *étant liés par l'équation*

$$\left(2E\frac{\partial F}{\partial u} - E\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial E}{\partial u}\right)kk' + \left(E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}\right)(k+k') + E\frac{\partial G}{\partial v} - 2F\frac{\partial F}{\partial v} + F\frac{\partial G}{\partial u} = 0,$$

les trois expressions

$$d\xi = x\,dv + x_1\,du,$$
$$d\eta = y\,dv + y_1\,du,$$
$$d\zeta = z\,dv + z_1\,du$$

sont des différentielles exactes et la surface lieu du point (ξ, η, ζ) *a pour élément linéaire*

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2.$$

En particulier, si l'on suppose

$$\mathrm{E} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1,$$

$$\mathrm{F} = xx_1 + yy_1 + zz_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

$$\mathrm{G} = x^2 + y^2 + z^2 = 2\frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

la surface (A_1) lieu du point (x_1, y_1, z_1) étant une sphère de rayon 1, chaque droite AB de la congruence (C) a pour cosinus x_1, y_1, z_1 et est normale à la surface (A), puisque le rayon parallèle OA_1 est normal à la sphère (A_1) et que les deux surfaces (A) et (A_1) ont leurs plans tangents parallèles aux points correspondants. Les rayons de courbure de la surface (A) sont alors k et k'; la relation involutive qui les lie et l'élément linéaire de la surface (A) prennent respectivement les formes

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} kk' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}(k + k') + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0,$$

$$ds^2 = du^2 + 2\,d\varphi\,dv.$$

Après avoir ainsi retrouvé le théorème de M. Weingarten, l'auteur applique le sien au cas où l'on impose aux fonctions E, F, G les quatre conditions

$$2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} = 0, \qquad 2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} = 0,$$

ce qui réduit la relation involutive entre k et k' à

$$k + k' = 0.$$

On peut alors identifier l'élément linéaire, qui devient

$$ds^2 = (av^2 + 2bv + c)\,du^2$$

[redacted]

de façon que la surface (A) *soit la surface moyenne de la congruence des droites* AB *parallèles aux droites* OA_1.

Cette proposition permet d'établir un lien entre la déformation du paraboloïde et la théorie des lignes de courbure. M. Thybaut démontre en effet que *si l'on connaît un couple de surfaces* (A) *lieu du point* (x, y, z) *et* (A_1) *lieu du point* (x_1, y_1, z_1) *répondant à la question précédente, les formules*

$$X = \frac{x}{u-a}, \quad Y = \frac{y}{u-a}, \quad Z = \frac{z}{u-a},$$

$$X_1 = \frac{x_1}{v-a}, \quad Y_1 = \frac{y_1}{v-a}, \quad Z_1 = \frac{z_1}{v-a}$$

représentent deux surfaces isothermiques rapportées à leurs lignes de courbure $u = \text{const.}$ *et* $v = \text{const.}$ Dans le cas où le paraboloïde a un plan directeur isotrope, l'une des surfaces isothermiques est une sphère et l'autre surface appartient à *une nouvelle famille* que l'auteur a ainsi découverte et qu'il détermine complètement à la fin de la troisième Partie.

Dans la deuxième Partie, M. Thybaut montre d'abord que les surfaces (B) et (B_1) qui correspondent respectivement à (A) et (A_1) avec orthogonalité des éléments sont des surfaces minima, focales d'une même congruence de droites et que les asymptotiques se correspondent sur ces deux surfaces. Réciproquement *chaque couple de surfaces minima sur lesquelles les asymptotiques se correspondent et qui sont focales d'une même congruence rectiligne fait connaître deux surfaces* (A) *et* (A_1), *c'est-à-dire une surface applicable sur le paraboloïde de révolution.* En appliquant ce théorème, on retrouve les formules par lesquelles M. Darboux a représenté l'ensemble des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution, et la considération des deux surfaces minima (B) et (B_1) conduit à l'énoncé suivant : *On sait déterminer toutes les congruences dont les surfaces focales sont des surfaces minima sur lesquelles les asymptotiques se correspondent.*

Aux congruences (C) déjà définies on peut associer les congruences (C_1) formées par les droites A_1B_1 parallèles à OA ; aux surfaces (A) et (A_1) les surfaces (M) et (M_1), que l'on obtient en portant sur AB, en sens inverse de OA, une longueur AM égale à OA et sur A_1B_1 en sens inverse de OA une longueur A_1M_1 égale à OA_1 ; ces deux surfaces (M) et (M_1) sont inverses l'une de l'autre par rapport à l'origine. Les développables des congruences (C) et (C_1) correspondent sur la sphère de rayon 1 à un réseau orthogonal et isotherme, qui est la représentation sphérique des lignes de courbure des surfaces inverses (M) et (M_1). Par suite, *on sait déterminer toutes les congruences dont les développables découpent sur une sphère un réseau orthogonal et isotherme.* De plus, la méthode de M. Thybaut fait connaître *tous les couples de surfaces inverses à représentation sphérique isotherme.* Ces divers résultats et plusieurs de ceux de la troisième Partie se rattachent aux Travaux récents de M. Darboux et en particulier à sa Théorie des douze surfaces (*Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. IV).

Dans la troisième et dernière Partie de son Mémoire, l'auteur applique sa méthode au paraboloïde qui a un plan directeur isotrope. Pour trouver une surface applicable sur ce paraboloïde, il suffit de déterminer une surface (A) correspondant à une surface minima (B) avec orthogonalité des éléments de

façon que la surface M, normale aux droites de la congruence (C) soit polaire réciproque de la surface (A_1); d'où le problème suivant : ***Une surface minima* (B) *étant prise pour surface fondamentale, former un groupe de douze surfaces telles que les surfaces* (M) et (A_1) *soient polaires réciproques***, problème dont la solution dépend d'une équation bien connue, intégrée par Liouville. On obtient d'abord les coordonnées de la surface (M) puis celles des surfaces (A) et (A_1) et par suite celles des surfaces applicables sur le paraboloïde à un plan directeur isotrope.

En examinant les propriétés des surfaces M qui toutes ont leur représentation sphérique isotherme, M. Thybaut est conduit à l'étude des équations (E_p) de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \lambda \theta,$$

pour lesquelles la somme des carrés de p solutions particulières $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ est nulle; il prouve que *si l'on connait une* $(p+1)^{ième}$ *solution quelconque* ω, *et si l'on pose*

$$A_i = \int \left(\theta_i \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \omega \frac{\partial \theta_i}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_i \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \omega \frac{\partial \theta_i}{\partial \beta}\right) d\beta,$$

la fonction

$$\omega' = \sum_{i=1}^{i=p} A_i \theta_i$$

est une nouvelle solution de l'équation proposée. Lorsque $p=3$ *l'équation* E_3 *est immédiatement intégrable; lorsque* $p=4$ *l'équation est harmonique. Lorsque* $p=5$ *les* θ *sont les coordonnées pentasphériques d'une surface isothermique rapportée à ses lignes de courbure.*

La solution ω étant dite *solution spéciale* de l'équation (E_p) quand ω' ne diffère de ω que par un facteur constant, *si l'on applique à une équation* (E_p) *la transformation de M. Moutard relative à une solution spéciale* ω, *on obtient une équation* E_{p+1}. L'application de ce théorème aux équations harmoniques (E_4) montre que *toute équation harmonique a des solutions spéciales. La recherche des solutions spéciales de toutes les équations harmo-* [redacted]

paramètres; A une fonction arbitraire de a, B une fonction arbitraire de b, A' et B' les dérivées de A et B. Si l'on pose

$$f(a,b) = \frac{AB+1}{\sqrt{A'B'}},$$

$$\Delta = (ab+1)\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} - a\frac{\partial f}{\partial a} - b\frac{\partial f}{\partial b} + f \pm 2,$$

on trouve pour X, Y, Z, exprimés en fonction de a et b qui sont les paramètres des lignes de longueur nulle de la surface

$$\Delta X = (a+b)\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} - \frac{\partial f}{\partial a} - \frac{\partial f}{\partial b},$$

$$\Delta Y = i(b-a)\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} - i\left(\frac{\partial f}{\partial a} - \frac{\partial f}{\partial b}\right),$$

$$\Delta Z = (ab-1)\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} - a\frac{\partial f}{\partial a} - b\frac{\partial f}{\partial b} + f.$$

De plus, *on obtient toutes les surfaces algébriques de la classe en remplaçant dans ces formules les fonctions arbitraires* A *et* B *par des fonctions algébriques quelconques.*

La découverte de cette *nouvelle classe* de surfaces isothermiques *dépendant de deux fonctions arbitraires* présente un grand intérêt, car on ne connaissait que *deux* classes de surfaces isothermiques dépendant de deux fonctions arbitraires : 1° les surfaces minima avec leurs inverses; 2° une classe de surfaces obtenues par Ossian Bonnet, qui admettent une série de déformations conservant leurs courbures principales, et dont l'isothermie a été signalée par M. Raffy.

Riquier. — Sur les systèmes différentiels les plus généraux. (99-108).

Réponse à quelques assertions contenues dans un récent Mémoire de M. Delassus (*Annales de l'École Normale*, novembre et décembre 1896). Quatre exemples, traités avec détails, montrent comment on peut, étant donné un système différentiel quelconque, déterminer, au moyen des principes posés par M. Riquier, le nombre et la nature des éléments arbitraires, constantes ou fonctions, dont dépendent ses intégrales générales.

Delassus. — Sur les systèmes des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue. (109-132).

Dans un Mémoire inséré au Tome précédent des *Annales de l'École Normale*, l'auteur a exposé une théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Il en fait ici l'application aux systèmes du premier ordre a une seule fonction inconnue, pour montrer que les méthodes générales de réduction des systèmes différentiels à une forme canonique conduisent précisément aux systèmes en involution et que les théorèmes généraux comprennent comme cas très particuliers les diverses propositions sur lesquelles sont fondées les principales méthodes d'intégration.

Après avoir montré, par l'exemple des systèmes décomposables, que *dans*

l'étude des systèmes différentiels il y a nécessité absolue, sauf dans des cas très particuliers, de ne considérer que des équations résolues, M. Delassus aborde la réduction à la forme canonique. Comme *la forme canonique d'un système du premier ordre à une inconnue est toujours du premier ordre*, et que, de plus, *tout ensemble de dérivées du premier ordre d'une fonction est canonique quand l'on range les variables dans un ordre convenable*, il est inutile, pour réduire un système *du premier ordre* à la forme canonique, d'y faire le changement linéaire de variables le plus général. On peut ajouter qu'*un système où ne figure pas l'inconnue z est forcément en involution quand il est mis sous forme canonique; un système ne contenant pas z et qui est linéaire et homogène par rapport aux dérivées de z, est forcément jacobien quand il est mis sous forme canonique.*

Viennent ensuite les théorèmes généraux et méthodes d'intégration. Il est d'abord établi que *l'intégration d'un système canonique de* μ *équations du premier ordre, à une inconnue et à n variables, se ramène à l'intégration successive de* μ *équations du premier ordre et à* $n-\mu+1$ *variables*. Mais on peut simplifier encore : *l'intégration d'un système canonique de* μ *équations du premier ordre, à une inconnue et à n variables, se ramène à l'intégration d'une seule équation du premier ordre et à* $n-\mu+1$ *variables*, théorème qui a été donné par M. Lie pour les équations où z ne figure pas.

En appliquant ce théorème aux *systèmes jacobiens* on retrouve la méthode et le résultat de Mayer. Passant aux *systèmes non linéaires*, M. Delassus retrouve, d'après ses principes, la méthode de Jacobi et Mayer ainsi que celle de Lie qui, ainsi qu'il la présente, s'applique indifféremment aux équations contenant ou ne contenant pas l'inconnue. Il expose ensuite l'*intégration des systèmes linéaires par la méthode des caractéristiques*, et finit par l'*intégration des systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales* (théorème de Bouquet).

Le mode d'exposition qu'adopte M. Delassus et qui a pour point de départ le théorème de Cauchy complètement généralisé, pour moyen l'emploi des systèmes canoniques, donne plus d'unité et de simplicité à la théorie des systèmes du premier ordre à une inconnue; il rattache les procédés qui permettent l'intégration de ces systèmes particuliers à une théorie générale dont la portée est beaucoup plus étendue.

toute fonction u de la variable x on fera correspondre la fonction $f(u, x)$ de la même variable. Une transmutation fonctionnelle est *continue* quand la fonction $f(z, x)$, qui lui sert de base, est une fonction continue de z; *régulière* quand la fonction de base $f(z, x)$ est une fonction régulière des deux variables z et x. M. Bourlet ne traite dans son Mémoire que des transmutations *continues et régulières*. Il dit qu'une transmutation est *uniforme* lorsqu'elle ne fait correspondre à toute fonction régulière u qu'une *seule* fonction transmuée; elle est *multiforme* dans le cas contraire.

II. *Trouver une transmutation fonctionnelle continue vérifiant la relation*

$$\mathfrak{T}(u+v) = \varphi(\mathfrak{T}u, \mathfrak{T}v),$$

où u et v sont deux fonctions arbitraires de la même variable et φ une fonction donnée de deux variables. Pour que le problème soit possible il faut que la fonction $\varphi(x, y)$ soit *indéfiniment symétrique*, c'est-à-dire qu'elle soit symétrique par rapport à x et y et que la fonction $\varphi[x, \varphi(y, z)]$ soit symétrique par rapport à x, y et z. Abel a donné le moyen de former *toutes* les fonctions de deux variables indéfiniment symétriques. Son Mémoire sur cette question contient tous les éléments nécessaires à la solution du problème actuel.

III. *Transmutations additives.* — M. Bourlet désigne ainsi les transmutations qui vérifient la relation

$$\mathfrak{T}(u+v) = \mathfrak{T}u + \mathfrak{T}v,$$

quelles que soient les deux fonctions u et v de la même variable x. Le rôle important de ces transmutations particulières résulte du théorème suivant : *Si $\pi(x, y)$ est une fonction indéfiniment symétrique, la recherche de toutes les transmutations $\mathfrak{T}$ qui vérifient, quelles que soient les deux fonctions u et v, la relation*

$$\mathfrak{T}[\pi(u, v)] = \varphi(\mathfrak{T}u, \mathfrak{T}v),$$

où $\varphi(u, v)$ est une fonction donnée, se ramène à la recherche des transmutations additives. Il y a donc lieu de chercher la forme générale d'une transformation additive.

IV, V. *Propriétés et détermination des transmutations additives.* — Après avoir établi quelques propriétés de ces transmutations, l'auteur établit cette proposition fondamentale : *Toute transmutation additive, uniforme, continue et régulière, est donnée par la formule*

$$\mathfrak{T}u = \alpha_0 u + \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' + \ldots + \alpha_m u^{(m)},$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots$ désignent des fonctions régulières et $u', u'', \ldots, u^{(m)}, \ldots$ les dérivées successives de la fonction régulière u. Il est fait de ce théorème diverses applications, notamment aux dérivées à indices fractionnaires et négatifs.

VI. *Une autre forme des transmutations additives*, souvent utile, résulte de ce théorème : *La condition nécessaire et suffisante pour que la transmutation*

$$\mathfrak{T}u = a_0 u + \frac{a_1}{1} u' + \frac{a_2}{2!} u'' + \ldots + \frac{a_m}{m!} u^{(m)} + \ldots$$

fournisse une transmuée pour toute fonction u régulière dans un domaine de rayon ρ autour du point x est que la série

$$a_0 + \frac{a_1}{z-x} + \frac{a_2}{(z-x)^2} + \ldots + \frac{a_m}{(z-x)^m} + \ldots$$

soit convergente pour toute valeur de z telle que le module de $z-x$ soit égal à ρ.

Alors la transmutation $\mathfrak{T}u$ est dite *complète* dans le domaine de rayon ρ autour du point x. Les transmutations *complètes* seront seules étudiées dans la suite.

VII. *Le symbole* $f\left(x, \frac{d}{dx}\right)$ *et ses propriétés.* — L'algorithme de la transmutation additive

$$\mathfrak{T}u = a_0 u + \frac{a_1}{1}\frac{du}{dx} + \frac{a_2}{2!}\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots + \frac{a_n}{n!}\frac{d^nu}{dx^n} + \ldots$$

peut s'écrire symboliquement

$$\mathfrak{T}u = \left(a_0 + \frac{a_1}{1}\frac{d}{du} + \frac{a_2}{2!}\frac{d^2}{dx^2} + \ldots + \frac{a_n}{n!}\frac{d^n}{dx^n} + \ldots\right)u,$$

ou, sous forme condensée,

$$\mathfrak{T}u = f\left(x, \frac{d}{dx}\right)u,$$

si l'on pose

$$f(x, z) = a_0 + \frac{a_1}{1}z + \frac{a_2}{2!}z^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}z^n + \ldots.$$

Il y a grand avantage à introduire le *symbole opératif* $f\left(x, \frac{d}{dx}\right)$, déduit de la *fonction opérative* $f(x, z)$ dont M. Bourlet fait connaître une propriété capitale : *La fonction opérative d'une transmutation additive, uniforme, continue et régulière, qui est* complète *dans un certain domaine autour du point x, est, pour cette valeur de x, une fonction transcendante, entière de* [redacted]

différentielle linéaire et homogène

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right)y = 0,$$

dont le polynôme opératif $f(x, z)$ *est un polynôme entier en* $z + kx$ *à coefficients constants, et qui, par suite, est de la forme*

$$\frac{P^{(m)}(kx)}{m!}\frac{d^m y}{dx^m} + \frac{P^{(m-1)}(kx)}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + \frac{P'(kx)}{1}\frac{dy}{dx} + P(kx)y = 0,$$

P *étant un polynôme entier de degré m, dont* P′, P″, ..., $P^{(m)}$ *sont les dérivées, il suffit de poser*

$$y = ue^{-\frac{kx^2}{2}}$$

pour transformer cette équation différentielle en une équation à coefficients constants.

IX, X. *Transmutations inverses des transmutations additives.* — Les transmutations additives formant un *groupe*, au sens le plus général du mot, on est conduit à rechercher si l'on peut appliquer à ces opérations les théories de M. Lie sur les groupes de transformations.

Pour cela, il faut et il suffit que chaque transmutation additive admette une transmutation *inverse*, appartenant au groupe. Effectivement, *la transmutation inverse d'une transmutation additive est également additive.*

Mais l'inversion d'une transmutation additive n'est pas toujours possible, c'est-à-dire que la transmutation inverse n'est pas toujours *complète*, ainsi qu'on le voit sur des exemples. *Pour que l'inversion d'une transmutation additive soit, en général, possible, il faut et il suffit que toutes les puissances entières, positives ou nulles de x, admettent des fonctions inverses.*

XI. *Équations différentielles linéaires d'ordre infini.* — Une transmutation additive uniforme ayant pour fonction opérative $f(x, z)$, faire *l'inversion* de cette transmutation, c'est *intégrer* l'équation différentielle linéaire

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right)u = v,$$

qui est d'*ordre infini* lorsque f ne se réduit pas à un polynôme en z. De telles équations linéaires jouissent des mêmes propriétés que les équations d'ordre fini. On peut donc, pourvu que l'on en connaisse une solution particulière, n'avoir égard qu'à l'équation sans second membre

$$(1) \qquad f\left(x, \frac{d}{dx}\right)u = 0.$$

Les transmutations *à inversion complète* se rangent en trois catégories :

1° Celles pour lesquelles l'équation (1) admet l'*unique* solution $u = 0$; ce sont celles dont la transmutation inverse est également uniforme (dans ce type rentrent les changements de variables);

2° Les transmutations telles que l'équation (1) ait un nombre *limité* de solu-

tions linéairement indépendantes; la transmutation inverse n'est pas uniforme;

3° Les transmutations telles que l'équation (1) ait *une infinité* de solutions linéairement indépendantes. C'est le cas de l'équation

$$o = \frac{a}{1}u' + \frac{a^2}{2!}u'' + \ldots + \frac{a^m}{m!}u^{(m)} + \ldots,$$

qui a visiblement pour intégrale une fonction *arbitraire périodique, régulière, de période a.*

Bien que la question de savoir *à quelle catégorie appartient une transmutation additive, uniforme, complète, admettant une inverse également complète,* ne soit pas résolue, on a les théorèmes suivants :

Lorsque la fonction opérative d'une transmutation additive, uniforme, complète n'a aucun zéro (en z) à distance finie, la transmutation est, à un multiplicateur près, une substitution, et la transmutation inverse est uniforme.

Lorsque la fonction opérative $f(x, z)$ d'une transmutation additive, uniforme, complète, admet, quel que soit x, un nombre fini de zéros en z, la transmutation n'est autre chose qu'une transmutation finie, suivie d'une substitution. La transmutation inverse contient un nombre fini de constantes arbitraires, égal au nombre des zéros de la fonction opérative.

XII. *Transmutations à plusieurs variables.* — La théorie des transmutations portant sur des fonctions de plusieurs variables, particulièrement de leur inversion, est beaucoup plus compliquée que dans le cas d'une seule variable. Nous citerons seulement ce théorème : *Toute transmutation additive à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ continue et régulière est donnée par la formule*

$$\mathfrak{T} u = \alpha_{0,0,\ldots,0}\, u + \sum \alpha_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} u}{\partial x_1^{k_1}\, \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}},$$

où $\alpha_{0,0,\ldots,0}$, $\alpha_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ désignent des fonctions régulières des n variables et où la sommation est étendue à toutes les valeurs entières (positives ou nulles) des indices $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

» Je me propose, dans ce Mémoire, d'étendre la même notion aux systèmes différentiels quelconques. Il est possible d'y arriver d'une façon précise en utilisant les résultats que j'ai donnés, dans un Mémoire antérieur, sur la forme canonique générale de tels systèmes et le théorème général d'existence des intégrales.

» Le théorème de Cauchy généralisé, en faisant connaître d'une façon précise le nombre et la nature des arbitraires dont dépend l'intégrale générale d'un système, permet en quelque sorte de *mesurer* le degré de difficulté de l'intégration, ce qui conduit à la notion de système *plus simple* qu'un autre.

» En partant de ces idées, on est tout naturellement conduit, pour tenter l'intégration d'un système Σ, à chercher des systèmes intermédiaires Σ', c'est-à-dire des systèmes plus simples que Σ et dont toutes les intégrales soient des intégrales de Σ. Si l'on connaît des systèmes Σ' dont les équations contiennent des arbitraires en nombre suffisant, l'intégration de Σ sera ramenée à Σ'.

» Pour former un système intermédiaire, il faut ajouter à Σ des équations complémentaires, et on leur imposera la condition de former avec Σ un système Σ' compatible et ayant une intégrale générale dépendant d'arbitraires dont on fixera *a priori* le nombre et la nature. Les premiers membres des équations complémentaires seront alors assujettis à vérifier un système différentiel Σ'', que l'on saura certainement former.

» Si Σ'' est compatible et a des intégrales dépendant d'arbitraires en nombre suffisant, l'intégration de Σ sera décomposée en deux parties qui seront l'intégration de Σ'', puis celle de Σ'.

» Il est naturel de chercher à obtenir un système Σ' qu'on sache certainement intégrer; dans ce cas, on peut dire que toute la difficulté de l'intégration de Σ se trouve reportée sur Σ'', et nous appellerons Σ'' le *transformé* de Σ.

» En faisant varier la forme imposée à Σ', on arrive à déduire d'un même point de vue un grand nombre de résultats dont certains sont nouveaux et dont les autres constituent, à peu de chose près, tout ce que l'on sait actuellement sur les systèmes différentiels d'une forme présentant quelque généralité.

» Le cas le plus simple est celui où l'on impose à Σ' la condition d'être de première espèce, c'est-à-dire d'avoir une intégrale générale dépendant d'un nombre limité de constantes arbitraires.

» Appliqué aux systèmes de première espèce eux-mêmes, il conduit à leur intégration par des équations différentielles ordinaires.

» Appliqué aux systèmes dont l'intégrale générale ne dépend que d'une seule fonction arbitraire, laquelle ne dépend que d'un seul argument, il conduit immédiatement à leur intégration par des équations différentielles ordinaires.

» Appliqué à des systèmes quelconques, il conduit à faire correspondre à tout système Σ une infinité multiple de systèmes de plus en plus compliqués, et à un nombre de variables de plus en plus grand, dont l'intégrale générale se déduit de celle de Σ par des calculs algébriques et tels que, si l'on sait intégrer l'un quelconque d'entre eux, on en déduit l'intégration de tous les autres par des équations différentielles ordinaires et des calculs algébriques.

» Chacun de ces systèmes possède, en outre, la propriété de pouvoir s'intégrer par des équations différentielles ordinaires dès qu'on en connaît une intégrale particulière dépendant de certaines constantes et fonctions arbitraires.

» Enfin, le même cas, appliqué aux systèmes de premier ordre à une inconnue, conduit tout naturellement à la méthode de Jacobi et Mayer, qui se trouve ainsi établie d'une façon simple, sans faire de distinction entre le cas où l'inconnue figure et celui où elle ne figure pas, et sans être obligé de faire appel aux propriétés particulières des expressions [F, Φ] de Poisson.

» Parmi les systèmes qu'on sait intégrer par des équations différentielles ordinaires, ceux qui ont la forme la moins particulière sont ceux dont l'intégrale générale dépend d'une seule fonction arbitraire d'une variable.

» Si l'on cherche des équations complémentaires conduisant à de tels systèmes, et si l'on cherche à se placer dans les conditions les plus favorables pour que l'on puisse ainsi arriver à trouver toutes les intégrales du système proposé Σ, on est fatalement conduit à retrouver la méthode de M. Darboux (*Annales de l'École Normale*, 1870) bien précisée dans le cas des systèmes quelconques.

» En dernier lieu, une transformation particulière, que j'appelle *transformation par changement d'inconnues*, fournit un résultat intéressant relatif à l'application de la méthode de M. Darboux aux systèmes linéaires. S'il existe une équation linéaire qui, ajoutée à Σ, donne un système Σ' dont l'intégrale contient au moins une fonction arbitraire, Σ pourra certainement s'intégrer par la méthode de M. Darboux. »

Delassus. — Note sur les systèmes différentiels. (243-246).

Discussion avec M. Riquier. Réponse à la Note de celui-ci, insérée plus haut (p. 99-108).

Mangeot (*S.*). — Sur un mode de développement en série des fonctions algébriques explicites. (247-250).

Méthode pour calculer les dérivées successives de la fonction

$$u = [f_1(x)]^{m_1}[f_2(x)]^{m_2}[f_3(x)]^{m_3}\dots[f_r(x)]^{m_r},$$

où les exposants m_i sont des constantes quelconques. On connaît ainsi le développement en série entière de la fonction u; et l'application de cette méthode, répétée s'il y a lieu, conduit au développement de toute fonction algé-[redacted]

Ces limites une fois trouvées, il propose de *trouver une fonction* $v(x, y, z)$ *satisfaisant à l'intérieur de la surface à l'équation de Laplace et se réduisant, sur cette surface, à une fonction donnée* $f(x', y', z')$ *de la position du point* $P(x', y', z')$. On est conduit, par la théorie de la fonction de Green, à prévoir que v est représenté par la formule

$$v = \int u(x, y, z;\, x', y', z')\, f(x', y', z')\, ds,$$

où ds est l'élément de surface (S) relatif au point P et où l'intégration s'étend à toute la surface (S).

M. Zaremba prouve qu'il en est bien ainsi lorsque la fonction $f(x', y', z')$ satisfait aux conditions suivantes :

1° Sa valeur absolue ne dépasse jamais une constante positive donnée;

2° Cette fonction ne devient discontinue que le long de certaines lignes tracées sur la surface (S), sur lesquelles elle est indéterminée, et au passage desquelles elle varie brusquement d'une quantité finie.

C'est ce qui résulte de la proposition suivante, que l'auteur établit en se servant des limites inférieure et supérieure obtenues pour u :

Si γ *désigne la plus courte distance du point* (x, y, z) *à la surface* (S) *et* r *la distance de ce point à un point variable de la surface*

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

la différence entre la fonction v *définie ci-dessus et l'intégrale*

$$\frac{\gamma}{2\pi} \int_S \frac{f(x', y', z')}{r^3}\, ds,$$

étendue à toute la surface, tend uniformément vers zéro lorsque γ *tend vers zéro. En d'autres termes, à tout nombre positif* ε, *si petit qu'il soit, correspond un nombre positif* μ *tel que, sous la seule condition* $\gamma < \mu$, *on ait*

$$\left| v - \frac{\gamma}{2\pi} \int_S \frac{f(x', y', z')}{r^3}\, ds \right| < \varepsilon.$$

L'analyse de M. Zaremba fournit en même temps une solution très simple de ce problème : *Une fonction* $v(x, y, z)$ *satisfaisant à l'intérieur de la surface à l'équation de Laplace et se réduisant sur cette surface à une fonction présentant des lignes de discontinuité, quelle sera la limite vers laquelle tendra la fonction* $v(x, y, z)$ *quand on fera tendre, suivant un arc donné, le point* (x, y, z) *vers un point situé sur l'une de ces lignes de discontinuité.*

Riquier. — Sur la réduction des systèmes différentiels quelconques à une forme canonique. (259-285).

Voici, d'après l'auteur lui-même, le but de ce Travail :

« Dans diverses Notes communiquées à l'Académie des Sciences et dans un Mémoire *in extenso* dont elle m'a fait l'honneur d'ordonner l'insertion au *Recueil de Mémoires des Savants étrangers*, j'ai établi que tout système différentiel

peut, sans changement de variables ni intégration, se ramener à un autre composé : 1° d'un groupe de relations finies exprimant certaines des fonctions inconnues à l'aide des autres et des variables indépendantes; 2° d'un groupe *orthonome* passif et linéaire du premier ordre où se trouvent engagées, avec les inconnues restantes, quelques-unes de leurs dérivées à titre d'inconnues adjointes. L'économie des conditions initiales, évidente dans ce dernier système, se trouve par là même immédiatement connue dans le système proposé, et, dans l'un comme dans l'autre, la solution générale dépend de fonctions arbitraires *en nombre fini*.

Cela posé, et un système orthonome passif et linéaire du premier ordre étant donné, on peut toujours, *par un simple changement linéaire et homogène des variables indépendantes*, modifiant, il est vrai, l'économie des conditions initiales, le mettre sous une forme telle que la recherche d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données s'y ramène à une recherche semblable exécutée successivement sur divers systèmes de forme très simple. Ce résultat a été communiqué à l'Académie des Sciences dans la séance du 8 mars 1897, et son exposition détaillée constitue l'objet du présent Mémoire. »

A la suite de ce Mémoire est placé un *Appendice* dans lequel M. Riquier répond à la Note récente de M. Delassus (même Volume, p. 243-246).

Pellet. — Mémoire sur la théorie des surfaces et des courbes. (287-310).

Au moyen des six coefficients E, F, G, D, D', D" des deux formes quadratiques fondamentales qui représentent les parties principales du carré de la distance de deux points infiniment voisins sur une surface et de la distance de l'un de ces points au plan tangent à l'autre, l'auteur calcule les termes du troisième ordre de l'équation d'une position infiniment petite de la surface. Il étudie ces termes du troisième ordre non seulement pour les surfaces, mais pour les courbes et les fonctions de trois variables. La méthode d'identification qu'il emploie fournit une infinité d'équations différentielles entre les six fonctions E, F, G, D, D', D". Des trente premières on peut, par l'élimination de vingt-trois paramètres, déduire sept équations qui se réduisent aux trois formules fondamentales de la Théorie des surfaces.

PREMIÈRE PARTIE : *Sur la distribution des zéros des fonctions uniformes.* — Comme ce titre l'indique, M. Desaint ne s'est point proposé le problème inabordable qui consisterait à déterminer point par point les racines des équations transcendantes, mais seulement de limiter les régions du plan dans lesquelles peut s'annuler une fonction de variable complexe.

Le Chapitre I s'ouvre par l'exposition de la méthode géométrique employée par l'auteur. Cette méthode est fondée sur la remarque suivante : *Si un ensemble de segments issus d'un même point sont tous situés au-dessus d'une droite* (D), *leur résultante est essentiellement différente de zéro et située au-dessus de* (D), qui équivaut à cet énoncé général :

Une fonction $f(z)$ de la variable complexe est définie par la série

$$f(z) = \sum_n \varphi_n(z),$$

la série des modules étant convergente. Si R est une région du plan des z où la variation de l'argument de $\varphi_n(z)$ est inférieure à π lorsque n varie, la fonction $f(z)$ ne peut s'annuler qu'en dehors de cette région.

Les fonctions $\varphi_n(z)$ sont d'abord supposées rationnelles, et l'auteur démontre le théorème fondamental que voici :

Soit $f(z)$ une fonction définie par la série

$$f(z) = \sum_{m, n, \ldots, s} \frac{A_{kk'}(z-a_1)\ldots(z-a_k)}{(z-b_1)\ldots(z-b_{k'})},$$

où $A_{kk'}$, $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$ sont des quantités variables avec les entiers $m, n, \ldots, s$; $A_{kk'}$ est réel et garde un signe constant quand $m, n, \ldots, s$ prennent toutes les valeurs de la série, la différence $k - k'$ étant la même pour toutes les fonctions rationnelles; de plus, tous les points $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ sont à distance finie. Considérons le cercle C (de rayon R) de surface minima entourant tous les pôles et les zéros des termes de la série $f(z)$; les zéros de $f(z)$ sont à l'intérieur d'un cercle concentrique au cercle C, de rayon

$$\frac{R}{\sin\dfrac{\pi}{2(k+k')}},$$

où $k + k'$ est la plus forte somme des degrés des dénominateurs et numérateurs respectifs des fractions rationnelles de la série.

Ce théorème, appliqué aux racines des polynomes, conduit par des généralisations successives à cette conclusion :

La fonction u des variables $x, y, \ldots, z$ est définie par l'équation

$$u^n + \ldots + G_p(x, y, \ldots, z)u^{n-p} + \ldots + G_n(x, y, z) = 0,$$

où $G_1, G_2, \ldots, G_n$ sont des fonctions uniformes des r variables $x, y, \ldots, z$; quand le point $x, y, \ldots, z$ décrit dans l'espace à $2r$ dimensions un continuum C ne rencontrant aucune discontinuité des fonctions G_i, le radical

$$\sqrt[k]{n\,|G_k(x, y, \ldots, z)|}$$



atteint sa plus grande valeur pour $x = x_0$, $y = y_0$, ..., $z = z_0$ et $k = p$; les aires ou les circuits décrits par la fonction u dans son plan sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à l'origine et de rayon égal à

$$\frac{\sqrt[p]{(n+1)|G_p(x_0, y_0, \ldots, z_0)|}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

Revenant aux zéros des fonctions uniformes, M. Desaint s'occupe des fonctions qui n'ont de points singuliers qu'à distance finie et qui ne peuvent admettre comme points singuliers essentiels que les limites des pôles, fonctions représentables par la série

$$F(z) = A_0 + \sum_{n}^{n=\infty} \sum_{\mu}^{\mu=\infty} \frac{A_n^{(\mu)}}{(z - a_n)^\mu},$$

où a_n est un pôle de degré m_n, la série $\Sigma |A_n^{(\mu)}|$ étant supposée convergente. Des résultats obtenus on déduit ce corollaire relatif au cas des pôles simples : *Si une série à termes réels de signe constant, ΣA_n, est convergente, la fonction*

$$F(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n}$$

a ses zéros à l'intérieur de tout contour convexe entourant les points a_n. Ce corollaire a des conséquences intéressantes pour les séries étudiées par M. Poincaré et par M. Homèn.

L'auteur traite ensuite des fonctions uniformes n'ayant à distance finie et à l'infini que des discontinuités polaires, l'infini n'étant pas limite de discontinuités; puis il aborde à leur tour les fonctions $F(z)$ définies par la série de fonctions rationnelles

$$F(z) = \sum_{n} \varphi_n(z),$$

pour lesquelles la différence des degrés du numérateur et du dénominateur est la même quel que soit n, le rapport des coefficients des termes de degré le plus [redacted]

tégrale eulérienne de seconde espèce $\Gamma(z)$ satisfait à ces conditions, α étant nul et β égal à la constante d'Euler C; donc *l'équation*

$$\frac{d \log \Gamma(z)}{dz} = -C + \sum \frac{z-1}{(n+1)(z+n)} = 0$$

a toutes ses racines réelles.

Les fonctions entières de genre 1, *dont le multiplicateur exponentiel est de la forme* $A e^{\alpha z + \beta}$, *où* α *est une quantité réelle positive ou nulle, et les fonction de genre* 2 *de multiplicateur* $A e^{\alpha z^2 + \beta}$ *jouissent de cette propriété que, si leurs zéros sont réels, les zéros de leur dérivée sont tous aussi réels.*

Les fonctions entières de genre pair ω, *dont le multiplicateur exponentiel est de la forme* $A e^{\alpha z^{\omega+2} + \beta z^{\omega+1} + \gamma}$, *où* A *est une constante,* α *et* β *réels et* α *négatif, jouissent de la même propriété.*

Si une fonction entière de genre impair ω *a toutes ses racines* a_n *réelles le multiplicateur exponentiel étant de la forme ci-dessus,* α *et* β *réels, avec*

$$\beta > \frac{1}{\omega+1} \sum \frac{1}{a_n^{\omega+1}},$$

les racines de sa dérivée sont toutes réelles.

Le Chapitre se termine par un théorème relatif à la distribution des zéros d'une fonction polaire quelconque, l'infini étant supposé pôle d'ordre p, d'où résultent quelques propriétés de types très étendus de fonctions entières.

Au Chapitre II, M. Desaint s'occupe des intégrales définies étudiées par M. Hermite, en vue d'arriver aux théorèmes sur les fonctions uniformes quelconques, qui permettent d'étudier la distribution des points où ces fonctions acquièrent une valeur donnée. Les intégrales en question sont de la forme

$$F(z) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{u_1}^{u_2} \cdots \int_{w_1}^{w_2} \frac{H(t, u, \ldots, w, z)\, dt\, du \ldots dw}{G(t, u, \ldots, w, z)},$$

où toutes les limites $u_1, u_2, \ldots, w_1, w_2$ sont finies, H et G des polynômes en z à coefficients holomorphes en $t, u, \ldots, w$. Les fonctions $F(z)$ jouissent de cette propriété que l'ensemble de leurs zéros (sauf l'infini) est à l'intérieur de tout contour convexe entourant l'ensemble de leurs discontinuités.

Les raisonnements relatifs à ces fonctions permettent à M. Desaint d'étendre aux intégrales multiples les théorèmes de Weierstrass et de M. Darboux sur les intégrales simples et d'étudier les zéros des fonctions *non uniformes* qui, en dehors de leurs coupures, sont représentables par des intégrales définies du type ci-dessus. Tel est le cas de l'intégrale elliptique

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}},$$

pour laquelle on a ce théorème : *lorsque* z *décrit des circuits qui ne rencontrent pas l'axe réel entre les points* -1 *et* $+1$, *l'intégrale* u *ne peut s'annuler* (*sauf pour* $z = 0$) *qu'à l'intérieur du carré de sommets opposés* $+1$ *et* -1.

Le Chapitre se termine par l'étude de fonctions qui se présentent comme périodes d'intégrales abéliennes ou comme intégrales hypergéométriques.

Dans la première Partie de son travail, l'auteur a pu caractériser certaines classes de fonctions discontinues ou multiformes par une propriété de leurs zéros, qui, leur étant commune, permettait de les rattacher entre elles; seulement sa méthode géométrique ne pouvait atteindre qu'un nombre relativement restreint de classes de fonctions. Aussi dans la seconde Partie fait-il usage des théorèmes de Cauchy pour étendre les résultats de la première aux fonctions uniformes quelconques, et généraliser le problème qu'il y traitait.

Seconde Partie : *Sur la distribution des valeurs de la variable qui font prendre à une fonction une valeur donnée u.* — Il s'agit, une fonction étant donnée par les valeurs qu'elle prend le long d'un contour, de limiter les régions du plan où elle peut acquérir la valeur donnée u. Parmi les divers résultats obtenus par l'auteur, nous signalerons spécialement ce théorème :

Soit $F(z)$ *une fonction uniforme pour laquelle le point à l'infini est un point ordinaire; traçons un cercle* C *entourant toutes les discontinuités de* $F(z)$ *et d'ailleurs aussi rapproché qu'on le veut du contour convexe minimum entourant les discontinuités; appelons* M *le module maximum de* $F(z)$ *sur* C *et* R *le rayon de ce cercle. Les valeurs de ce cercle, pour lesquelles* $F(z)$ *prend une valeur* u, *sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à* C *et de rayon*

$$R\sqrt{2}\left(1+\frac{M}{|A-u|}\right),$$

A *étant la valeur de* $F(z)$ *à l'infini.*

De cette proposition on peut déduire une réciproque qui permet, en particulier, d'établir une distinction entre les fonctions uniformes et les fonctions non uniformes, ainsi qu'un théorème général sur la continuité des fonctions uniformes.

Vient ensuite une étude des fonctions entières et des intégrales des équations différentielles, faite au point de vue de leurs *valeurs d'exclusion* (valeurs qu'elles ne peuvent acquérir). Nous en détacherons ce théorème : *Étant donnée l'équation différentielle*

[redacted]



Le Roy. — Sur l'intégration des équations de la chaleur. (379-465).

Première Partie d'un ensemble très étendu de recherches qui se terminent dans le Volume suivant des *Annales* et que nous analyserons en entier avec ce Volume.

Guichard. — Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques. (467-516).

Dans ce Mémoire, consacré aux propriétés générales des systèmes orthogonaux et des systèmes cycliques, l'auteur, tout en ayant en vue des propriétés relatives à l'espace ordinaire, a introduit dès le début des considérations relatives à l'espace à n dimensions. « J'espère, dit-il, que ceux qui me liront penseront, avec moi, que le détour n'a pas été inutile; qu'il n'y a pas là seulement un jeu d'esprit, mais que ces considérations expliquent et relient entre elles, d'une façon logique, certaines propriétés de notre espace. »

Le Chapitre I, de beaucoup le plus étendu, traite des *réseaux et congruences dans l'espace à n dimensions.* Il s'ouvre par la définition des points, droites et plans de l'hyperespace, avec leurs conditions de parallélisme et d'orthogonalité.

Vient ensuite la définition des réseaux. Si les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un point M sont fonctions de deux paramètres u et v on dit que le point M décrit une *surface;* l'ensemble des courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ est appelé *système* de courbes, et l'auteur dit qu'un système de courbes est un *réseau,* si les n coordonnées x sont solutions d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = P\frac{\partial \theta}{\partial u} + Q\frac{\partial \theta}{\partial v},$$

P et Q étant des fonctions de u et de v. Deux systèmes correspondants étant dits *parallèles* si leurs tangentes correspondantes sont parallèles, *les seuls systèmes de courbes qui admettent des parallèles sont les réseaux, et tout réseau est parallèle à une infinité d'autres.*

L'auteur donne, comme dans l'espace à trois dimensions, le nom de *surface développable* au système doublement infini des points situés sur les tangentes à une courbe, réservant celui de *congruence* aux systèmes doublement infinis de droites qui, touchant deux séries de courbes, peuvent être réparties en deux séries de développables. Les paramètres u et v qui définissent la position d'une droite de la congruence étant ceux qui restent fixes, quand la droite décrit l'une ou l'autre développable, il faut $2n-4$ conditions pour qu'une droite décrive une congruence. *La trace de la droite de la congruence sur un hyperplan quelconque décrit un réseau. Les paramètres directeurs* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *d'une droite d'une congruence satisfont à une équation de la forme*

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = P\frac{\partial \theta}{\partial u} + Q\frac{\partial \theta}{\partial v} + R\theta. \tag{17}$$

Cette condition, jointe aux suivantes

$$(22)\qquad \begin{cases} CP + D = AP + \dfrac{\partial A}{\partial v}, \\ AQ + B = CQ + \dfrac{\partial C}{\partial u}, \\ AR + \dfrac{\partial B}{\partial v} = CR + \dfrac{\partial D}{\partial u}, \end{cases}$$

exprime que la droite dont les paramètres directeurs sont $X_1, X_2, \ldots, X_n$, menée par le point P dont les coordonnées y_i sont définies par les relations

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y_i}{\partial u} = A\dfrac{\partial X_i}{\partial u} + BX_i, \\ \dfrac{\partial y_i}{\partial v} = C\dfrac{\partial X_i}{\partial v} + DX_i, \end{cases}$$

décrit une congruence.

Si, par un point fixe, on mène des parallèles à toutes les droites d'une congruence (C) on obtient un système de droites, qui est appelé la *représentation sphérique* de (C). Ce système (C') n'est pas un système doublement infini quelconque de droites concourantes, car *sur les droites de la représentation sphréique, il existe une infinité de points qui décrivent des réseaux*. Inversement, *le système des droites qui joignent l'origine aux points d'un réseau est la représentation sphérique d'une infinité de congruences*. Deux congruences étant dites *parallèles* lorsque les développables se correspondent et que les droites sont parallèles, *deux congruences parallèles ont même représentation sphérique*. La recherche des congruences parallèles à une congruence donnée revient donc à celles des congruences qui ont une représentation sphérique donnée. Si l'on prend pour système inconnu (P) le *système central* (système décrit par le point milieu des deux foyers), on devra se donner les X satisfaisant à l'équation (17) et poser

$$A = \lambda, \qquad C = -\lambda.$$

Alors des deux premières équations (22) on tire

[redacted]

1° *Chaque congruence est conjuguée à une série de réseaux* [illegible] *l'un quelconque des réseaux de la représentation sphérique;* [illegible]

2° *Ces réseaux sont les seuls réseaux conjugués à la congru*[illegible]

3° *Les droites qui joignent deux réseaux parallèles décri*[illegible] *gruence conjuguée par rapport à ces réseaux.*

De là résultent diverses conséquences, entre autres la propr[illegible] obtenue pour l'espace ordinaire, par Ribaucour :

Pour que le système central soit un réseau, il faut et il suffit que l'équation à laquelle satisfont les paramètres directeurs soit à invariants égaux. Les coordonnées de ce réseau satisfont aussi à une équation à invariants égaux.

Ces congruences spéciales s[illegible] *Ribaucour.*

Un réseau et une congruence sont [illegible] *ha*[illegible]*es* lors [illegible] congruence sont sur les tangentes du ré[illegible]au. M. [illegible]arboux [illegible] de déterminer toutes les congruences ha[illegible]oniques à un réseau donné : *Pou*[illegible] *déterminer toutes les congruences harmoniques au réseau décrit par un point* M *dont les coordonnées x_i satisfont à l'équation*

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = P \frac{\partial \theta}{\partial u} + Q \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

on prend une solution quelconque θ de cette équation; les coordonnées des foyers de la congruence cherchée sont

$$X_i = x_i - \frac{\theta}{\theta'_u} \frac{\partial x_i}{\partial u},$$

$$Y_i = x_i - \frac{\theta}{\theta'_v} \frac{\partial x_i}{\partial v}.$$

La recherche des réseaux harmoniques à une congruence est identique à celle des congruences parallèles à la proposée, de sorte que, *si deux congruences sont parallèles, tout réseau harmonique à l'une est parallèle à un réseau harmonique à l'autre.*

Les réseaux *dérivants* sont définis comme l'enveloppe de plans passant par les points du réseau *dérivé*, ces plans étant choisis de telle sorte qu'ils enveloppent un réseau. Tous les réseaux dérivés d'un réseau donné s'obtiennent par l'application du théorème suivant : *Si deux congruences* (G) *et* (G_1) *sont harmoniques à un même réseau* (M), *le point de rencontre* μ *des droites* G *et* G_1 *décrit un réseau dérivé de* (M). Inversement : *Si* (G) et (G_1) *sont deux congruences conjuguées par rapport au réseau* (μ) *le plan des droites* G *et* G_1 *enveloppe un réseau* (M) *qui est un réseau dérivant* (μ).

Une congruence (G) sera dite *dérivée* d'une congruence (H) si (G) est conjuguée à l'un quelconque des réseaux harmoniques à (H); inversement, (G) est une congruence *dérivant* (H). Toutes les congruences dérivées de H sont déterminées par le théorème suivant : *Les droites qui joignent deux réseaux* (M) et (N) *harmoniques à une congruence* (H), *forment une congruence* (G)

dérivée de (H). Toutes les congruences dérivant une congruence (G) sont fournies par celui-ci : *Si* (M) *et* (N) *sont deux réseaux conjugués à la congruence* (G), *la droite d'intersection de ces deux réseaux décrit une congruence* (H) *dérivant* (G).

On a souvent à projeter des figures sur un hyperplan, ce qui permet de passer d'un espace à n dimensions à un espace à $n-1$. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées d'un point M d'un espace (E_n), si l'hyperplan de projection a pour équation $x_n = 0$, le point m qui, dans l'espace (E_{n-1}), a pour coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ est appelé *la projection* de M. La projection d'un réseau est un réseau ; celle d'une congruence est une congruence et les projections des foyers sont les foyers de la congruence-projection. Si un réseau et une congruence sont conjugués ou harmoniques, il en est de même de leurs projections. On sait effectuer les déterminations inverses.

Le Chapitre I se termine par la démonstration de deux propriétés propres à l'espace ordinaires. Un réseau et une congruence sont dits *parallèles*, si la droite de la congruence est perpendiculaire au plan du réseau. Cela posé :

1° *Si un réseau et une congruence sont parallèles, toute congruence conjuguée au réseau est parallèle à un réseau conjugué à la congruence, et inversement.*

2° *Si une congruence et un réseau sont parallèles, toute congruence harmonique au réseau est parallèle à un réseau harmonique à la congruence, et inversement.*

Il existe des théorèmes analogues pour les réseaux et congruences dérivés et dérivants.

Le Chapitre II, intitulé *Réseaux et congruences* O, a pour objet de définir et de caractériser ces éléments. L'auteur commence par considérer un déterminant Δ à n^2 éléments

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^1 & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

[redacted]

A raison de leurs expressions les p_{kl}, q_{kl} satisfont aux relations

$$p_{kk} = 0, \qquad q_{kk} = 0,$$
$$p_{kl} = -p_{lk}, \qquad q_{kl} = -q_{lk}.$$

L'auteur les appelle les ***rotations*** du déterminant Δ, par analogie avec les quantités introduites par M. Darboux dans le cas des déterminants à 9 éléments; il indique le moyen de former les équations aux dérivées partielles qui existent entre elles. Ces équations étant supposées vérifiées, il y a lieu de chercher les éléments de Δ, connaissant les rotations. Cette intégration, qui reçoit le nom d'*opération différentielle d'ordre* $n-2$, s'achève par quadratures quand on connaît $n-2$ solutions du système complet

$$\frac{\partial x_k}{\partial u} = \sum_l p_{kl} x_l, \qquad \frac{\partial x_k}{\partial v} = \sum_l q_{kl} x_l$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

à raison de ce fait que la solution la plus générale du problème se déduit d'une solution particulière, au moyen d'une substitution orthogonale à coefficients constants effectués sur les éléments de Δ.

L'auteur introduit ensuite un déterminant Δ de forme spéciale, à $(n+2)^2$ éléments

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n & x_1^{n+1} & x_1^{n+2} \\ x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_2^n & x_2^{n+1} & x_2^{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^1 & x_n^2 & \ldots & x_n^n & x_n^{n+1} & x_n^{n+2} \\ \xi^1 & \xi^2 & \ldots & \xi^n & \xi^{n+1} & \xi^{n+2} \\ \eta^1 & \eta^2 & \ldots & \eta^n & \eta^{n+1} & \eta^{n+2} \end{vmatrix},$$

pour lequel toutes les rotations sont nulles, sauf

$$p_{k,n+1} = a_k, \qquad q_{k,n+1} = b_k.$$

De là résulte qu'on peut poser

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial u} = m\,\xi_i, \qquad \frac{\partial \xi_i}{\partial v} = n\,\eta_i.$$

Il ne reste plus ainsi que les $2n+2$ solutions a_k, b_k, m et n, qui satisfont aux $2n+1$ équations

$$\frac{\partial a_k}{\partial v} = m b_k, \qquad \frac{\partial b_k}{\partial u} = n a_k,$$
$$\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + \sum a_k b_k = 0.$$

Quand ces conditions sont remplies, les éléments de Δ sont déterminés, à une substitution orthogonale près, à coefficients constants, effectuée sur les éléments des lignes. Un déterminant jouissant des propriétés ci-dessus est appelé ***déterminant orthogonal*** dans l'espace à $n+2$ dimensions. D'un tel déterminant on peut en déduire une infinité d'autres. Si, en effet, on supprime du

déterminant Δ les lignes contenant les ξ et les η et qu'on effectue sur les éléments des colonnes du Tableau rectangulaire ainsi obtenu une même substitution orthogonale à coefficients constants

$$x'^{i}_{k} = \alpha^1_k x^i_1 + \alpha^2_k x^i_2 + \ldots + \alpha^n_k x^i_n$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)\ (i = 1, 2, \ldots, n, n+1, n+2)$$

le déterminant Δ' déduit de Δ par la substitution des x'^i_k aux x^i_k jouit des mêmes propriétés que Δ. Les déterminants orthogonaux ainsi obtenus sont dits *équivalents*. Tous ont en commun les rotations m, n; les autres rotations a_k, b_k diffèrent de l'un à l'autre. Mais, pour tous, les quantités

$$\Sigma a_k^2, \quad \Sigma b_k^2, \quad \Sigma a_k b_k$$

ont les mêmes valeurs, ainsi que m et n. Ce sont là les cinq *invariants* du déterminant orthogonal.

Le point A, qui a pour coordonnées $x^1_k, x^2_k, \ldots, x^{n+2}_k$, est sur l'hypersphère

$$(x^1)^2 = (x^2)^2 + \ldots + (x^{n+2})^2 = 1.$$

De plus, ses coordonnées satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{a_k}\frac{\partial a_k}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{b_k}\frac{\partial b_k}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Il décrit donc un réseau; les tangentes à ce réseau ont pour cosinus directeurs les ξ et les η et sont, par suite, rectangulaires. L'auteur appelle ce réseau un *réseau* OS. La connaissance d'un réseau OS détermine les quantités ξ et η ainsi qu'une autre ligne d'un déterminant équivalent à Δ; un tel réseau permet d'obtenir un déterminant orthogonal par une opération d'ordre $n-3$.

L'étude préliminaire des déterminants orthogonaux est complétée par la démonstration du théorème suivant :

Pour que n quantités, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient les n premiers termes d'une colonne d'un déterminant orthogonal, il faut et il suffit que ces fonctions soient solutions d'une équation de la forme

[redacted]

Un tel réseau est dit *réseau* O si aucune des deux quantités

$$E = \sum_1^{n+2} \left(\frac{\partial X^i}{\partial u}\right)^2, \qquad G = \sum_1^{n+2} \left(\frac{\partial X^i}{\partial v}\right)^2$$

n'est égale à zéro. Les réseaux parallèles aux réseaux OS sont des réseaux O. Tous les réseaux O peuvent être formés à l'aide des déterminants orthogonaux.

Lorsqu'un réseau est tel que sa normale décrive une congruence, cette congruence est appelée *congruence* O. On a ce théorème :

Pour qu'une congruence soit O, *il faut et il suffit que l'équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = P \frac{\partial \theta}{\partial u} + Q \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

à laquelle satisfont ses paramètres directeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *admette comme solutions* $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots + (x_n)^2}$.

Si l'on appelle *congruence* HO la congruence décrite par une droite isotrope, on reconnaît que *tous les réseaux conjugués à une congruence* HO *sont des réseaux* O et que *la projection d'une congruence* HO *sur un hyperplan quelconque est une congruence* O.

Par projection stéréographique on fait correspondre à chaque réseau O de l'espace à n dimensions un réseau OS de l'espace à $n+1$ dimensions et réciproquement. Si l'on connaît deux réseaux parallèles O dans l'espace (E_n), on pourra déterminer, en outre, dans l'espace (E_{n+1}) un réseau O parallèle au réseau OS, par une opération différentielle d'ordre $n-4$, ce qui constitue un mode de formation successive des déterminants orthogonaux.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CXXV; 1897 [1].

Boussinesq. — Distribution des vitesses à travers les grandes sections, dans les écoulements graduellement variés, et équation du mouvement aux degrés d'approximation supérieurs. (6-12).

Bioche. — Sur les surfaces algébriques qui admettent comme asymptotique une cubique gauche. (15-16).

La condition d'avoir une cubique asymptotique équivaut, pour une surface

---

[1] Voir *Bulletin*, XXII$_2$, p. 125.

d'ordre m, à $6m-2$ conditions linéaires et entraîne l'existence de $3(m-2)$ points doubles sur la cubique; la surface peut d'ailleurs en admettre d'autres.

Boussinesq. — Théorie approchée du passage d'un régime graduellement varié à un régime permanent et *vice versa*. (69-75).

Marotte. — Sur les équations différentielles appartenant à une même classe de Riemann. (84-86).

Toutes les équations linéaires appartenant à une même classe de Riemann ont en commun diverses propriétés que l'auteur retrouve ou obtient en remarquant que *la résolvante considérée par M. Picard est la même pour toutes les équations d'une classe*. En particulier, *le groupe de méromorphie relatif à un point singulier est le même pour toutes ces équations*, d'où résulte cette proposition connue, que, dans le voisinage d'un point singulier, les nombres des intégrales méromorphes, des intégrales régulières, des intégrales normales sont les mêmes pour toutes les équations de la classe. Signalons encore ce résultat : *On peut, par un nombre fini d'opérations, reconnaître si deux équations données quelconques appartiennent à la même classe de Riemann*.

Boussinesq. — Établissement du régime uniforme, dans un tuyau à section rectangulaire large. (142-147).

Painlevé. — Sur les intégrales quadratiques de la Dynamique. (156).

Beudon. — Sur l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à plusieurs fonctions inconnues. (156-159).

En s'appuyant sur des résultats obtenus par M. E. von Weber, l'auteur montre que la méthode classique de Cauchy pour l'intégration d'*une* équa- [redacted]

où u est une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \Lambda}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda u = 0,$$

définissent une surface rapportée à ses lignes de longueur nulle ($x =$ const., $y =$ const.).

Lecornu. — Sur le tracé pratique des engrenages. (162-164).

Boussinesq. — Établissement du régime uniforme dans un tuyau à section circulaire. (203-209).

Cotton. — Sur une généralisation du problème de la représentation conforme aux variétés à trois dimensions. (225-228).

L'auteur a été conduit à se poser la question suivante : *Reconnaître s'il est possible de transformer, à un facteur près, une forme quadratique donnée de trois différentielles dx_1, dx_2, dx_3 en une forme quadratique également donnée de dy_1, dy_2, dy_3*; ce qui revient à effectuer la représentation conforme d'une variété à trois dimensions sur une autre. Ayant réussi à traiter le problème pour le cas où *l'une des variétés est l'espace euclidien ordinaire*, il communique le principe de sa solution, susceptible de diverses applications.

Pellet. — Sur les surfaces isothermiques. (291-292).

Andrade. — Sur la réduction des vecteurs et les propriétés métriques. (394-396).

En s'appuyant sur le théorème d'Euler relatif aux rotations finies (théorème non euclidien) et sur l'équation fonctionnelle de Poisson

$$\varphi(x+y) + \varphi(x-y) = 2\varphi(x)\varphi(y),$$

on peut établir que la composition des forces concourantes et la Trigonométrie sphérique, qui traduit cette composition, sont indépendantes du postulatum d'Euclide.

Si l'on recherche la loi de composition des vecteurs d'un plan perpendiculaire à une même droite et dirigés d'un même côté de cette droite, on est encore conduit à l'équation fonctionnelle de Poisson, mais avec des conditions initiales différentes. Suivant qu'on suppose la fonction $\varphi(x)$ supérieure, égale ou inférieure à l'unité, on est conduit à la Géométrie de Lobatchefsky, à celle d'Euclide ou à celle de Riemann.

Serret (P.). — Sur l'hypocycloïde de Steiner. (404-406).

Crelier. — Sur les fonctions besséliennes $O^n(x)$ et $S^n(x)$. (421-423).

Serret (*P.*). — Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. (423-426).

Serret (*P.*). — Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. (445-448).

Serret (*P.*). — Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. (459-461).

Jahnke. — Systèmes orthogonaux pour les dérivées des fonctions thêta de deux arguments. (486-489).

M. Caspary a découvert le système orthogonal des seize produits des fonctions thêta de deux arguments. L'auteur fait une nouvelle application de la méthode due à M. Caspary et communique de nouveaux systèmes orthogonaux comprenant les relations différentielles qui existent entre les fonctions thêta de deux arguments.

Guldberg. — Sur des congruences différentielles linéaires. (489-492).

Guichard. — Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques. (519-521).

Wælsch. — Sur les lignes géodésiques de certaines surfaces. (521-523).

Étant donné un faisceau simplement infini S de géodésiques d'une surface F, la tangente d'une de ces géodésiques au point a est tangente à une autre surface F_1 en un point a_1. Si toutes les géodésiques de F sont groupées en une infinité de faisceaux S, à chaque faisceau correspond ainsi un point a_1; les points a_1 correspondant à tous les S forment une courbe A. L'auteur dé- [redacted]

Guichard. — Sur la déformation des quadriques. (596-59

De ses recherches sur les réseaux et les congruences, l'auteur théorème suivant : *Si l'on connaît une surface applicable sur drique, on pourra en déduire de nouvelles surfaces applicables d de deux constantes arbitraires.* C'est l'extension aux quadriques de formation Bianchi-Ribaucour pour les surfaces à courbure totale cons

Il existe un *premier système* de surfaces isothermiques qui se ratt déformation des quadriques de révolution. Il existe en outre, pour t... .es quadriques possibles, un *deuxième système* de surfaces isothermiques se rattachant à leur déformation : ce système coïncide, dans le cas du paraboloïde, avec celui que M. Thybaut a récemment fait connaître.

Drach. — Sur les systèmes com pace à *n* dimensions et sur la tiels les plus généraux. (598-601).

L'auteur montre que *tout système d'équations aux dérivées partielles se ramène à un système du second ordre à une seule fonction inconnue en augmentant le nombre des variables.* Ce théorème partage les transcendantes qui vérifient des équations aux dérivées partielles en deux classes, suivant qu'elles sont ou non liées à leurs dérivées premières par une équation au moins, rationnelle par rapport à tous les éléments qui y figurent.

Pellet. — Sur les surfaces de Weingarten. (601-602).

Zeuthen. — Nouvelle démonstration du théorème fondamental de la Géométrie projective. (638-640).

Le théorème fondamental exprimant que la connexion de deux séries projectives est entièrement déterminée si l'on connaît les trois éléments de l'une qui doivent correspondre à trois éléments donnés de l'autre est une conséquence immédiate de la conservation des rapports anharmoniques. Son établissement présente, au contraire, de grandes difficultés quand on veut, avec von Staudt, construire la Géométrie projective exclusivement sur des postulats projectifs. On n'a guère réussi dans cette voie qu'en faisant usage du mouvement continu des éléments. Il y aurait grand intérêt à établir, sans l'emploi d'aucun artifice, le théorème fondamental en question. Dans cet ordre d'idées, M. Zeuthen établit le lemme suivant :

Si cinq des sommets d'un quadrilatère plan et complet se trouvent sur des droites données qui ne se rencontrent pas, le sixième sommet se trouve aussi sur une droite.

Il résulte de là que si l'on appelle *projectives* deux séries de points, situés sur deux droites, et dont l'une détermine l'autre au moyen d'un nombre fini de projections, le nombre des projections peut être réduit à *une*, à l'exception du cas où les deux droites pointées se trouvent dans un même plan.

Goursat. — Sur la détermination des intégrales d'une équation

aux dérivées partielles par certaines conditions initiales. (640-643).

L'auteur étend ici aux équations d'ordre quelconque le théorème qu'il a établi antérieurement (*Comptes rendus*, t. CXX, p. 712) pour les équations aux dérivées partielles du second ordre. Cette proposition permet d'étendre aux équations d'ordre supérieur la théorie des caractéristiques. En ce qui concerne le second ordre, elle montre que deux courbes C et C' se coupant en un point O déterminent une surface intégrale, pourvu que l'une des deux courbes soit tangente en O à l'une des deux directions de caractéristiques de l'élément du second ordre qu'elles déterminent.

Guichard. — Sur le problème de M. Bonnet. (643-646).

Baire. — Sur la théorie générale des fonctions de variables réelles. (691-694).

L'auteur considère une fonction d'une variable réelle x, définie dans un certain intervalle et possédant la propriété suivante : pour chaque valeur x_0 de x et pour tout nombre positif ε, il existe un nombre α tel que les conditions $x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha$ entraînent

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Appelant *maximum en* x_0 la limite du maximum de la fonction dans l'intervalle $x_0 - \alpha$, $x_0 + \alpha$ lorsque α tend vers zéro, il dit que la fonction considérée est *toujours égale à son maximum*, et énonce le théorème suivant : *Une fonction, qui est toujours égale à son maximum, et qui a toujours son minimum égal à zéro, atteint la valeur zéro pour une infinité de points dans tout intervalle.* Cette proposition sert à établir ces deux-ci : *Si une fonction de deux variables, déterminée dans une certaine région, est continue par rapport à chacune d'elles, il existe dans toute aire des points en chacun desquels la fonction est continue par rapport à l'ensemble des deux variables; dans les mêmes conditions, la succession des valeurs prises* [redacted]

La fonction μ étant une fonction continue quelconque, si les sections normales de la surface au point M_0 ont toutes des courbures finies et déterminées, quand les points P et P' tendent vers M_0 en restant équidistants de ce point, on a la relation annoncée.

La condition précédente relative au point M_0 étant remplie, prenons ce point pour pôle de coordonnées polaires (ρ, θ) dans le plan tangent à la surface et posons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu \, d\theta = \overline{\mu}.$$

Si l'on peut trouver un nombre positif α tel qu'on ait

$$\lim_{\rho=0} \frac{\overline{\mu} - \mu_0}{\rho^{1+\alpha}} = 0,$$

μ_0 étant la valeur de μ au point m_0, on aura des limites déterminées pour

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P'},$$

et ces limites seront égales.

Le Roy. — Sur l'intégration des équations de la chaleur. (756-758).

Résumé d'un Mémoire étendu dans lequel l'auteur étudie divers problèmes qui ont une étroite analogie avec celui de Dirichlet.

La première Partie est consacrée à *la généralisation du principe de Dirichlet pour les équations de l'équilibre thermique.*

Dans la seconde, l'auteur définit certaines fonctions qu'il appelle les *fonctions harmoniques fondamentales attachées à une surface fermée* et qui sont des potentiels newtoniens de certaines couches attirantes répandues sur la surface.

La troisième Partie traite *du refroidissement des corps solides et du problème de Fourier.*

Duporcq. — Sur le déplacement le plus général d'une droite dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques. (762-763).

Schou (Erik). — Sur la théorie des fonctions entières. (763-764).

Démonstration de ce théorème : *Si une fonction entière de x croît comme la fonction $e^{V(|x|)}$, on aura, en désignant par ρ_p, le module de la $p^{\text{ième}}$ racine*

$$V(s\rho_p) > \log(s-1)p,$$

s désignant un nombre positif plus grand que 2.

Broca (André). — Sur la transmission d'énergie à distance. Application à la polarisation rotatoire. (765-767).



Conditions nécessaires et suffisantes pour que dans un champ qui transmet de l'énergie (libérée en certains points, consommée en d'autres) le vecteur qui représente le flux d'énergie en chaque point soit réversible ou irréversible; pour qu'une force en un point dérive ou ne dérive pas d'un potentiel.

Liapounoff. — Sur certaines questions se rattachant au problème de Dirichlet. (808-810).

L'auteur établit la *possibilité* du problème fondamental de l'Électrostatique (distribution de l'électricité à la surface d'un conducteur soustrait à toute influence extérieure) sous les conditions suivantes :

1° La surface S est convexe en tous ses points;

2° En tout point de S il existe un plan tangent déterminé;

3° γ étant l'angle que fait la normale en un point quelconque p de S av[ec] celle d'un autre point p' de cette surface et Δ la distance mutuelle de ces de[ux] points, on peut assigner deux nombres positifs A et α indépendants du cho[ix] des points p et p' et tels qu'on ait $\gamma < A\Delta^\alpha$, quelles que soient les positio[ns] de ces points.

Vient ensuite l'énoncé de deux conditions sous lesquelles la dérivée normal[e] du potentiel V existe nécessairement pour tous les points de S : dans ces conditions, *quand le potentiel de la couche double répandue sur* S *admet une dérivée normale continue sur la surface* S, *il en est de même de* V.

Ricci (*G.*). — Sur les systèmes complètement orthogonaux dans un espace quelconque. (810-811).

Dans un Mémoire publié en 1896, l'auteur a résolu un problème qui comprend comme cas particulier celui des systèmes complètement orthogonaux dans un espace euclidien à n dimensions, que M. Drach a étudié dans une Note toute récente des *Comptes rendus*.

Beudon. — Sur la théorie des groupes infinis de transformations et l'intégration des équations aux dérivées partielles. (811-813).

Zeuthen. — Sur le théorème fondamental de la Géomét jective. (858-859).

Examen critique, fait par l'auteur, de sa dernière Note des *Compte*

Stouff. — Sur l'équation aux périodes. (859-860).

Crelier. — Sur les fonctions besseliennes $S^n(x)$ et $O^n(x,$ 863).

Représentation nouvelle de ces fonctions, permettant de démontrer, d'une façon simple et rapide, leurs principales propriétés.

Picard (Ém.). — Sur les intégral dans la théorie des surfaces algéb

Ayant montré par des travaux antérieurs l'importance des in d b de *première* espèce dans la théorie des surfaces algébrique « ete conduit à rechercher si certaines intégrales doubles peuvent r, cette théorie, un rôle analogue à celui que jouent les intégrales abéliennes de seconde espèce dans l'étude des courbes. Ce sont ces intégrales qu'il définit ici, sous le nom d'*intégrales doubles de seconde espèce*.

Hamy (M.). — Sur l'approximation des fonctions de grands nombres. (926-929).

Résumé des résultats obtenus par l'auteur, qui complètent ceux de M. Darboux et de M. Flamme, et sont susceptibles d'applications extrêmement nombreuses, notamment au développement approché de la fonction perturbatrice.

Guichard. — Sur les réseaux O associés. (929-931).

Schoute. — Sur les focales planes d'une courbe plane à un ou plusieurs axes de symétrie. (931-933).

Une courbe étant tracée sur un plan vertical V et admettant pour axe de symétrie l'intersection de ce plan V avec un plan horizontal H, on trouvera une focale plane (située dans H) par les opérations suivantes :

1° Mettre debout les normales de la courbe donnée en les faisant tourner de 90° autour de leurs intersections avec l'axe de symétrie;

2° Multiplier par $\sqrt{-1}$ les ordonnées du lieu des extrémités des normales érigées;

3° Tourner la nouvelle courbe en entier d'un angle de 90° autour de l'axe de symétrie, pour l'amener dans le plan H.

Riquier. — Sur l'existence des intégrales dans certains systèmes différentiels. (933-935).

Étude d'une classe étendue de systèmes différentiels pour lesquels les déve-

loppements des intégrales répondant à des conditions initiales données d'avance peuvent être construits *a priori* sans que l'on puisse, en général, affirmer leur convergence. Ces systèmes comprennent les systèmes *orthonomes* passifs, auxquels M. Riquier a pu ramener antérieurement les systèmes différentiels les plus généraux.

Poincaré. — Sur les périodes des intégrales doubles. (995-997).

Il s'agit des intégrales doubles de la forme

$$J = \iint \frac{P\,dx\,dy}{\sqrt{F - z}}$$

où P et F sont deux polynomes entiers en x et y et où z est un paramètre arbitraire. Si l'on introduit simultanément l'intégrale abélienne

$$j = \int \frac{P\,dx}{F_y}$$

où y est supposé lié à x par la relation

$$F = t = \text{const. arbitr.},$$

les périodes Ω dépendront des périodes ω de j par les relations

$$\Omega = 2 \int_{t_i}^{z} \frac{\omega\,dt}{\sqrt{t - z}}.$$

Si donc p est le genre de la courbe $F = t$ et si q désigne le nombre des points singuliers t_i de l'équation différentielle linéaire à laquelle satisfont les ω, le nombre des périodes Ω est en général égal à $2pq$.

Guichard. — Sur le problème de Ribaucour. (1013-1015).

Le Roux. — Sur une forme analytique des intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles à deux variables indépen-

Les systèmes en question sont ceux que M. Riquier a considérés dans sa dernière Communication (*systèmes orthoïques*). L'auteur montre aujourd'hui, par des exemples, que la méthode des fonctions majorantes ne s'applique pas toujours à ces systèmes.

Vessiot. — Sur une double généralisation des équations de Lie. (1019-1021).

Painlevé. — Sur les positions d'équilibre instable. (1021-1024).

Étude de l'instabilité dans le voisinage d'une position d'équilibre où la fonction des forces n'est pas maxima, notamment quand, aux environs de la position *isolée* d'équilibre $x = 0$, $y = 0$, la fonction des forces est du second ordre,

$$U = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \ldots$$

$\beta^2 - \alpha\gamma$ étant *nul*. Dans ce cas, quand U n'est pas maxima, l'équilibre est instable.

Bricard. — Sur le déplacement d'un plan dont tous les points dérivent des lignes sphériques. (1024-1026).

Quelles sont les conditions les plus générales dans lesquelles le déplacement d'un plan s'effectue de telle manière que tous ses points restent sur des sphères dont les centres appartiennent à un même plan?

La solution que M. Bricard a trouvée de ce problème fait connaître un système articulé formé de deux plans dont les points sont réunis deux à deux par des tiges rigides :

On marque dans un plan P deux points O et A et l'on élève Oz perpendiculaire sur P; on forme un système analogue (P', A', $O'z'$) tel que O'A' soit égal à OA. Laissant fixe le premier système, on déplace le second de telle manière que le point A' reste sur Oz, que la droite $O'z'$ passe constamment par le point A et que les deux plans P et P' fassent entre eux un angle invariable. Dans ces conditions, *les points du plan* P' *restent tous sur des sphères dont les centres appartiennent au plan* P.

Stekloff. — Le problème de la distribution de l'électricité et le problème de C. Neumann. (1026-1029).

L'existence de la densité d'une courbe superficielle sans action sur un point intérieur ne semblant démontrée que dans quelques cas particuliers, M. Stekloff la démontre et donne en même temps la solution du problème de C. Neumann pour les surfaces convexes S ayant partout leurs courbures finies et déterminées.

Picard (Ém.). — Sur les périodes des intégrales doubles de fonctions algébriques. (1068-1070).

L'auteur rappelle le point de vue auquel il s'est placé en instituant la théorie de ces intégrales et la façon dont il a obtenu leurs périodes. Il y a une ana-

logie assez complète entre les périodes des intégrales simples et celles des intégrales doubles : pour celles-ci, ce sont les cycles de certaines équations différentielles linéaires qui remplacent les cycles des fonctions algébriques d'une variable. Mais, dans l'étude des nombres invariants associés à ces théories il se présente des différences sensibles sur lesquelles il y aura lieu de revenir.

Painlevé. — Sur le problème des trois corps (et des n corps) où deux des corps se choquent au bout d'un temps fini. (1078-1081).

L'auteur étudie les conditions pour que, dans un système de n points s'attirant suivant la loi newtonienne, deux corps se choquent au bout d'un temps fini. Dans le cas de deux corps, les conditions sont algébriques, mais *dès que n dépasse 2, les conditions de choc sont transcendantes.* L'analyse de M. Painlevé prouve en outre que, *dans le cas du mouvement plan, la condition du choc ne saurait se traduire par une relation* $F = 0$, *où* F *soit algébrique par rapport aux vitesses et fonction uniforme* (*ou à un nombre fini de branches*) *des coordonnées.*

Mangeot (*S.*). — Sur un réseau conjugué particulier de certaines surfaces dérivées des surfaces du second ordre. (1083-1086).

Les surfaces de symétrie Σ d'une quadrique S sont parmi les surfaces Γ dont chacune est le lieu d'un point dont la distance à chaque plan principal de S est proportionnelle au produit des distances de ce point à deux points décrivant deux quelconques des courbes C dont les tangentes sont perpendiculaires à leurs polaires par rapport à la quadrique. Les surfaces Γ sont représentées par les formules

$$\log x_n = \int \frac{du}{f(u)\,[\varphi(u) + a_n]} + \int \frac{dv}{f_1(v)\,[\varphi(v) + a_n]} \qquad (n = 1, 2, 3).$$

et admettent pour réseau conjugué les deux familles de courbes $u =$ const. et $v =$ const. M. Mangeot établit quelques propriétés de ces surfaces, déjà considérées par M. Darboux, puis par M. Lie, relativement à l'équation linéaire

Si dans un système orthoïque passif, la cote première de chaque variable indépendante est égale à 1 (les cotes premières des diverses fonctions inconnues étant quelconques) les intégrales hypothétiques répondant à des conditions initiales arbitrairement choisies existent effectivement.

Les systèmes que concerne cet énoncé comprennent, comme cas très particulier, ceux de Mme Kowalewski.

Pellet. — Sur les surfaces applicables sur une surface de révolution. (1159-1160).

Démonstration de ce théorème :

« Soit $A^2\,du^2 + B^2\,dv^2$ le carré de l'élément linéaire d'une surface : supposons A et B fonctions de la courbure totale de la surface et le rapport $\frac{B}{A} = g$ variable. Si chacune des expressions

$$du^2 + g^2\,dv^2, \quad \frac{du^2}{g^2} + dv^2$$

est le carré de l'élément linéaire d'une surface à courbure constante, la surface donnée est applicable sur une surface de révolution; sinon la surface n'est pas applicable sur une surface de révolution, à moins que l'on ait $g = \varphi(au + bv)$, a et b étant des constantes. »

Lémeray. — Sur les équations fonctionnelles linéaires. (1160-1161).

L'auteur appelle ainsi les équations de la forme

$$f^m(x) + a f^{m-1}(x) + \ldots + h f(x) + kx = 0,$$

où la fonction inconnue est $f(x)$ et où l'on a par définition

$$f^m(x) = f[f^{m-1}(x)].$$

Il fait connaître la solution générale de ces équations dans le cas où les coefficients $a, \ldots, k$ sont constants, ce qui résout, comme cas particulier, le *problème de Babbage*.

THE MESSENGER OF MATHEMATICS, edited by J.-W.-L. GLAISHER. London and Cambridge, Macmillan and C° (1).

Tome XX; 1890-1891.

Mannheim. — Sur les normales aux coniques (1-2).

(1) Voir *Bulletin*, t. XVIII$_1$, p. 53.

Une conique et sa polaire réciproque, par rapport à un cercle de centre O, ont les mêmes normales issues de O. Conséquences.

Hammond. — Euclide et la loi associative. (3-4).

La démonstration de la loi $a(bc) = (ab)c$ se trouve, sous une autre forme, dans les *Éléments* (livre 7, prop. XVI, XVII, XVIII).

Greenhill. — Les lignes de Sumner dans les cartes de Mercator et stéréographiques. (4-21).

Les lignes de Sumner, dans une Carte, représentent les petits cercles de la sphère, considérés comme lieux des points pour lesquels un astre est à un moment donné à la même hauteur. L'observation de la hauteur d'un astre au moyen du sextant et la lecture du chronomètre fournissent ainsi un lieu du point où l'on se trouve. D'où l'intérêt de l'étude de ces lignes.

Pearson (K.). — Sur les expériences de Wöhler relatives aux vibrations. (21-37).

Cunningham (A.). — Sur la recherche des diviseurs. (37-45).

Mannheim. — Sur une parabole liée à une conique par certaines propriétés remarquables. (45-48).

Enveloppe des perpendiculaires à une sécante d'une conique qui passe par un point fixe, menées par les points où cette sécante rencontre la polaire de ce point.

Burnside (W.). — Sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes. (49-54).

[redacted]

Cayley. — Note sur l'équation modulaire de Schl r la transformation cubique. (59-60).

Burnside (*W*.). — Sur l'équation différentielle d'un coniques sphériques confocales. (60-63).

On retrouve l'équation d'Euler en prenant pour coordonnées sur la sphère les paramètres des génératrices rectilignes.

Cayley. — Note sur les racines neuvièmes de l'unité. (63).

$$a = \theta + \theta^8, \quad b = \theta^2 + \theta^7, \quad c = \theta^4 + \theta^5$$

sont racines de l'équation $x^3 + 3x + 1 = 0$.

Burnside (*W*.). — Sur une propriété des courbes isothermes planes. (64-68).

Relation linéaire entre le nombre de courbes limitant une aire, le nombre de points sur ces courbes où une fonction harmonique est maximum ou minimum, et le nombre des points doubles.

Cayley. — Sur deux invariants d'une fonction quadri-quadrique. (68-70).

Si l'on considère une forme homogène et du second degré par rapport à x, y d'une part, par rapport à u, w de l'autre, les deux discriminants seront des formes du quatrième degré, ayant les mêmes invariants du second et du troisième degré, invariants que l'illustre auteur forme explicitement.

Mathews (*G*.). — Déterminants irréguliers et formes sous-triplées. (70-74).

Démonstration et explication d'une assertion de Gauss (*Disquisitiones aritm.*, 306, VIII).

Cayley. — Sur un cas particulier de l'équation différentielle du troisième ordre de Kummer. (75-79).

Étude d'une solution particulière donnée par M. Goursat dans ses *Recherches sur l'équation de Kummer* (*Acta Soc. Sc. Fennicæ*, t. XV, p. 471).

Dixon (*A*.). — Sur la somme des cubes des coefficients du développement de $(1 - x)^m$. (79-80).

Tanner (*L*.). — Note sur la méthode de dérivation d'Arbogast. (81-82).

Tanner (*L.*). — Sur l'histoire de la règle d'Arbogast. (83-101).

Démonstration de cette règle; liste des Mémoires où elle est utilisée.

Johnston (*J.*). — Note sur les congruences de lignes. (102-103).

Mac-Mahon. — La théorie des partitions parfaites et de la composition des nombres. (103-119).

Une partition parfaite d'un nombre est une partition qui contient une et seulement une partition de tout nombre plus petit. Le major Mac-Mahon explique une loi d'après laquelle les partitions peuvent être énumérées dans tous les cas.

Cayley. — Correction à la Note sur l'équation modulaire de Schläfli pour la transformation cubique. (120).

Glaisher. — Théorème sur les sommes des puissances paires des nombres de la suite naturelle. (120-128).

Expression simple de $\frac{S_{2n}}{S_1}$ ($S_n = 1^n + 2^n + \ldots + i^n$) au moyen des nombres de Bernoulli.

Glaisher. — Relations récurrentes contenant les sommes des puissances des diviseurs des nombres. (129-135).

Voici deux de ces relations où $\sigma_r(n)$ désigne la somme des puissances $r^{\text{ièmes}}$ du diviseur de l'entier n.

$$\sigma_1(n) - 3\sigma_1(n-1) + 5\sigma_1(n-3) - 7\sigma_1(n-6) + 9\sigma_1(n-10) - \ldots$$
$$= [(-1)^{g-1}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + g^2)],$$

$$\sigma_3(n) - 3\sigma_3(n-1) + 5\sigma_3(n-3) - 7\sigma_3(n-6) + 9\sigma_3(n-10) - \ldots$$

[redacted]

Si $f(t)$ est un polynome du $n^{ième}$ degré, on a

$$\begin{vmatrix} D\frac{1}{f(t)} & D\frac{t}{f(t)} & D\frac{t^2}{f(t)} \\ D^2\frac{1}{f(t)} & D^2\frac{t}{f(t)} & D^2\frac{t^2}{f(t)} \\ \dots & \dots & \dots \\ D^3\frac{1}{f(t)} & D^3\frac{t}{f(t)} & D^3\frac{t^2}{f(t)} \end{vmatrix} = \frac{n!\,n-1!\,n-2!\dots}{[f(t)]^{n+2}}$$

le déterminant étant du $n^{ième}$ ordre.

Segar. — Sur la sommation de certaines séries. (142-1

Burnside (*W.*). — Sur un cas de
145).

Burnside (*W.*). — Note sur le théorème d'addition des fonct   ns hyperboliques. (145-148).

Démonstration géométrique.

Burnside (*W.*). — Correction à une Note précédente. (148).

Cayley. — Sur la notion d'une courbe plane d'ordre donné. (148-150).

Cayley. — Sur les épitrochoïdes. (150-158).

Cercle des inflexions; étude du cas où la roulette est une conique.

Hammond. — Quelques formules d'Arithmétique. (158-163).

Diverses propriétés où figurent le symbole $(x:a)$ qui représente 1 ou 0 suivant que $\frac{x}{a}$ est entier ou fractionnaire, le nombre des diviseurs d'un entier, leur somme, etc.

Burnside (***W.***). — Une propriété des substitutions linéaires. (163-166).

Deux inversions successives peuvent être remplacées par une substitution homographique portant sur une variable complexe.

Brill (***J.***). — Sur l'application de la méthode des polaires réciproques aux théorèmes de Statique. (166-171).

Application de la méthode de l'auteur (*Messenger*, 1887) pour représenter un nombre complexe par une droite (et non par un point).

Glaisher. — Note sur les sommes des puissances paires des nombres pairs ou impairs. (172-176).

Conséquence de la forme du coefficient de x^n dans le développement de $\sin kx \cot x$.

Glaisher. — Relations récurrentes contenant les sommets des puissances des diviseurs. (177-181).

Suite d'un Mémoire signalé plus haut.

Hammond. — Quelques formules d'Arithmétique.

Suite d'un Mémoire signalé plus haut.

Glaisher. — Sur les fonctions elliptiques de $\frac{K}{3}$. (191-192).

Valeurs de sn, dn u, de leurs inverses et de leurs quotients mutuels pour $u = \frac{K}{3}$, déduites de résultats dus à M. Forsyth et à M. Burnside.

Tome XXI; 1891-1892.

Sylvester. — Sur les suites arithmétiques. (1-19).

Si dans le produit des nombres entiers consécutifs

$$(m+1)(m+2)\ldots(m+n),$$

m est plus grand que $n-1$, ce produit contient un nombre premier non contenu dans la suite 1, 2, 3, ..., n.

Si ν est le nombre de nombres premiers contenu dans la suite 2, 3, ..., n on a

$$(m+1)(m+2)\ldots(m+n-\nu) > 1.2.3\ldots n.$$

[redacted]

Sur l'évaluation de $\varphi(r)+\varphi(r+2q)+\ldots+\varphi(n)$ quand l'o[illegible]t $\varphi(0)+\varphi(q)+\varphi(2q)+\ldots+\varphi(n)$ en fonction de n; par exemple, si [illegible]) est un polynome entier en n^2 et si l'on suppose

$$\varphi(0)+\varphi(2)+\varphi(4)+\ldots+\varphi(n)=\psi(n),$$

on aura

$$\varphi(1)+\varphi(3)+\varphi(5)+\ldots+\varphi(n)=\psi(n)-\frac{1}{2}\psi(0).$$

Rouse Ball. — Nombres de Mersenne. (34-40).

Liste des résultats connus sur le caractère premier ou composé des nombres 2^p-1, où p est premier, avec les références. Quelques résultats doivent être corrigés d'après des indications données plus loin (p. 121), indications où il convient de relever la référence à un Mémoire d'Euler dans les *Commentationes Arithmeticæ collectæ*, t. I, p. 2. Nombres parfaits.

Fujisawa. — Note sur une formule des harmoniques sphériques. (40-41).

En posant

$$\frac{1}{1-2\alpha\cos\gamma+\gamma^2}=Q+\ldots+Q_n\alpha^n+\ldots,$$

on a

$$2\cos n\gamma=Q_n-Q_{n-1}.$$

Anderson. — Note sur l'équilibre d'une surface fermée sous l'action de forces normales. (42-43).

Le théorème dû à M. Bertrand :

« Une surface fermée est en équilibre quand chaque élément ω est soumis à une force normale proportionnelle à $\omega\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)$, ρ_1, ρ_2 étant les rayons de courbures principaux »,

ne peut pas être généralisé en remplaçant $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}$ par une autre fonction de ρ_1, ρ_1.

Rogers. — Note sur les fonctions propres à représenter une substitution d'un nombre premier de lettres. (44-47).

Réduction des conditions données par M. Hermite (*Algèbre de Serret*, n° 476).

Glaisher. — Expression de la somme des cubes des diviseurs d'un nombre au moyen des partitions des nombres plus petits. (47-48).

Glaisher. — Relations récurrentes contenant les sommes des puissances des diviseurs. (49-64).

Suite des recherches contenues dans le Tome précédent.

Glaisher. — **Expressions pour les fonctions symétriques de I, G, E au moyen de q.**

En posant

$$I = E - K, \qquad G = E - k'^2 K,$$
$$i = \frac{2KI}{\pi^2}, \qquad g = \frac{2KG}{\pi^2}, \qquad e = \frac{2KE}{\pi^2},$$

l'auteur donne des expressions des premières fonctions symétriques (jusqu'au cinquième ordre) de i, g, h; par exemple

$$ig + ge + ie = -96 \sum n\,\sigma(n) q^{2n}.$$

$\sigma(n)$ est la somme des diviseurs de n.

Anderson. — Sur les centres de pression. (69-76).

Détermination du centre de pression pour quelques aires planes immergées dans un liquide homogène : triangle, quadrilatère, polygone régulier, cercle, demi-cercle, etc.

Richmund. — La somme des cubes des coefficients de $(1 - x)^{2n}$. (77-78).

Campbell. — Note sur la transformation simultanée de deux formes quadratiques. (78-83).

Cas où l'équation en λ a des racines égales.

Burnside. — Deux Notes sur la fonction pu de Weierstrass. (84-87).

L'une de ces Notes contient une démonstration très simple de la relation

[redacted]

Rouse Ball. — Nombres de Mersenne. (121).

Glaisher. — Note sur une formule de récurrence pour $\sigma($ 130).

La formule

$$\sigma(n) - 2\sigma(n-4) + 2\sigma(n-16) - 2\sigma(n-36) + \ldots = 0,$$

où $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs de n, et qui a été établie par l'auteur dans le Tome XX du *Quarterly Journal*, p. 116, est vraie pour tous les nombres impairs n qui ne sont pas la somme de trois carrés. D'autres rés ts concernent les nombres de représentations d'un nombre par deux, q carrés. Les divers résultats peuve es aux fonctions $\mathfrak{I}$.

Cayley. — Note sur une id pe (131-132).

Cayley. — Sur la non-existence d'un certain groupe de points. (132-133).

Il n'y a pas de système de sept points tels que toute cubique qui passe par ces sept points passe par un huitième point déterminé.

Cayley. — Sur la formule de Waring pour la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances des racines d'une équation. (133-137).

L'auteur montre en particulier comment l'expression de cette somme peut se déduire de la série de Lagrange.

Brill (J.). — Une propriété de l'équation de conductibilité de la chaleur. (137-139).

Si $f(x, y, z, t)$ est une solution de l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right);$$

$t^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2 t}} f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}, -\frac{1}{t}\right)$ est aussi une solution.

Tanner. — Sur quelques racines carrées de l'unité pour un module premier. (139-144).

Il s'agit de déterminer les expressions

$$F(x) = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Dx^{p-2},$$

telles que l'on ait $F(x) \equiv \pm 1 \pmod{p}$, pour toute valeur de x non divisible par le nombre premier p.

Segar. — Sur la sommation de certaines suites. (145-147).

Étude des sommes

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{c^{sr}}{u_r u_{r+1} u_{r+2} \cdots u_{r+2s}}, \quad \sum_{r=1}^{r=n} \frac{c^{sr}}{u_r u_{r+1} u_{r+2} \cdots u_{r+2s-1}},$$

où u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, ... forment une suite récurrente, avec l'échelle de relation $1 - bx + cx^2 = 0$.

Segar. — Sur un théorème de la théorie des déterminants dû à Jacobi. (148-157).

Propriétés de déterminants dont les éléments sont les sommes de produits homogènes de r lettres.

Campbell. — Note sur le nombre maximum de points arbitraires qui peuvent être choisis pour points doubles d'une courbe ou d'une surface de degré quelconque. (158-164).

Donner m points doubles et s points simples, pour déterminer une courbe de degré n équivaut à $3m + s$ conditions linéaires *indépendantes;* il y a exception pour $n = 2$, $n = 4$ (une droite double, une conique double), mais seulement pour ces cas. Théorème analogue pour l'espace.

Burnside. — Sur l'application du théorème d'Abel aux intégrales elliptiques de première espèce. (164-170).

Si l'on désigne par x_i, y_i ($i = 1, 2, \ldots, 4$) les points d'intersection de la quartique fixe

$$y^2 = \frac{ax^2 + 2bx + c}{Ax^2 + 2Bx + C},$$

avec l'hyperbole variable

$$y = \frac{mx + n}{\ldots},$$

[redacted]

Substitutions qui changent en elle-même la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}.$$

Application aux formes normales de Legendre, Weierstrass, Riemann.

Segar. — Sur le déterminant multinomial. (177-188).

Si l'on pose

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

en prenant les dérivées logarithmiques et en égalant les coefficients des puissances de x, on obtient aisément A_r sous la forme $\frac{A_0}{r!\,m!\,a_0^r} \times D$, D étant un déterminant du $r^{\text{ième}}$ ordre, que l'auteur appelle *multinomial*, et dont l'étude le conduit à plusieurs propriétés intéressantes.

Cunningham. — Sur le cercle des neuf points et l'axe orthocentral d'un quadrilatère. (188-191).

Segar. — Note sur une remarquable suite de nombres. (191).

Tome XXII; 1892-1893.

Kleiber (J.). — Sur une classe de fonctions qui se déduisent des intégrales elliptiques complètes, ou qui sont liées aux fonctions de Legendre. (1-44).

Considérons l'équation différentielle linéaire

$$(1) \qquad N\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0,$$

et supposons la mise sous la forme

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Lambda}\frac{d}{dy}\right) = Ly,$$

à toute solution y de l'équation (1) on peut associer une fonction η par la relation

$$\frac{dy}{dx} = \Lambda\eta,$$

qui entraînera la relation

$$\frac{d\eta}{dx} = Ly,$$

et satisfera aussi à une équation différentielle du second ordre; y est associé à η comme η à y.

Les deux fonctions hypergéométriques $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, $F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, x)$ sont associées si l'on a $\alpha + \alpha_1 = 0$, $\beta + \beta_1 = 0$, $\gamma + \gamma_1 = 1$.

Les fonctions (de k) K et $G = E - kk'^2$ sont associées. De même, dans les notations de Weierstrass, les fonctions $\omega\Delta^{\frac{1}{12}}, \eta_1\Delta^{-\frac{1}{12}}$ considérées comme fonctions de l'invariant J (*voir* HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 314).

L'auteur multiplie les exemples et donne quelques interprétations géométriques intéressantes.

Cayley. — Note sur les courbes orthogonales à un système de courbes planes. (45-46).

Segar. — Sur une inégalité. (47-51).

Généralisation d'inégalités signalées dans le Tome précédent; par exemple, en supposant

$$a > b > c > \ldots > l, \qquad m > n$$

et toutes les quantités positives, on a

$$a^m b^n + b^m c^n + \ldots + l^m a^n > a^n b^m + b^n c^m + \ldots + l^n a^m.$$

Osborn. — Note sur le numérateur d'une progression harmonique. (51-52).

Si p est premier le numérateur de $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1}$ est divisible par p^2.

Bich. — Un théorème sur les facteurs numériques. (52-55).

En supposant que l'on ait un nombre entier $x^2 = Ny + 1$, l'auteur donne un facteur de N sous forme d'un *continuant*.

Mansion. — Sur la loi des grands nombres de Poisson. (56).

Segar. — Déduction de certains déterminants d'autres déterminants de forme indéterminée. (57-67).

[redacted]

Glaisher. — Note sur les fonctions K_i et G_i de M. Klei
82).

Rectification de quelques-uns des résultats obtenus par M. Kleib

Rouse Ball. — Note sur un problème de la Théorie des
(82-83).

Application du théorème de M. Birch à un nombre de Mersenne.

Burnside. — Note sur une intégrale pseudo-elliptique. (83-89).

Détermination des intégrales du type

$$\int \frac{}{(}$$

où $R(x)$ est un polynome du quatriè[illegible]é, qui se réduisent à un logarith

Burnside. — Sur la division par 9 des périodes des fonctions elliptiques. (89-96).

Glaisher. — Sur certaines séries et intégrales définies. (97-108).

La valeur de la série

$$\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\left[1+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2!}x^2 + \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)(\beta+1)(\beta+3)}{4!}x^4+\ldots\right]$$
$$-\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\left[\alpha\beta x+\frac{\alpha(\alpha+2)\beta(\beta+2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha+2)(\alpha+4)\beta(\beta+2)(\beta+4)}{6!}x^5+\ldots\right]$$

peut être représentée par l'une ou l'autre des intégrales

$$4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-u^2-v^2-2xuv}u^\alpha v^\beta\,du\,dv$$
$$=\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+2}{2}\right)\int_0^\pi \frac{\left(\sin\frac{1}{2}\theta\right)^\alpha\left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)^\beta}{(1+x\sin\theta)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)}}\,d\theta$$
$$=2\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+2}{2}\right)\int_0^\pi \frac{\left(\sin\frac{1}{2}\theta\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)^{2\beta+1}}{(1-h\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)}}\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2^{\alpha+\beta}}\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+2}{2}\right)\int_0^{2K}\frac{\operatorname{sn}u(1-\operatorname{cn}u)^\alpha(1+\operatorname{cn}u)^\beta}{(\operatorname{dn}u)^{\alpha+\beta+1}}\,du;$$

α et β sont supposés plus grands que -1; x est compris entre -1 et $+1$; h.

le carré du module pour les fonctions elliptiques de la dernière intégrale, est égal à $\frac{1-x}{2}$. Les cas $\alpha = i - \frac{1}{2}$, $\beta = -i - \frac{1}{2}$; $\alpha = \beta$; $\alpha = 1$, $\beta = 2$, sont successivement étudiés par l'auteur.

Signalons en particulier les égalités

$$16\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s^4-t^4-2\lambda s^2 t^2} s^n t^n \, ds \, dt$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2^{n-2}} \int_0^K \left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}\right)^n du$$

$$= \Gamma^2\left(\frac{n+1}{4}\right)\left[1 + \frac{(n+1)^2}{2.4}\lambda^2 + \frac{(n+1)^2(n+3)^2}{2.4.6.8}\lambda^4 + \ldots\right]$$

$$- 4\Gamma^2\left(\frac{n+3}{2}\right)\left[\frac{1}{2}\lambda + \frac{(n+3)^2}{2.4.6}\lambda^3 + \frac{(n+3)^2(n+7)^2}{2.4\ldots10}\lambda^5 + \ldots\right],$$

où $n > 1$ et où $\lambda = k^2 - k'^2$, égalités dont il tire grand parti dans l'article suivant, pour l'étude de l'intégrale

$$P_n = \int_0^K \left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}\right)^n du,$$

qui vérifie la relation $\frac{dP_n}{dh} = \frac{n+1}{2} P_{n+2}$.

Glaisher. — Développements suivant les puissances de $k^2 - k'^2$. (109-158).

Outre les résultats que nous venons de mentionner, l'étude particulière des premières valeurs de n et d'autres résultats analogues concernant des intégrales où figure $\operatorname{cn} u$ au lieu de $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$, signalons encore ceux qui concernent des intégrales portant sur des fonctions elliptiques dont le module a des valeurs numériques déterminées; par exemple, la formule

[redacted]

dans le premier membre de laquelle le carré du module est $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} x \cos\psi$, et d'où M. Glaisher tire un grand nombre d'identités intéressantes.

Glaisher. — Valeurs d'intégrales en fonction de k^2. (145-258).

La plupart des résultats contenus dans ce nouvel article résultent de la relation

$$\int_0^K \operatorname{sn}^m u \operatorname{cn}^n u \operatorname{dn}^p u \, du$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)} \left[1 - \frac{(m+1)(p-1)}{2(m+n+2)} k^2 + \frac{(m+1)(m+3)(p-1)(p-3)}{2.4(m+n+2)(m+n+4)} k^4 - \ldots\right].$$

Sylvester. — Note sur un problème de neuf écolières. (159-260).

Segar. — Sur une suite de points donnés par des suites récurrentes.

Knight. — Limites de l'expression $\frac{x^p - y^p}{x^q - y^q}$. (165-171).

Pourvu que x, y soient positifs, p et q réels, cette expression est comprise entre $\frac{p}{q} x^{p-q}$ et $\frac{p}{q} y^{p-q}$: démonstration élémentaire.

Segar. — Sur les racines de certains continuants. (171-181).

On sait que les mathématiciens anglais appellent *continuant* un déterminant $|b_{ij}|$ dont les éléments sont nuls lorsque la différence entre i et j est plus grande que 1; l'auteur examine les équations en λ obtenues en égalant à 0 les continuants dont les éléments non nuls sont de la forme

$$b_{ii} = \lambda a_{ii} + a_i^2, \qquad b_{i,j} = \lambda a_{ij},$$

ou

$$b_{ii} = \alpha_i^2, \qquad b_{i,i-1} = a_{i,i-1}, \qquad b_{i,i+1} = \lambda a_{i,i+1};$$

la première équation a toujours ses racines réelles; la seconde a ses racines réelles et positives si $a_{i,i-1}$ et $a_{i-1,i}$ sont de même signe quel que soit i; ses racines réelles et négatives si $a_{i,i-1}$ et $a_{i-1,i}$ sont de signes contraires. On peut en tirer des conclusions lorsque l'ordre du continuant devient infini : c'est ce que fait l'auteur, en particulier pour la fonction $J_m(x)$ de Bessel, qui a toutes ses racines réelles.

Segar. — Note sur la théorie des fonctions. (181-182).

Application aux résultats précédents relatifs à $J_m(x)$ d'un théorème de Laguerre (*Comptes rendus*, t. XCV, p. 828).

Cayley. — Sur un cas de l'involution $AF + BG + CH = 0$, où A, B, C, F, G, H sont des formes quadratiques ternaires. (182-186).

Les seize points d'intersection des courbes $AF = 0$, $BG = 0$ sont sur la courbe $CH = 0$; supposons qu'il y en ait huit sur C et huit sur H que l'on désignera par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. L'auteur étudie la forme de l'identité précédente en supposant que les coniques A, F, B, G passent respectivement par les points 1234, 5678, 1256, 3478.

Cayley. — Sur le développement de $(1 + n^2 x)^{\frac{m}{n}}$. (186-190).

En supposant irréductible la fraction $\frac{m}{n}$, ce développement a ses coefficients entiers : la démonstration est fondée sur ce théorème de M. Segar (*Messenger*, p. 59; 1892) : « Si α, β, γ, ... sont r nombres entiers positifs, $\zeta^{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ est divisible par $\zeta^{\frac{1}{2}}(0, 1, 2, \ldots, r-1)$. [M. Cayley désigne par le symbole $\zeta^{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ le produit des différences des nombres α, β, γ, ...]. Il donne d'ailleurs une nouvelle démonstration du théorème de M. Segar.

Burnside. — Note sur les substitutions linéaires. (190-192).

Tome XXIII; 1893-1894.

Allan Cunningham. — Nombre des $n^{\text{ièmes}}$ ternaires propres. (1-8).

Il s'agit de déterminer le nombre des formes ternaires du $n^{\text{ième}}$ ordre *incomplètes* (c'est-à-dire dans lesquelles il manque des termes) qui sont *propres*, c'est-à-dire indécomposables.

[redacted]

Cayley. — Sur le cercle des neuf points d'un triangle pl
27).

Rogers. — Note sur une transformation des séries de Hei
31).

En posant (HEINE, *Kugel-Functionen*, t. I, Chap. II)

$$\varphi(a, b, c, q, x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(1-a)(1-aq)\ldots(1-aq^{r-1})(1-b)(1-bq)\ldots(1-bq^{r-1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^r)(1-c)(1+cq)\ldots(1-cq^{r-1})} x^r,$$

le terme qui correspond à $r = 0$ étant 1, la

$$\frac{1}{1-c}\varphi\left(\frac{cq}{x}, q, cq, q,\right.$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{1-cq}{(1-c)(1-x)} + \sum_{r=0}^{r=\infty} c^r q^{r^2} \frac{(x-cq)(x-cq^2)\ldots(x-cq^r)(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^r)}{(1-c)(1-cq)\ldots(1-cq^r)(1-x)(1-xq)\ldots(1-xq^r)}(1-cq^{2r+1}).$$

Cette identité contient, comme cas particuliers, un assez grand nombre d'identités de la théorie des fonctions elliptiques.

Segar. — Preuve d'un théorème de la théorie des nombres. (31).

Démonstration directe du théorème d'Arithmétique signalé t. XXII, p. 59. *Voir* plus haut.

Cayley. — Valeur numérique de $\Gamma(1+i)$. (36-39).

Burnside. — Note sur la théorie des fonctions d'une variable réelle. (40-42).

La fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{1}{1 + a^{2n}(x - \operatorname{tang} na)^2} \qquad (a > 1)$$

qui est continue pour toute valeur de x, qui admet des dérivées de tout ordre, ne peut pas être développée en une série entière en $x - x_0$.

Cayley. — Sur l'intégrale de Richelot de l'équation différentielle $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$. (42-47).

Comme cas particulier dans son Mémoire [*Einige neue Integralgleichungen des Jacobi'schen Systeme Differentialgleichungen* (*Crelle*, t. 26)], Richelot

donne comme intégrale de l'équation précédente, où

$$X = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,$$

la formule

$$\left[\frac{\sqrt{X}(\theta - y) - \sqrt{Y}(\theta - x)}{x - y}\right]^2 = A(\theta - x)(\theta - y) + \Theta + e(\theta - x)^2(\theta - y)^2$$

où A θ, sont des constantes arbitraires, et où $\Theta = a + b\theta + c\theta^2 + d\theta^3 + e\theta^4$ M. Cayley montre comment ces deux constantes se réduisent à une.

Segar. — Limites de l'expression $\frac{x^p - y^p}{x^q - x^q}$. (47-49).

Les résultats démontrés par M. Knight (*Messenger*, t. XXII, p. 165-171) sont contenus dans ceux que l'auteur a donnés t. XXII, p. 47. On obtient une proposition plus générale en partant de la règle relative au signe du déterminant

$$\begin{vmatrix} a^\alpha & b^\alpha & c^\alpha \\ a^\beta & b^\beta & c^\beta \\ a^\gamma & b^\gamma & c^\gamma \end{vmatrix}$$

(*Messenger*, t. XXII, p. 57, *voir* plus haut), où a, b, c sont positifs; on en déduit, en supposant c non compris entre a et b, que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha b^\alpha & b^\alpha & c^\alpha \\ \beta b^\beta & b^\beta & c^\beta \\ \gamma b^\gamma & b^\gamma & c^\gamma \end{vmatrix}$$

a le signe de $(\gamma - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \alpha)$.

Burnside. — Note sur la théorie des groupes. (50-56).

Exemple de la méthode exposée par M. Dyck (*Math. Ann.*, t. XX). Si P, Q sont deux symboles non commutatifs, tels que l'on ait $P^3 = 1$, $Q^3 = 1$, $(PQ)^2 = 1$, [redacted]

Rouse Ball. — Carrés magiques pairs. (65-69).

Taylor. — Hyperbole équilatère liée à un triangle. (69-70).

Elle passe en particulier par les quatre centres des cercles tangents.

Irving Stringham. — La résolvante cubique de Cayley et la cubique réduite. (71-72).

Relation homographique entre les racines de la résolvante (Cayley)

$$\theta^3 - M(\theta - 1) = 0$$

et de l'équation $4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3 = 0$, relatives à une équation du quatrième degré.

Michell. — Une carte pour la fonction Z; un problème de condensateurs. (72-78).

Représentation conforme $z = Z(w + iK')$, où Z est la fonction de Jacobi; application à la théorie des condensateurs.

Cayley. — Sur la surface d'ordre n qui passe par une cubique donnée. (79-80).

La cubique est supposée donnée sous la forme

$$x : y : z : w = 1 : \theta : \theta^2 : \theta^3;$$

l'équation de la surface d'ordre n qui la contient est

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ x & y & z \\ y & z & w \end{vmatrix} = 0,$$

où A, B, C sont les fonctions générales d'ordre $n - 2$.

Gallop. — Sur le point cardinal d'un instrument d'optique. (81-88).

Exposition élémentaire des propriétés fondamentales du point cardinal dans un instrument d'optique ayant un axe de symétrie.

Dixon. — Note sur le problème de Kirkman. (98-99).

Burnside. — Sur la courbe d'intersection de deux quadriques. (89-91).

Invariant absolu des fonctions elliptiques qui servent à représenter cette intersection, pour deux quadriques générales.

Elliott. — Sur le fait que les semi-invariants d'un quantic binaire sont des invariants de ce quantic et de ses dérivées. (91-94).

Démonstration de ce fait, établi par M. Kempe au moyen de considérations graphiques (*Proc. Lond. Math. Soc.*, 1893).

Dixon. — Sur la relation entre une cubique et la transformation du troisième degré de la théorie des fonctions elliptiques. (94-96).

Sur les cordes de la cubique

$$x : y : z : t = 1 : \operatorname{sn}^2 u : \operatorname{sn}^4 u : \operatorname{sn}^6 u$$

qui rencontrent une droite.

Glaisher. — Note sur la loi de fréquence des nombres premiers. (97-107).

Par des raisonnements élémentaires très curieux, mais dont il est le premier à signaler le défaut de rigueur, M. Glaisher arrive à la conclusion suivante : si $\varphi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à x (ou plutôt une expression asymptotique de ce nombre) et si l'on pose

$$\chi(x) = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dx}},$$

$\chi(x)$ doit vérifier l'équation fonctionnelle

$$\chi(x^2) = 2x^2\chi(x)\chi'(x^2),$$

qui est effectivement vérifiée pour $\chi(x) = \log x$. Dans ces raisonnements intervient l'expression

[redacted]

Burnside. — Sur une propriété de certains détermin[illegible] 114).

Si dans un déterminant du $n^{ième}$ ordre les lignes successives [illegible] permutations d'un groupe abélien d'ordre n, ce déterminant est le [illegible] facteurs linéaires.

Hobson. — Sur un théorème du Calcul différentiel. (115-1[illegible]

Sur l'opération symbolique

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right) \mathrm{F}[\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p)],$$

où f_n est une fonction homogène entière [illegible] opérateurs.

Hill. — Sur le lieu des points d'infle[illegible] 'un s[illegible] eme [illegible] planes dont l'équation est une fonction entière des coo[illegible] et d'un paramètre arbitraire. (120-129).

Si $E = 0$ est le résultat de l'élimination du paramètre a entre $f(x, y, a) = 0$ et le hessien $H = 0$ de f, on a

$$E = FN^6C^8;$$

$N = 0$ représente le lieu des points doubles, $C = 0$ le lieu des points de rebroussement.

Campbell. — Sur la ligne brisée la plus courte allant d'un point à un autre sur une quadrique réglée. (130-136).

Cette étude est faite sur l'hyperboloïde

$$x = a\mathrm{K}\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v,\ y = \frac{b}{\mathrm{K}'}\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v,\ z = \frac{c\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v.$$

Le chemin est supposé formé de n segments.

Burnside. — Sur une application de la théorie des groupes au problème de Kirkman. (137-143).

Campbell. — Sur le mouvement d'un corps solide qui n'est soumis à aucune force extérieure. (144).

Glaisher. — Sur certains produits numériques dans lesquels les exposants dépendent des facteurs. (145-175).

Expression asymptotique de

$$\frac{2^2 5^5 8^8 11^{11} \ldots (3n+2)^{3n+2}}{1^1 4^4 7^7 10^{10} \ldots (3n+1)^{3n+1}}$$

et problèmes analogues.

Glaisher. — **Sur des séries contenant les inverses de puissances paires de nombres sous-pairs ou sur-pairs.** (176-184).

La plupart des résultats obtenus par l'auteur se déduisent de l'identité

$$\log\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\left(\frac{2+x}{2-x}\right)\cdots\left(\frac{n+x}{n-x}\right)\right] = 2S_1 x + \frac{2}{3}S_3 x^3 + \frac{2}{5}S_5 x^5 + \ldots$$

et de celles qu'on en déduit par différentiation, en donnant à x des valeurs particulières.

Brill. — **Seconde Note sur une extension de la théorie des fonctions d'une variable complexe.** (185-194).

Voir *plus haut*. Cas où l'équation dont on part est du second degré. Interprétation géométrique.

Tome XXIV; 1894-1895.

Glaisher. — **Sur la constante qui entre dans l'expression de** $1^1.2^2.3^3.\ldots n^n$. (1-16).

Dans une Note antérieure, l'auteur a établi la formule approchée

$$1^1.2^2.3^3\ldots n^n = A n^{\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{12}} e^{-\frac{1}{4}n^2},$$

et a donné la valeur numérique de $A = 1,28242713o\ldots$; le logarithme de A est lié à la constante d'Euler γ et aux sommes S_r des séries $1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \ldots$, par la relation

$$\log A = \frac{3}{8} - \frac{\gamma}{6} - \frac{S_3}{3.4.5} - \frac{S_5}{5.6.7} - \frac{S_7}{7.8.9} - \ldots.$$

Dans la présente Note, M. Glaisher considère diverses séries où figure A; elles

en posant

$$\varphi(m) = \Pi f(p, \alpha), \qquad \varphi(n) = \Pi f(p, \beta),$$
$$\Phi(m) = \Sigma \mathrm{F}(p, \alpha), \qquad \Phi(n) = \Sigma \mathrm{F}(p, \beta);$$

on suppose les nombres m, n mis sous la forme

$$m = \Pi p^{\alpha}, \qquad n = \Pi p^{\beta},$$

où p représente un nombre entier et où α, β peuvent être nuls. La fonction $f(p, \alpha)$ est arbitraire, sauf la condition qu'elle se réduise à 1 pour $\alpha = 0$; de même la fonction $\mathrm{F}(p, \alpha)$, sauf la condition qu'elle se réduise à 0 pour $\alpha = 0$. Cas où m et n sont premiers.

Tsuruta. — Construction du cylindroïde. (20).

Bryan. — Note sur un théorème de Dynamique (21-23).

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les coordonnées générales d'un système dynamique, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les vitesses correspondantes; soient $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les quantités analogues dans un autre système de coordonnées, pour la même valeur de t; le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(b_1, b_2, \ldots, b_n, a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\partial(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)}$$

est égal à 1.

Cayley. — Note sur les équations de Plücker. (23).

Glaisher. — Note sur une relation entre des constantes analogues à la constante d'Euler. (24-27).

Si l'on pose

$$\gamma\mu = \lim_{x=\infty}\left[1 + \frac{1}{2^{\mu}} + \frac{1}{3^{\mu}} + \ldots + \frac{1}{x^{\mu}} - \frac{x^{1-\mu}}{1-\mu}\right] (0 < \mu < 1),$$

on aura

$$\frac{\gamma 1-\mu}{\gamma\mu} = \frac{2\Gamma(\mu)\cos\frac{1}{2}\mu\pi}{(2\pi)^{\mu}}$$

(*Cf.* SCHLÖMILCH, *Zeitschrift für Math. u. Phys.*, t. XXIII, p. 135).

Glaisher. — Expressions de valeurs de la fonction Γ au moyen d'intégrales elliptiques complètes. (27-47).

La fonction $\Gamma(x)$, pour les valeurs de x

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \quad \frac{1}{6}, \frac{5}{6}; \quad \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}; \quad \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12},$$

s'exprime au moyen d'intégrales elliptiques complètes, pour les modules

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2}-1; \quad 2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}.$$

M. Glaisher revient, en outre, sur les séries représentant $\int_0^K \mathrm{sn}^n u\,du$, etc. qu'il a considérées dans le Tome XXII du *Messenger*.

Cayley. — Identité trigonométrique. (49-51).

Burnside. — Sur un système de congruences linéaires. (51-58).

Sur les q congruences cycliques

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_q x_q \equiv 0 \\ a_0 x_1 + a_1 x_2 + \ldots + a_{q-1} x_q \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_2 x_1 + a_3 x_2 + \ldots + a_1 x_q \equiv 0 \end{array}\right\} \bmod. p,$$

p, q étant premiers : degré d'indétermination du système, forme de la solution ; relations qui doivent exister entre les a pour qu'il y ait une solution.

Mannheim. — Propriété nouvelle de l'indicatrice. (59-60).

Les rayons de courbure en un point O de la surface (S) des courbes de contour apparent de (S) obtenues sur des plans menés par la normale en O, au moyen de projetantes respectivement perpendiculaires à ces plans, sont proportionnels aux carrés des distances de O aux tangentes de l'indicatrice de S en ce point, tangentes qui sont parallèles à ces projetantes.

Ferrers. — Preuve du théorème de Miquel. (60-66).

Workmann. — Note sur les facteurs de certains nombres. (67).

Rawson. — Le théorème de M. Ferrers sur les nombres premiers. (68-69).

[redacted]

sont les symboles des n opérations d'un groupe abélien, les p^2 q

$$a + bS + cT + \ldots + dU,$$

où les entiers $a, b, \ldots, d$ sont réduits suivant le module premi
un système fini qui se reproduit par addition, soustraction, n
Toutefois, le produit de deux facteurs peut être nul sans que
soit.

Il examine en détail le cas où le groupe abélien se réduit à de o ions
1, S, telles que $S^2 = 1$, et en conclut la formation d'un groupe d'ordre

$$N = \frac{1}{4} p^2 (p^2 - 1)^2$$

avec un sous-groupe d'ordre $\frac{1}{2}p$ opéra-
tions du groupe abélien sont
un nombre premier, exige la so
haut dans le présent Volume du

Mathews. — Note relative au dernier théorème de Fermat. (97-99).

Laurence. — Décomposition des nombres en facteurs. (100-109).

L'auteur montre comment on peut se servir d'une Table de quarts de carrés pour trouver deux facteurs d'un nombre N dont le rapport soit voisin de $\frac{l}{m}$, l et m étant des nombres donnés.

Burnside. — Note sur une substitution ternaire de déterminant un à coefficients entiers. (109-112).

Une telle substitution peut être engendrée par la répétition et la composition des substitutions

$$\begin{aligned} x' &= x + y, & x' &= x, \\ y' &= y, & y' &= z, \\ z' &= z, & z' &= z. \end{aligned}$$

Brill. — Sur une certaine transformation ponctuelle dans le plan. (113-123).

La transformation ponctuelle étudiée par l'auteur, qui contient comme cas particulier une transformation qu'il a considérée dans le Tome précédent, est définie par deux fonctions X, Y de x, y qui vérifient des équations de la forme

$$b \frac{\partial X}{\partial x} + d \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0,$$
$$a \frac{\partial X}{\partial x} + c \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} = 0,$$

où a, b, c sont des constantes, en sorte que les coefficients angulaires des tan-

gentes aux deux courbes $X = \text{const.}$, $Y = \text{const.}$ qui passent par un point x, y soient liés par une relation de la forme

$$am_1 m_2 - bm_1 - cm_2 + d = 0.$$

Glaisher. — Sommation de séries dans lesquelles le $r^{\text{ième}}$ terme est l'inverse du produit des termes du $r^{\text{ième}}$ système de n termes consécutifs d'une progression arithmétique. (124-170).

En posant

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \qquad \psi(x, \mu) = \log \mu - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \ldots - \frac{1}{x+\mu},$$

en décomposant en éléments simples la fraction qui figure dans le premier membre sous le signe $\sum$ on trouve aisément la relation

$$n! \sum_{r=0}^{r=\mu} \frac{1}{(x+rn)(x+rn+1)\ldots(x+rn+n-1)}$$
$$= -\psi\left(\frac{x}{n}, \mu\right) + A_1\psi\left(\frac{x+1}{n}, \mu\right) - A_2\psi\left(\frac{x+2}{n}, \mu\right) + \ldots$$
$$+ (-1)^n \psi\left(\frac{x+n-1}{n}, \mu\right),$$

où $1, A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}, 1$ sont les coefficients du développement de $(1+x)^{n-1}$; en supposant que μ augmente indéfiniment, et en posant $x = \frac{a}{c}$, on obtient la relation

$$n!\,c^n \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{(a+rnc)(a+rnc+c)\ldots(a+rnc+nc-c)}$$
$$= -\psi\left(\frac{a}{nc}\right) + A_1\psi\left(\frac{a+c}{nc}\right) - A_2\psi\left(\frac{a+2c}{nc}\right) + \ldots$$

[redacted]

Lloyd Tanner. — Notes sur les substitutions automorphes des formes quadratiques binaires. (180-189).

L'auteur traite deux points de cette théorie : d'abord la définition des substitutions automorphes propres et impropres. Ces dernières étant caractérisées par ce fait qu'une puissance de la matrice correspondante est égale à un : cette définition, qui équivant d'ailleurs à celle de Dirichlet, conduit à une interprétation géométrique simple. En second lieu, M. Tanner montre l'identité essentielle de la théorie des substitutions automorphes avec celle des unités dans la théorie des nombres généralisés. Le rôle de l'équation de Pell apparaît ainsi nettement.

Mannheim. — Sur le cercle de courbure de l'ellipse. (190).

Burnside. — Correction à un Mémoire antérieur. (191).

Tome XXV; 1895-1896.

Bickmore. — Sur les facteurs nnmériques de $a^n - 1$. (1-44).

L'auteur a réuni dans ce travail d'ensemble les diverses propositions d'Algèbre et d'Arithmétique qui ont servi à déterminer ces facteurs : il a mis à la fin une Table qui donne les facteurs premiers de a^n-1 de $n=1$ jusqu'à $n=50$ pour $a=2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12$. Cette Table comporte naturellement quelques lacunes.

Osborn. — Quelques propriétés des restes quadratiques des nombres. (45-47).

Mansion. — Sur une formule de Newton. (48).

Sur la formule approchée

$$x = \sin x \frac{14 + \cos x}{9 + 6\cos x}.$$

Brill. — Note sur l'application de l'Analyse et de la Géométrie. (49-59).

Sur les propriétés de la représentation par un point x, y de la quantité complexe $y + \alpha x$, où α est une racine d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré. Cas d'une équation du second et du troisième degré.

Morgan Jenkins. — Sur une règle simple pour déterminer le signe d'un terme donné d'un déterminant et sur quelques problèmes où intervient cette règle. (60-68).

Sur la décomposition d'une substitution en cycles.

Osborn. — Une propriété des nombres premiers. (68-69).

Mathews. — Sur la représentation des entiers comme sommes de puissances. (69-71).

Pour n très grand le nombre de solutions entières de l'équation

$$x_1^p + x_2^p + \ldots + x_r^p = n$$

est asymptotiquement proportionnel à $n^{\frac{r-d}{p}}$.

Lloyd Tanner. — Note sur le théorème de Vandermonde. (71-73).

Burnside. — Sur deux théorèmes de Cinématique élémentaire. (74-76).

Walker. — Quelques formules pour le changement de l'origine dans les fonctions de Bessel. (76-80).

Forsyth. — Géodésiques sur un sphéroïde aplati. (81-124).

Étude de la trigonométrie sur un sphéroïde aplati. Les formules exactes, contenant des fonctions elliptiques, coïncident au fond avec celles qu'a données Jacobi dans un Mémoire posthume. L'auteur en déduit des formules approchées, applicables aux problèmes de Géodésie, où il conserve la seconde puissance de l'aplatissement. Signalons, par exemple, l'expression

$$\frac{S_{12}}{a} = v_1 - v_2 + \varepsilon\left[\frac{3}{4}\cos^2\alpha_0(\sin 2v_2 - \sin 2v_1) - \frac{1}{2}(v_2 - v_1)\cos^2\alpha_0\right]$$

[redacted]

où $A = (p \operatorname{séc}^2 \varphi_0 + 1)(p' \operatorname{séc}^2 \varphi_0 - 1)$

$$p = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(l_2 + l_1)}{\cos l_1 \cos l_2}, \qquad p' = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(l_2 + l_1)}{\cos l_1 \cos l_2},$$

et où v_1 et v_2, φ_1', φ_2' sont donnés par les relations

$$\cos v_1 = \frac{\sin l_1}{\cos \alpha_0}, \qquad \cos v_2 = \frac{\sin l_2}{\cos \alpha_0}$$

$$\cos \varphi_1' = \operatorname{tang} \alpha_0 \operatorname{tang} l_1, \qquad \cos \varphi_2' = \operatorname{tang} \alpha_0 \operatorname{tang} l_2.$$

M. Forsyth donne une application numérique.

Baker. — Note sur la fonction Γ. (125-127).

Démonstration simple des propriétés fondamentales.

Nanson. — Conditions pour le maximum ou le minimum d'une fonction d'un nombre quelconque de variables non indépendantes pour un point stationnaire. (129-136).

Les conditions nécessaires et suffisantes, dans le cas d'une fonction de variables indépendantes ont été données en 1872 par M. Williamson, en supposant que le hessien n'est pas nul au point stationnaire. L'auteur résout le même problème dans le cas où les variables sont liées par des équations données.

Nanson. — Hessien d'une fonction implicite. (137-138).

Nanson. — Changement des variables indépendantes dans le hessien d'une fonction d'un nombre quelconque de variables. (139-145).

Townsend. — Un problème de Géométrie. (145-157).

Détermination des 32 points où la ligne double de la développable lieu des tangentes à l'intersection de deux quadriques rencontre cette intersection.

Burnside. — Sur les groupes doublement transitifs de degré n et d'ordre $n(n-1)$. (147-153).

L'auteur montre que l'on doit avoir $n = p^m$, p étant un nombre premier, et que les substitutions qui déplacent toutes les lettres forment un groupe abélien, d'ordre p^m, dont toutes les substitutions sont d'ordre p. Après avoir étudié ce groupe en général, l'auteur considère particulièrement le cas où l'on a $m = 2$ ou 3.

Hill. — Démonstration condensée et généralisation du théorème de Vandermonde. (154-156).

Il s'agit du développement d'une factorielle par une formule analogue à celle du binome. L'auteur donne la généralisation correspondant au développement d'un polynome.

Osborn. — Addition à la Note sur les restes quadratiques des nombres premiers. (157).

L'auteur indique une démonstration élémentaire très simple pour le nombre de classes de formes de déterminant — N, pour les nombres premiers de la forme $8m - 1$ ou $8m - 3$.

Nanson. — Sur les conditions pour qu'une forme quadratique soit définie, quand les variables sont liées par des relations linéaires données. (157-160).

L'auteur déduit ces conditions de celles qu'a données M. Williamson dans le cas des variables indépendantes; elles résultent aussi de la formule générale de décomposition en carrés qu'a donnée M. Darboux dans le Tome XIX du *Journal de Liouville*, 2e série.

Nanson. — Transformation de séries. (160).

Forsyth. — Points conjugués sur les géodésiques d'un sphéroïde aplati. (161-169).

Le conjugué d'un point d'une ligne géodésique est l'intersection de cette géodésique avec la géodésique infiniment voisine passant par ce point. Il termine la portion de la géodésique comme ligne minimum. M. Forsyth montre, en partant des formules établies dans un article précédent, comment on peut déterminer ce point exactement, et en négligeant la seconde puissance de l'aplatissement.

Elliott. — Sur les facteurs linéaires d'une forme du quatrième

[redacted]

Elliott. — Note sur une classe d'expressions qui sont des exactes. (173-176).

Si $y, y_1, y_2, \ldots$ forment une série indéfinie de lettres, si l'on c opérateurs

$$\Omega = y\frac{\partial}{\partial y_1} + 2y_1\frac{\partial}{\partial y_2} + 3y_2\frac{\partial}{\partial y_3} + \ldots$$

$$O = y_1\frac{\partial}{\partial y} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + y_3\frac{\partial}{\partial y_2} + \ldots,$$

si b est une fonction entière et homogène de degré i de quelqu des lettres $y, y_1, y_2, y_3, \ldots$, l'expression

$$\left(1 - \frac{1}{i} O\Omega + \frac{1}{i^2} \ldots + \ldots\right.$$

est nulle, ou bien est un semi-inv $y_1, \ldots$ comme une fonction arbitraire de x et $y_1, y_2, \ldots$ comme les dérivées première, seconde, ... de cette fonction, l'expression précédente doit être nulle pour que G soit une dérivée exacte. Cette condition est nécessaire et suffisante. Cette Note fait suite à un article de l'auteur inséré dans le Tome XXVI des *Proc. of the London Math. Soc.*

Brill. — Sur un système de fonctions qui se déduisent de la fonction exponentielle. (176-180).

Généralisation des sinus et cosinus hyperboliques.

Scott (Miss). — Note sur les cubiques équiharmoniques. (181-185).

Outre quelques observations générales sur les transformations birationnelles, cette Note contient la remarque suivante, dont l'auteur tire des conséquences géométriques intéressantes : En partant de la courbe

$$f = x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

et en faisant la transformation

$$\xi : \eta : \zeta = x^2 : y^2 : z^2,$$

on obtient la transformée dans les plans des ξ, η, ζ

$$\varphi = \xi^6 + \eta^6 + \zeta^6 - 2\eta^3\zeta^3 - 2\zeta^3\xi^3 - 2\xi^3\eta^3$$

à laquelle correspond, dans le plan des x, y, z, la courbe

$$(x^3 + y^3 + z^3)(-x^3 + y^3 + z^3)(x^3 - y^3 + z^3)(x^3 + y^3 - z^3) = 0.$$

Glaisher. — Correction d'une erreur contenue dans le Mémoire sur des produits numériques dans le Tome XXIII. (186).

Burnside. — Sur les groupes doublement transitifs de degré 2^m et d'ordre $2^m(2^m - 1)$. (187-189).

Les opérations A et S satisfaisant aux relations

$$A^2 = 1, \quad S^i = 1, \quad AS^{-1}AS = S^{-a}AS^{a}$$

engendrent un groupe dont l'ordre divise $2^n i$.

Roberts. — Sur les centres de similitudes de certains couples de cercles. (190-192).

Si l'on considère six tangentes à une conique, deux triangles formés par trois de ces droites et les trois autres, les cercles d'un couple sont inscrits dans ces triangles.

Tome XXVI : 1896-1897.

Bickmore. — Sur les facteurs entiers de $a^n - 1$. (1-38).

Compléments et corrections au Mémoire du Volume précédent.

Gallop. — Les images électrique et magnétique d'un point multiple dans une sphère. (39-52).

Un potentiel harmonique de degré négatif peut être regardé comme dû à un point multiple formé par l'assemblage de pôles infiniment voisins. Si une sphère au potentiel zéro est placée dans un champ donné de force, le potentiel de l'électricité induite en un point extérieur peut être regardé comme dû à un certain nombre de points multiples au centre de la sphère. Si deux ou plusieurs sphères se trouvent dans le champ, il est nécessaire d'avoir les images successives de ces points multiples pour déterminer complètement la distribution du potentiel. Tel est le problème que traite l'auteur.

Dixon. — Démonstration projective de la propriété du rapport [redacted]

ces conditions peuvent s'exprimer en disant que l'équation

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}-\lambda & b_{n1} & \dots & b_{nm} \\ b_{11} & \dots & b_{n1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1m} & \dots & b_{nm} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

a toutes ses racines de même signe.

Nanson. — L'équation aux périodes d'un système oscill [illegible] l- tour d'une position d'équilibre [illegible]

Si la forme quadratique $\sum a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ est [illegible] l'équation en λ

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda+b_{11} & \dots & a_{1n}\lambda+b_{1n} & c_{11} & \dots & c_{1m} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda+b_{n1} & \dots & a_{nn}\lambda+b_{nn} & c_{n1} & \dots & c_{nm} \\ c_{11} & \dots & c_{n1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1m} & \dots & c_{nm} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

a ses racines réelles. Conditions pour que les racines soient négatives. Les résultats subsistent, si la forme $\sum a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ est assujettie seulement à être positive pour les valeurs des x qui vérifient les conditions

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} c_{\alpha r}x_\alpha = 0, \qquad r = 1, 2, \dots, m, \qquad m < n.$$

Nanson. — Le contenu du n-gone conjugué de lui-même commun à deux quadriques n^{aires}. (62-64).

Pour $n = 4$, il s'agirait du volume du tétraèdre conjugué commun à deux quadriques ordinaires.

Dixon. — La réduction de la seconde variation d'une intégrale. (65-78).

L'auteur reprend d'une façon nouvelle le problème traité par Clebsch (*Crelle*, t. 55 et 56).

Heawood. — Sur certaines différences entre les théories des fractions convergentes et des produits convergents. (79-88).

Remarques sur l'emploi des fractions continues pour trouver des multiples approchés de deux nombres.

Hargreaves. — Développement d'intégrales elliptiques en harmoniques zonales; quelques intégrales et séries déduites de ces développements. (89-98).

Ces développements se déduisent de l'expression

$$\sqrt{1-\mu^2} = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{4n+1}{2n-1} \frac{a_n^2}{(2n-1)(2n+2)} P_{2n}(\mu),$$

où $a_n = \frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}$, et de l'expression analogue pour $(1-\mu^2)^{-\frac{1}{2}}$, en y faisant $\mu = \sin\theta \sin\varphi$ et en intégrant par rapport à φ. L'auteur en déduit diverses intégrales définies et sommes de séries, par exemple :

$$\int_0^1 E(k) k'^{2s} a k' = \frac{1}{4}\pi^{2s} a_s a_{s+1},$$

$$\int_0^1 K(k) k'^{2s} a k' = \frac{1}{4}\pi^2 a_s^2,$$

$$\frac{2}{\pi} = 1 + \sum (-1)^n (4n+1) a_n^3,$$

. . . .

Smith. — Tables pour les fonctions de Bessel Y_0 et Y_1. (98-101).

Hill. — Sur le criterium de condensation de Cauchy pour la convergence des séries. (102-105).

Démonstration de ce théorème : « Les séries à termes positifs $\sum f(n)$, $\sum a^n f(a^n)$, où a est un entier positif plus grand que 1, convergent ou divergent en même temps, en supposant que la fonction $f(n)$ soit continue et tende vers 0; en diminuant toujours, quand n augmente indéfiniment. »

Elliott. — Démonstration de ce que les systèmes de quatre et

[redacted]

rayon qui aboutit à un élément $d\omega$ de la surface de l'hypersphère unité dans l'espace à n dimensions; on a

$$\int f\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)\varphi^{-\frac{n}{2}}\,d\omega = \Delta^{-\frac{1}{2}}\int f\left(\sum a_p l_p^2\right)d\omega;$$

les intégrales sont étendues à toute la surface de l'hypersphère, la forme φ est supposée définie et positive, Δ est son discriminant; a_p est une racine du discriminant de $\lambda\varphi' - \varphi$.

Brill. — Note sur le principe de dualité. (134-140).

Whittaker. — Sur les parenthèses de Lagrange dans la théorie des planètes. (141-144).

Soient $a, e, i, \varepsilon, \varpi, \Omega$ la moyenne distance, l'excentricité, l'inclinaison de l'orbite, la longitude moyenne à l'époque, la longitude du périhélie, la longitude du nœud ascendant pour une planète, et p, q deux quelconques de ces éléments, on a

$$[p, q] = \frac{\partial\left(\frac{\varepsilon - \varpi}{n}, \frac{-\mu}{2a}\right)}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\varpi - \Omega, h)}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\Omega, h\cos i)}{\partial(p, q)},$$

où, en désignant par μ la masse du Soleil, on a

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \qquad h = \sqrt{a(1-e^2)}.$$

Routh. — Quelques hyperboloïdes liés au tétraèdre. (145-150).

Mannheim. — Démonstration relative à l'inverseur de Hart. (151).

Glaisher. — Sur les intégrales définies liées à la fonction de Bernoulli. (152-182).

(*Voir* plus bas.)

Brill. — Sur un certain système exact d'équations pfaffiennes d'un type spécial. (183-192).

Discussion d'un système d'équations pfaffiennes entre n variables dépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et $n-1$ variables indépendantes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ du type

$$du_i = \sum_{j=1}^{j=n-1}\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n}\gamma_{ijk}u_k\right)d\varphi_j\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les γ sont des constantes. On suppose, en outre, que les équations forment un système exact.

Tables du *Messenger of Mathematics* pour les Volumes I à XXV; 1871-1896 (I-XXVI).

Tables par noms d'Auteurs.

Tome XXVII; 1897-1898.

Sylvester. — **Sur le nombre de fractions irréductibles proprement dites qui peuvent être formées avec des entiers non supérieurs à un nombre donné *n*. (1-5).**

Ce nombre, en admettant la fraction $\frac{1}{1}$ parmi celles que l'on considère, est la somme des *totients* des nombres 1, 2, ..., *n*. (Le totient $\tau(n)$ du nombre *n* est le nombre de nombres premiers à *n* et non supérieurs à *n*). En désignant par $E(j)$ la partie entière de j et par $J(n)$ la somme des totients des nombres 1, 2, ..., *n*, on a

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} J\left[E\left(\frac{j}{p}\right)\right] = \frac{1}{2}[E(j)]^2 + \frac{1}{2}[E(j)],$$

et, approximativement, $J(j) = \frac{3j^2}{\pi^2}$. L'auteur est arrivé primitivement à ce dernier résultat par de curieuses considérations de probabilités.

Gallop. — Un exemple destiné à illustrer la théorie moléculaire du magnétisme. (6-11).

Étude des positions d'équilibre d'un système de deux molécules magnétiques sous l'influence d'une force magnétique agissant sur les molécules perpendiculairement à la ligne qui joint leurs centres.

Elliott. — Quelques théorèmes sur la divisibilité. (12-15).

Le théorème de M. Segar (*Messenger*, XXII) d'après lequel le produit des différences de *n* nombres entiers différents $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est divisible par le produit des différences des nombres 0, 1, 2, ..., $n-1$ résulte aisément de ce [redacted]

C'est la seconde Partie d'un Mémoire dont la première Partie a
Tome précédent du *Messenger*. Ce Mémoire est d'ailleurs en rel
avec un travail de l'auteur inséré dans le Tome XXIX du *Quarter*
(*On the Bernoullian function*).

L'auteur part des polynomes $A_n(x)$, $A'_n(x)$ définis par les égali

$$\frac{a e^{ax}}{e^a+1} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a^n}{(n-1)!} A'_n(x),$$

$$\frac{a e^{ax}}{e^a-1} = 1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a^n}{(n-1)!} A_n(x),$$

qui interviennent manifestement
puissances de a des fonctions

$$\frac{1}{2} a \frac{\cos\left(x - \frac{1}{2}a\right)}{\cos\frac{1}{2}a}, \qquad \frac{1}{2} a - \quad \cos\frac{1}{2}a$$

$$\frac{1}{2} a \frac{\sin\left(x - \frac{1}{2}a\right)}{\sin\frac{1}{2}a}, \qquad \frac{1}{2} a \frac{\cos\left(x - \frac{1}{2}a\right)}{\sin\frac{a}{2}},$$

et qui peuvent aussi s'exprimer par les formules

$$(-1)^n \frac{1}{2} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} A'_{2n+1}(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\sin(2p+1)\pi x}{(2p+1)^{2n+1}},$$

$$(-1)^n \frac{1}{2} \frac{\pi^{2n}}{(2n-1)!} A'_{2n}(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\cos(2p+1)\pi x}{(2p+1)^{2n}},$$

$$(-1)^{n+1} \frac{2^{2n}\pi^{2n+1}}{(2n)!} A_{2n+1}(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\sin 2p\pi x}{p^{2n+1}},$$

$$(-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n-1)!} A_{2n}(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos 2p\pi x}{2^{2n}};$$

M, Glaisher exprime ces polynomes sous forme d'intégrales définies, à savoir

$$(-1)^n \frac{A'_{2n+1}(x)}{2\sin\pi x} = \int_0^\infty \frac{t^{2n}\operatorname{ch}\pi t}{\operatorname{ch}2\pi t - \cos 2\pi x}\,dt,$$

$$(-1)^n \frac{A'_{2n}(x)}{2\cos\pi x} = \int_0^\infty \frac{t^{2n-1}\operatorname{sh}\pi t}{\operatorname{ch}2\pi t - \cos 2\pi x}\,dt,$$

$$(-1)^{n+1} \frac{A_{2n+1}(x)}{\sin 2\pi x} = \int_0^\infty \frac{t^{2n}}{\operatorname{ch}2\pi t - \cos 2\pi x}\,dt,$$

$$(-1)^{n-1} A_{2n}(x) = \int_0^\infty \frac{(\cos 2\pi x - e^{-2\pi t})}{\operatorname{ch}2\pi t - \cos 2\pi x}\,dt$$

$$(0 \leqq x \leqq 1).$$

La comparaison de ces divers résultats permet d'obtenir les formules

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\pi t}{\operatorname{ch}2\pi t + \cos 2\pi z}\cos at\,dt = \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{ch}za}{\operatorname{ch}\frac{a}{2}\cos\pi z},$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\pi t}{\operatorname{ch}2\pi t + \cos 2\pi z}\sin at\,dt = \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{sh}za}{\operatorname{ch}\frac{a}{2}\sin\pi z},$$

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\operatorname{ch}2\pi t + \cos 2\pi z}\cos at\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sh}za}{\operatorname{sh}\frac{a}{2}\sin 2\pi z},$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\pi z + e^{-2\pi t}}{\operatorname{ch}2\pi t + \cos 2\pi z}\sin at\,dt = \frac{1}{a} - \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{ch}za}{\operatorname{sh}\frac{a}{2}}$$

$$\left(-\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2}\right),$$

qui peuvent se déduire aussi d'expressions dues à Poisson. De ces formules, l'auteur déduit un grand nombre d'intégrales définies où figurent des fonctions circulaires et hyperboliques. Signalons, par exemple, la formule

$$\int_0^\infty (1 - \operatorname{ch}\pi t)\sin 2at\,dt = \frac{1}{2a} - \frac{1}{\operatorname{sh}a}$$

qui, en développant suivant les puissances de a, fournit l'expression

$$\frac{B_n}{4n} = \int_0^\infty \frac{t^{2n-1}}{e^{2\pi t} - 1}\,dt$$

des nombres de Bernoulli; M. Glaisher obtient d'une façon analogue l'expression

$$E_n = 2^{2n+1}\int_0^\infty \frac{t^{2n}}{\operatorname{ch}\pi t}\,dt$$

des nombres d'Euler qui figurent dans le développement

[redacted]

dans un Mémoire du *Journal de Crelle* (42) intitulé : *Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die Jacob. Bernoullischen Functionen.*

Forsyth. — Solutions nouvelles de quelques équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique. (99-118).

Il s'agit des équations de la forme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2} = 0, \quad \pm e^2 v;$$

relativement à la première, M. Forsyth établit la proposition suivante, dont il tire plusieurs conséquences intéressantes :

Soient p_1, p_2, ..., p_n, n fonctions arbitraires de la variable u satisfaisant à la relation

$$p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 = 0,$$

et supposons u déterminé comme fonction des n variables indépendantes x_1, x_2, ..., x_n par l'équation

$$au = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n,$$

où a est une constante, v satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2} = 0,$$

ainsi qu'à l'équation

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial v}{\partial x_n}\right)^2 = 0.$$

Une autre solution de l'équation de Laplace est donnée par la formule $v = \frac{G(u)}{a - x_1 p'_1 - x_2 p'_2 - \ldots - x_n p'_n}$ où p'_1, p'_2, ..., p'_n sont les dérivées de p_1, p_2, ..., p_n par rapport à u.

Miller. — Sur un important théorème relatif aux groupes d'opérations d'ordre p, p étant un nombre premier. (119-121).

Un groupe d'ordre p^α contient un sous-groupe d'ordre $p^{\alpha - \frac{\beta(\beta-1)}{2}}$, tel que chaque opérateur de ce sous-groupe soit commutatif à chaque opérateur d'un sous-groupe d'ordre p^β contenu dans le sous-groupe donné.

Heawood. — Tables d'interpolation. (121-128).

Forsyth. — Note sur les surfaces dont les rayons de courbure sont égaux et de même signe. (129-137).

Intégration de l'équation de ces surfaces par un procédé autre que celui de Monge.

Burnside. — Sur les surfaces équipotentielles planes. (138-146).

L'auteur montre le lieu du problème consistant à déterminer ces surfaces avec les solutions de l'équation de Laplace données par M. Forsyth. Quelques remarques finales concernent le potentiel dans un espace non-euclidien.

Brill. — Note sur le mouvement d'un fluide visqueux incompressible. (147-152).

Hargreaves. — Sur les erreurs que comportent les réduites principales ou subsidiaires dans une fraction continue. (152-158).

Sedgwick. — Sur les oscillations d'une sphère liquide compressible hétérogène et la genèse de la Lune. Sur la figure de la Lune. (159-173).

La première partie du travail de l'auteur se rapporte à la recherche de la période ou des périodes d'oscillation d'une sphère liquide hétérogène sans mouvement de rotation. Cette étude est provoquée par des recherches antérieures de M. Darwin [*On the precession of a viscous spheroid and on the remote history of the Earth* (*Phil. Trans.*, 1879); *The secular changes in the elements of the orbit of a satellit* (*Phil. Trans.*, 1880); *On the oscillations of a rotating liquid spheroid and the genesis of the Moon* (*Phil. Mag.*, 1890), etc.] et se rapporte à l'hypothèse émise par ce savant sur la formation de la Lune. La seconde partie se rapporte à la différence entre les valeurs des moments principaux d'inertie de la Lune d'après la théorie de Laplace et d'après l'observation.

Jeans. — L'inverse du théorème de Laplace (174).

Gallop. — Sur une formule du Calcul différentiel. (175-176).

Sur une formule donnée par M. Holson pour la dérivation de

[redacted]

BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES E[illegible] ARTS DE BELGIQUE. 61e année, 3e série. Bruxelles, F. Hayez, [illegible]

Tome XXI.

D'Ocagne (*M.*). — Détermination du rayon de cou[illegible]re en coordonnées parallèles ponctuelles. (220-227).

Catalan (*E.*). — Rapport. (118-119).

Deux droites parallèles AP, [illegible] les fixes A, B, sont coupées en B_1, A[illegible] de $q = (1 : BA_1)$, p et q sont les co[illegible] bure d'une courbe plane en un poin[illegible] d [illegible]

$$\frac{1}{R} = \delta \frac{d^2p}{dq^2} : BH^3,$$

δ étant la distance de AP, BQ, H le point d'intersection de AM avec BH, parallèle menée par B à la tangente en M. Cette formule permet d'établir aisément une formule équivalente au théorème de Reiss sur la courbure d'une courbe algébrique aux points où elle est rencontrée par une droite.

Caligny (*A. de*). — Recherches hydrauliques. (113-117; 311-313; 396-399; 515-517).

Continuation des recherches antérieures sur l'utilisation de la force des marées.

Catalan (*E.*) et *Mansion* (*P.*). — Rapport sur le Mémoire de M. A.Demoulin intitulé : Sur diverses conséquences du théorème de Newton. (315-321).

Analyse de ce Mémoire qui a été publié dans les *Mémoires* in-8° de l'Académie, t. XLV; 1891.

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur une particularité curieuse des cours d'eau et sur l'une des causes des crues subites. (327-336).

La tension superficielle rétractile de l'eau, suivant qu'elle est favorisée ou détruite par l'étalement ou la suppression des surfaces libres, retarde ou accélère la rapidité de la partie superficielle des cours d'eau. On peut, au moyen de l'huile, diminuer les crues subites.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XVIII_2, p. 234-238.

Servais (*Cl.*). — Sur la courbure des polaires en un point d'une courbe d'ordre *n*. (362-367).

Le Paige (*C.*). — Rapport. (324).

Conséquences nombreuses du théorème suivant démontré simplement par l'auteur : En un point multiple d'ordre *p* d'une courbe d'ordre *n*, le rapport de deux rayons de courbure correspondants de la courbe et de la $(n-p-1)^{ième}$ polaire du point multiple est constant. Ainsi, par exemple, on en tire ce corollaire : En un point d'une courbe quelconque, les courbures des polaires forment une progression arithmétique.

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur la propriété caractéristique de la surface commune à deux liquides soumis à leur affinité mutuelle. (420-435).

Nouveaux faits à l'appui de l'existence d'une force d'extension existant à la surface commune des liquides considérés.

Deruyts (*J.*). — Sur le nombre des fonctions invariantes. (437-451).

Solution complète de la question du nombre des invariants linéairement indépendants de formes données. L'auteur ramène la question à la détermination de ce qu'il a appelé les *covariants primaires linéairement indépendants;* il fait dépendre la recherche de ceux-ci de certains semi-invariants des formes primitives.

Thiry (*Cl.*). — Distances des points remarquables du triangle. (471-482). *Voir* aussi *Mathesis,* (2), I, supplément.

Catalan (*E.*) et *Le Paige* (*C.*). — Rapports. (411-416).

L'auteur trouve une formule générale donnant la distance d'un point quel-

[redacted]



Généralisation d'une formule de Mannheim relative à la courbure de deux courbes polaires réciproques par rapport à un cercle. Conséquences nombreuses de cette formule combinée avec divers théorèmes de Duhamel, Liouville, etc. (*Voir* aussi t. XXII, p. 9, 11).

Le Paige (*C.*). — Rapport sur un Mémoire de M. A. Demoulin, intitulé : Sur une transformation géométrique applicable à la théorie des roulettes. (793-795).

Ce Mémoire est publié dans le Tome XLV, 1891, des *Mémoires* in-8° de l'Académie.

Tome XXII.

Deruyts (*J.*). — Sur une extension de la loi de réciprocité de M. Hermite. (11-23).

Une loi semblable à celle que M. Hermite a établie pour les formes binaires existe pour les formes à plusieurs variables, mais seulement si elles sont décomposables en facteurs linéaires.

Deruyts (*Fr.*). — Sur un procédé de génération de la surface cubique. (35-55).

Le Paige (*C.*). — Rapport. (4-5).

L'auteur établit d'abord le théorème suivant : Si un triangle se déforme de manière que deux de ses côtés s'appuient sur deux couples de droites fixes, tandis que le troisième côté décrit un cône de sommet fixe, le sommet opposé décrit une surface cubique multiple; l'ordre de multiplicité est égal à l'ordre du cône. Si le cône est un plan, la surface cubique est unique.

Les conséquences de ce théorème pour l'étude des vingt-sept droites de la surface, des courbes tracées sur la surface, sont ensuite examinées.

Servais (***Cl.***). — Sur les sections circulaires dans les surfaces du second degré. (115-120).

Le Paige (*C.*) — Rapport. (88-89).

L'auteur retrouve géométriquement les propriétés des sections circulaires des quadriques, en combinant les propriétés des coniques focales à celles du complexe des droites conjuguées rectangulaires.

Demoulin (***A.***) — Sur la courbure des lignes d'ordre p possédant un point multiple d'ordre ($p - 1$). (120-128).

Extension de la méthode exposée dans les *Mémoires* in-8° de l'Académie de Belgique, t. XLIV, au cas d'un point multiple.

Cesàro (*G.*). — Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un

polyèdre soit superposable à son image vue dans un miroir plan, etc. (226-247).

De Tilly. — Rapport. (195-197).

L'auteur résout complètement la question. Outre les polyèdres ayant un plan de symétrie ou un centre de symétrie, il trouve une troisième solution : ce sont les polyèdres qui ont un axe de symétrie d'ordre pair, perpendiculairement auquel les sections sont deux à deux égales et tournées l'une par rapport à l'autre d'un sous-multiple pair de deux droits.

Catalan (*E.*). — Quelques théorèmes sur les intégrales eulériennes. (459-460).

Extrait d'un Mémoire étendu qui sera publié ultérieurement.

Cesàro (*G.*). — Sur certains plans réfringents qui, dans les cristaux biaxes, peuvent, pour une onde plane incidente, donner, outre une cône creux de rayons, un rayon lumineux distinct. (503-512).

Lagrange (*C.*). — Rapport. (431-434).

Cas singulier de la réfraction conique.

Catalan (*E.*). — Sur un théorème de M. Servais.

Servais (*Cl.*). — Sur la courbure des lignes algébriques. (512-51).

Le Paige (*C.*). — Rapport. (434-435).

Le théorème de Liouville sur la somme des courbures relatives aux points de contact des tangentes à une courbe algébrique, parallèles à une direction donnée, ne s'applique pas aux courbes douées de singularités. On peut déduire



[redacted]

MÉMOIRES couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Colle t. XLIV. Bruxelles, F. Hayez, janvier 1891 (¹).

Neuberg (*J.*). — Sur les projections et contreprojec triangle fixe et sur le système de trois figures directe blables. (xvi-87 p.).

Le Mémoire de M. Neuberg est précédé d'une analyse détaillé qui en fait connaître les principaux résultats qui y sont contenus.

Catalan (*E.*). — Quelques fo iles rela tilignes. (28 p.).

Contributions métriques à la géométrie récente; d quables; relations entre ces distances; angles et poi

Demoulin (*A.*). — Sur la courbure des lignes planes. (48 p.).

Ce Mémoire a été analysé par les rapporteurs chargés de l'examiner, MM. Mansion, Catalan, Le Paige (*B. B.*, 1898, t. XX, p. 20-27). En voici les idées fondamentales : Soient A et B deux points fixes, Δ une droite fixe rencontrant AB en O. La position de tout point M du plan (AB, Δ) est déterminée par les distances positives ou négatives $m = OA'$, $n = OB'$ des points A', B' d'intersection de Δ avec AM, BM. Dans le système de coordonnées (m, n), une droite a une équation de la forme $am + bn + cmn = 0$. L'auteur cherche la tangente et le rayon de courbure d'une courbe quelconque dans ce nouveau système de coordonnées et fait de très belles applications aux coniques et surtout aux cubiques.

Tome LV; juillet 1891.

Demoulin (*A.*). — Sur diverses conséquences du théorème de Newton. (18 p.).

Le théorème de Newton peut s'énoncer ainsi : Le rapport

$$\lambda = \frac{y_1 y_2 \ldots y_m}{x_1 x_2 \ldots x_m}$$

des distances des points d'intersection d'une courbe d'ordre m avec deux sécantes au point d'intersection de ces sécantes, reste invariable, quand ces deux sécantes se déplacent parallèlement à elles-mêmes. M. Demoulin en déduit la relation

$$2\rho \sin \varphi = \lambda \frac{y_1 y_2 \ldots y_{m-1}}{x_1 x_2 \ldots x_{m-2}}.$$

(¹) Voir *Bulletin*, t. XIV₂, p. 270-271.

dans le cas où l'une des sécantes devient tangente, φ étant l'angle des x avec les y, ρ le rayon de courbure. Cette formule est transformée ingénieusement dans le cas où le point de contact est un point multiple. Ensuite l'auteur fait de nombreuses applications des formules obtenues, lorsque l'on fait tourner l'une des sécantes, ou quand on rend mobile leur point d'intersection de diverses manières.

Demoulin (*A.*). — Sur une transformation géométrique applicable à la théorie des roulettes. (35 p.).

La transformation dont il est question dans ce Mémoire est la suivante : Soit u l'angle du rayon vecteur d'une courbe, rapportée à des coordonnées polaires, avec la tangente à la courbe au point considéré. La courbe telle que $f(r, u) = 0$ a pour transformée, en coordonnées rectangulaires, $f(y, \omega)$, ω étant l'angle de la tangente avec l'axe des y. Il résulte immédiatement de là que

$$y = r, \quad \omega = u, \quad dy = dr, \quad dx = r\,d\theta, \quad ds = ds', \quad \frac{1}{2}y\,dx = \frac{1}{2}r^2 d\theta, \ldots,$$

θ étant l'angle polaire. La courbe (y, ω) a même longueur, mais une aire double de celle de la transformée, etc. L'auteur établit d'autres propriétés de la transformation; il applique ensuite les résultats obtenus à la chaînette, aux roulettes en général, aux courbes de Delaunay, à la courbe élastique et à diverses questions de calcul des variations.

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES. Quinzième année, 1890-1891. Bruxelles, Société belge de librairie; Paris, Gauthier-Villars, 1891 (A, première Partie; B, seconde Partie) (1).

Mansion (*P.*). — Sur la méthode de Lagrange pour l'intégration [redacted]

Mansion (*P.*). — Relation entre les distances de cinq points en Géométrie non euclidienne. (A., 8-11).

1° Les raisonnements de Legendre, dans la deuxième Note de ses *Éléments de Géométrie*, conduisent à la Géométrie euclidienne et à la Géométrie non euclidienne, quand on les rend rigoureux.

2° La relation euclidienne entre les distances de cinq points et la relation non euclidienne analogue (due à Schering), étant mises sous la forme symbolique $(12345) = 0$, jouissent de la propriété suivante : Si l'on a

$$(12345) = 0, \quad (12346) = 0, \quad (12356) = 0,$$

on peut en déduire

$$(23456) = 0, \quad (13456) = 0, \quad (12456) = 0.$$

Démonstration de ce théorème, dit *théorème des six points*.

Gilbert (*Ph.*). — Sur le potentiel d'une couche superficielle sans épaisseur. (A., 11-12).

Cas d'indétermination apparente.

Mansion (*P.*). — Note bibliographique sur les intégrales générales et les solutions singulières des équations différentielles et aux dérivées partielles. (A., 32-37 et 60).

Historique des travaux relatifs à cette question jusqu'en 1890. L'auteur a oublié de signaler la belle dissertation inaugurale de Poincaré : Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux dérivées partielles (Paris, Gauthier-Villars, 1879; 79 p. in-4°).

Gilbert (*Ph.*). — Sur un cas singulier du problème des courbes enveloppes. (A., 37-39).

L'enveloppe des courbes ayant pour équations $F(x, y, c)$, $f(x, y, c) = 0$ comprend les points d'intersection des courbes $F(x, y, c) = 0$, $f(x, y, c) = 0$.

Vallée-Poussin (*Ch. de la*). — Sur une démonstration des formules de Fourier généralisée. (A., 39-41).

Généralisation du mode d'exposition de Jordan (*Cours d'Analyse*, 1re édition, t. II, p. 216-226).

Mansion (*P.*). — Sur la formule de quadrature de Gauss. (57-59).

Extension de la formule au cas où les valeurs de la fonction correspondent à $(n+1)$ valeurs quelconques de la variable; calcul du reste au moyen du plus grand module de la fonction dans une certaine aire.

Gilbert (*Ph.*). — Sur une règle de convergence des séries à termes positifs. (A., 69-71).

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, tels que $\lim u_n = 0$, $\lim v_n = 0$; A une constante positive. Si l'on a, à partir d'une valeur de n,

$$v_n - \frac{u_{n+1}}{u_n} v_{n+1} > A > 0,$$

la série $\sum u_n$ sera convergente; si l'on a, au contraire,

$$v_n - \frac{u_{n+1}}{u_n} v_{n+1} < 0$$

et si la série $\sum \frac{1}{v_n}$ est divergente, la série $\sum u_n$ est divergente.

Mansion (*P.*). — Le R. P. Delsaux. (A., 86-91).

Delsaux, né à Bruxelles, le 27 mai 1828, mort à Namur, le 26 février 1891, a publié un grand nombre de Mémoires de Physique mathématique dont la liste est ici donnée : trois résumés de Physique mathématique (*Capillarité*, 1865; *Optique géométrique*, 1866; *Optique physique*, 1868), et une étude critique intitulée : Les derniers écrits philosophiques de Tyndall (Paris, Baltenweck, 1877).

Sparre (*de*). — Le mouvement des projectiles dans l'air. (B., 55-200).

De Tilly. — Rapport. (A., 60-66).

Dans la première Partie de ce Mémoire, l'auteur cherche une forme de la loi de la résistance de l'air qui convienne à toutes les vitesses et permette, en outre, d'achever les quadratures auxquelles conduit l'hypothèse simplificative [redacted]

jectile, d'après les formules relatives à l'écoulement des fluides. Dans le paragraphe II, il applique les formules trouvées à la recherche de l'action [illegible] sur un projectile de forme ogivale. Dans les paragraphes III, IV, V, il [illegible] les formules du mouvement des projectiles autour du centre de gravité, soit en employant, soit en évitant les fonctions elliptiques. Le paragraphe VI est consacré à la dérivation, étudiée seulement dans l'hypothèse d'une résistance proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse, c'est-à-dire en évitant les fonctions elliptiques. Dans le paragraphe VII l'auteur montre que le mouvement du projectile sur le centre de gravité n'a pas d'influence sérieuse sur la portée, Enfin, dans les paragraphes VIII et IX, le calcul de la durée du trajet est faite en partant de la formule exacte de la résistance (qui conduit à l'emploi des fonctions elliptiques) et puis au moyen de l'hypothèse plus simple d'une résistance proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse, ce qui conduit pratiquement à des résultats équivalents.

Salvert (de). — Mémoire sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme. (B., 201-394).

Suite du Mémoire dont il a été question dans le *Bulletin* antérieurement. Dans le Chapitre V (p. 201-266), M. de Salvert achève la solution du problème qu'il s'était proposé : savoir la détermination, dans les cas non exceptionnels (ceux-ci ont été traités antérieurement), des coordonnées rectilignes, en fonction des coordonnées curvilignes, par la condition de satisfaire simultanément à six équations aux dérivées partielles non linéaires. Il fait d'abord connaître deux méthodes pour ainsi dire inverses l'une de l'autre qui peuvent le conduire au résultat cherché; puis il esquisse, avec plus de détails, la première de ces deux méthodes, en indiquant, avec le plus grand soin, comment toutes les parties s'en enchaînent logiquement. Il établit ensuite : 1° le système des équations aux dérivées partielles du second ordre, auxquelles satisfont isolément, dans le cas le plus général du système orthogonal, chacune des trois coordonnées curvilignes; 2° les équations simultanées aux différentielles totales, pour le cas le plus général du système orthogonal, entre les trois dérivées premières d'une même coordonnée rectiligne. Il intègre alors celle-ci, détermine les constantes arbitraires surabondantes par la vérification *a posteriori* des équations du premier ordre proposées et forme, enfin, la solution définitive et donne la définition géométrique des surfaces qui composent le système orthogonal. L'ensemble de ces recherches démontre que Lamé n'a pas prouvé réellement qu'il a résolu complètement la question; le procédé, divinatoire pour ainsi dire, qui l'a conduit à la solution complète, est insuffisant au point de vue de la logique rigoureuse.

Dans l'Appendice (p. 267-394), qui suit son Chapitre V, M. de Salvert le complète dans trois Notes assez étendues. Dans la première, il retrouve *systématiquement* le système orthogonal le plus général, en supposant qu'il comprenne, parmi ses trois familles, le type le plus général des familles isothermes du second ordre. En combinant les résultats de cette Note avec une partie de ceux du Chapitre V, il parvient encore une fois à résoudre complètement le problème qu'il s'est posé.

La Note suivante contient le second mode de détermination des familles qui composent le système dans le cas le plus général. Enfin, la dernière Note contient l'application successive et la comparaison des deux méthodes exposées

(Note précédente et Chapitre V) au cas particulier correspondant au système sphérique.

L'exposition, parfois un peu longue de M. de Salvert, est en revanche toujours très claire et les calculs sont conduits avec la plus grande élégance.

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, publiée par la Société scientifique de Bruxelles, 1891.

Tome XXIX.

Lucas (*J.-D.*) — L'Astronomie à Babylone. (513-541).

Suite de l'analyse des recherches des PP. Epping et Strassmaier.

Mansion (*P.*). — Le R. P. Delsaux. (585-588).

Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XV, A, p. 86-91.

Gilbert (*Ph.*). — La dernière lutte à Rome autour du système de Copernic. (589-594).

En 1820, malgré l'avis contraire du Pape et du Saint-Office, le P. Anfossi ne voulait pas permettre l'impression d'une Astronomie du chanoine Settele, parce que le système de Copernic y était enseigné.

Tome XXX.

Gilbert (*Ph.*). — Études récentes sur la lumière et ses applications. (225-247; 558-581).



MATHESIS, RECUEIL MATHÉMATIQUE A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE, publié par MM. *Mansion* et *Neuberg*. Deuxième série, Tome I, 1891. Gand, Hoste; Paris, Gauthier-Villars (¹).

Lucas (*Éd.*). — Sur les théorèmes énoncés par Fermat, Euler, Wilson, v. Staudt et Clausen. (5-12).

Démonstration partiellement nouvelle de ces divers théorèmes en les rattachant à un même ordre d'idées.

Ocagne (*M. d'*). — Le terme complémentaire de la série de Taylor. (19-20).

On a, θ étant compris entre 0 et 1,

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots n} f^{n-1}x + \frac{(\theta h)^n}{1.2\ldots n}[f^n(x+h) - f^n x].$$

Neuberg (*J.*). — Sur les quadrangles complets. (33-35; 67-70; 81-82; 189-195).

Démonstration d'un grand nombre de propriétés relatives à la Géométrie récente du triangle, du cercle et des coniques, dans leurs rapports avec les quadrangles complets.

Cesàro (*E.*). — Étude intrinsèque des coniques et des cassinoïdes. (51-62).

Étude de ces courbes et de quelques courbes voisines au moyen de la relation qui existe entre l'arc et le rayon de courbure.

Mansion (*P.*). — Limite de la somme du produit ou du quotient d'un nombre fini de variables. (35-39; 63-66; 113-115; 139-141; 246-251).

Exposé élémentaire, même dans le cas où les variables sont incommensurables.

Servais (*Cl.*). — Sur la courbure de la podaire et de la polaire réciproque d'une courbe donnée. (84-88).

Démonstration synthétique de formules nouvelles ou anciennes par un procédé très simple.

(¹) Voir *Bulletin*, t. XIX₂, p. 9-14.

Jamet (*V.*). — Sur le théorème de Joachimsthal. (105-108).

Démonstration de ce théorème et de divers théorèmes voisins, par exemple, de celui-ci : « Le cercle qui passe par les pieds de trois normales, menées d'un même point à une conique, passe aussi par la projection du centre sur la tangente, au point diamétralement opposé au pied de la quatrième normale. »

Schoute (*P.-H.*). — Sur les foyers des coniques. (129-132).

L'auteur obtient les foyers des coniques au moyen de la condition que deux droites rectangulaires menées par un foyer soient conjuguées l'une à l'autre. Il déduit aisément des résultats obtenus l'équation de la cubique lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de coniques.

Longchamps (*G. de*). — Sur la résolution des problèmes déterminés par la méthode des lieux géométriques. (132-136).

On peut souvent introduire de grandes simplifications dans cette méthode, en y remplaçant des coordonnées X, Y, par des fonctions convenablement choisies de nouvelles variables x, y, que l'on regarde aussi comme des coordonnées.

Brocard (*H.*). — Sur une classe particulière de triangles. (153-156).

Étude d'une certaine strophoïde conduisant à une interprétation géométrique des fonctions sn, cn, dn, quand le module est l'unité.

Gelin (*E.*). — Formules relatives aux polygones réguliers. (160-164).

Aire des polygones de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 côtés; aire et volume engendrés par la révolution de ces polygones autour d'un axe de symétrie, d'un côté, etc.

Sollertinsky. — Propriétés des coniques. (177-182).



Mansion (*P.*). — Théorème de Choquet. (218-221).

Si $u = fx$ est une fonction entière de degré n et si x est compris
et $x_0 + h$, on a

$$u = u_0 + \lambda_1 \Delta u_0 - \frac{1}{8} \lambda_2 \Delta_2 u_0 + \frac{1}{15} \lambda_3 \Delta_3 u_0 - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{5n} \lambda_n \Delta_n u_0,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ étant des fonctions positives. Ce théorème permet souvent de voir si u change de signe de u_0 à $u_1 = f(x+h)$.

Neuberg (*J.*). — Sur les moments d'inertie. (226-233).

Exposé condensé de recherches de Reye, Hesse, Darboux sur les rapports de la théorie des moments d'inertie avec celle des surfaces du second degré.

Balitrand. — Sur les courbes du quatrième ordre qui ont trois points doubles d'inflexion et en particulier sur la *kreuzcurve*. (241-245).

Étude des courbes ayant pour équation trilinéaire $ly^2z^2 + mx^2z^2 + nx^2y^2 = 0$.

Questions proposées, questions résolues, questions d'examen; biographie, bibliographie; articles divers (passim).

Suppléments.

I. *Mansion* (*P.*) — Note sur la Géométrie euclidienne et sur la Géométrie non euclidienne. (32 p.).

Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1889, t. XIII, 1re partie, p. 57-61; 1890, t. XIV, 2e partie, p. 35-59; 1891, t. XV, 1re partie, p. 8-11.

II. *Le Paige* (*C.*) — Un astronome belge du XVIIe siècle : Godefroid Wendelin. (19 p.).

Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 3e série, t. XX, p. 709-727; 1890.

III. *Thiry* (*Cl.*). — Distances des points remarquables du triangle. (8 p.).

Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 3e série, t. XXI, p. 471-481; 1891.

ANNUAIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE. 1892. 58ᵉ année. Bruxelles, Hayez, MDCCCXII (¹).

Van der Mensbrugghe (G.). — Notice sur Charles-Marie-Valentin Montigny. (285-322).

Ch.-M.-V. Montigny, né à Namur le 8 janvier 1819, est mort à Schaerbeek-lez-Bruxelles, le 16 mars 1890. On lui doit une nouvelle théorie de la scintillation des étoiles et un appareil nouveau, le *scintillomètre*, outre d'autres recherches de Physique et de Météorologie.

Brialmont (A.). — Notice sur Jean-Baptiste-Joseph Liagre. (323-376).

J.-B.-J. Liagre, né à Tournay le 18 février 1815, est mort à Bruxelles le 13 janvier 1891. Il était Secrétaire perpétuel de l'Académie depuis le 5 mai 1874. Il a publié en 1852 un Ouvrage intitulé : *Calcul des probabilités et théorie des erreurs avec des applications aux Sciences d'observations en général et à la Géodésie, en particulier,* dont une seconde édition a paru en 1879; divers Mémoires d'Astronomie et de Géodésie; des recherches sur l'organisation des caisses de veuves, sur les pensions militaires et sur les institutions de prévoyance; puis quelques Ouvrages de vulgarisation (Géométrie, Topographie, Astronomie stellaire).

MATHESIS. — RECUEIL DE MATHÉMATIQUES A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES, publié par M. M.-P. Mansion et J. Neuberg. Gand, Hoste; Paris, 2ᵉ série.

Tome II, année 1892.

[redacted]

A. La dérivée de $f(x)$ est la limite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, lorsque, x étant fixe, h tend vers o.

B. La dérivée de $f(x)$ est limite du rapport $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, lorsque x_1 et x_2 tendent vers la même valeur x.

En partant de la définition A, on comprend les cas où la dérivée est discontinue; en adoptant la définition B, on les exclut. M. Peano émet l'opinion que dans l'enseignement élémentaire il est peut-être préférable d'exclure ces cas de discontinuité en adoptant la définition B.

Lorsque la dérivée d'une fonction n'existe pas, suivant la définition B, il existe toujours deux fonctions qui en jouent le rôle, et dont l'auteur signale quelques propriétés.

Mansion (*P.*). — Formules pour le jaugeage des tonneaux. (14-17).

Dans cette Note, l'auteur compare, au point de vue de l'approximation, différentes formules proposées pour le jaugeage des tonneaux.

Mansion (*P.*) et *Neuberg* (*J.*). — Léopold Kronecker. (19, 136-137).

Les auteurs signalent surtout l'importance des méthodes arithmétiques de Kronecker.

Molenbroeck (*Ph.*). — Sur le produit des axes principaux des coniques touchant trois ou quatre droites données. (33-39).

Considérant toutes les coniques inscrites à un triangle et ayant même produit des axes, l'auteur démontre que le lieu des pôles d'une droite fixe par rapport à ces coniques est une courbe du troisième ordre et que l'enveloppe de la polaire d'un point fixe par rapport aux mêmes coniques est une courbe de la sixième classe; puis, comme application des formules générales qu'il a obtenues, il cherche l'ellipse maximum inscrite à un quadrilatère supposé convexe.

Mansion (*P.*). — Limite de la racine $m^{\text{ième}}$ d'une variable. (39-42).

Mansion (*P.*) et *Neuberg* (*J.*). — Louis-Philippe Gilbert. (57).

Lemoine (*E.*). — Étude sur une nouvelle transformation dite *transformation continue*. (58-64, 81-92).

Soient a, b, c les trois côtés et A, B, C les trois angles d'un triangle. Supposons qu'il existe entre ces quantités la relation $f(a, b, c, A, B, C) = 0$. On peut déduire de cette relation la suivante

$$f(a, -b, -c, -A, \pi - B, \pi - C) = 0,$$

et deux autres analogues. C'est ce que M. Lemoine établit par des considérations fort simples, en faisant tourner le côté BA autour du point B dans un sens convenable. L'auteur applique ensuite ce résultat général à la démonstration d'un grand nombre de formules relatives à la géométrie du triangle.

Gelin (*E.*). — Caractères de divisibilité. (65-74, 93-99).

Ocagne (*d'*). — Sur les courbes algébriques. (100-103).

Dans cette Note l'auteur établit deux propriétés générales des courbes algébriques et déduit de la seconde de ces propriétés une construction du centre de courbure en un point d'une conique, due à M. Mannheim.

Wasteels (*C.*). — Aire d'une figure tracée sur une sphère et formée d'arcs de petits cercles. (105-113).

Servais (*Cl.*). — Sur l'aberration de courbure. (129-130).

Cette Note renferme une démonstration géométrique de la formule de Transon, relative à l'aberration de courbure en un point d'une courbe. L'auteur applique cette formule à la démonstration du théorème suivant :

Soit F le foyer de la parabole inscrite au triangle formé par la tangente, la normale et la directrice de la parabole osculatrice en un point d'une courbe. Le point de contact sur la normale est le centre de courbure C de la courbe, et du point F, on voit le rayon de courbure de la développée CC_1 sous un angle droit.

Bertrand (*E.*). — Notes sur quelques propriétés du triangle. (130-134).

Soient AH_a, BH_b, CH_c les trois hauteurs d'un triangle ABC, supposé acutangle, et soit P leur point de concours. Soient aussi AH'_a, BH'_b, CH'_c les hauteurs des triangles AH_bH_c, AH_cH_a, AH_aH_b et P_a, P_b, P_c les orthocentres de ces triangles. L'auteur démontre l'existence et étudie les propriétés de trois ellipses



obtenues en prenant pour axes la tangente et la normale en un point d'une conique.

Retali. — Sur quelques problèmes concernant le double contact et le contact du troisième ordre des coniques. (178-180, 219-223).

Dix-neuf questions du genre des suivantes : (n° 4) Décrire une conique qui ait un contact du troisième ordre avec une conique donnée et dont un point donné soit un foyer; (n° 14) Décrire une conique ayant un double contact avec une hyperbole donnée et qui touche l'une des directrices et un diamètre donné, celui-ci au centre de l'hyperbole.

Prime (F.). — Sur les points de Brocard. (194-195).

Neuberg (J.). — Sur les triangles inscrits et égaux à un triangle donné. (195-196).

Cette Note renferme une démonstration géométrique d'un théorème dû à M. Tucker.

Verniory. — Sur quelques suites finies. (217-219).

Verniory. — Sommation de quelques séries convergentes. (265-270).

Le terme général de ces séries est $u_n = i^\alpha(i+1)(i+2)\ldots(i+k-1)$, ou l'inverse, ou des expressions voisines.

Lampe (E.). — La formule de Snell ou d'Ozanam appartient à Nicolas de Cusa. (230-231).

Il s'agit de la formule approximative $\varphi = \dfrac{3\sin\varphi}{2+\cos\varphi}$.

Neuberg (J.). — Sur l'hyperbole de Kiepert. (241-246).

Cet article renferme une exposition des principales propriétés de l'hyperbole de Kiepert (circonscrite au triangle et passant par l'orthocentre et le centre de gravité de ce triangle).

Mangeot (S.). — Sur la construction des quadriques qui ont un contact de deuxième ordre avec une surface. (249-250).

Colette, Catalan, Lemoine (E.). — Sur la construction de la moyenne proportionnelle. (192-193, 250-251, 275-276).

Comparaison de la méthode de Gouzy avec d'autres, au point de vue de la simplicité.

Articles divers, questions résolues, questions d'examen, questions proposées, bibliographie (passim). Table des matières. (282-288).

Supplément.

Mansion (P.). — Analyse critique du ***Traité de Géométrie*** (6ᵉ édition, 1891) de Rouché et de Comberousse (12 pages).

Extrait de la *Revue des Questions scientifiques*, janvier 1892, 2ᵉ série, t. I, p. 250-251.

Brocard (H.). — Le Trifolium (58 pages).

Extrait du *Journal de Mathématiques élémentaires* (1891). Voir dans *Mathesis* (1892), p. 75, une Note complémentaire.

Mansion (P.). — Analyse critique de la ***Synopsis der höheren Mathematik***, von J. Hagen, S. J. (t. I, 1891) (8 pages).

Extrait de la *Revue des Questions scientifiques*, octobre 1892, 2ᵉ série, t. II, p. 594-601.

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES. Seizième année, 1891-1892. Bruxelles, Schepens; Paris, Gauthier-Villars, 1892 (A, 1ʳᵉ Partie; B, 2ᵉ Partie).

Gilbert (Ph.). — Sur la formule de Stokes généralisée. (A, 2-4).

[redacted]

Vallée-Poussin (*Ch. de la*). — **Notes sur des intégrales définies à limites infinies d'une forme particulière. (A, 6-8).**

Deux exemples anciens et deux nouveaux d'intégrales de ce genre qui sont finies, bien que la fonction sous le signe devienne infinie un nombre infini de fois. Voici la plus simple de ces intégrales

$$\int_0^{\infty} \frac{l(\cos^2 \alpha x)}{x^2} = -\alpha\pi.$$

Vallée-Poussin (*Ch. de la*). — **Note sur certaines inégalités et leur application au Calcul intégral. (A, 8-11).**

Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des quantités positives, p un nombre compris entre 0 et 1. On a

$$a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \overline{\overline{<}} \left(a_1^{\frac{1}{p}} + \ldots + a_n^{\frac{1}{n}}\right)^p \left(b_1^{\frac{1}{1-p}} + \ldots + b_n^{\frac{1}{1-p}}\right)^{1-p};$$

$$a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \overline{\overline{>}} \frac{\left(a_1^{\frac{p}{p+1}} + \ldots + a_n^{\frac{p}{p+1}}\right)^{\frac{p+1}{p}}}{\left(\frac{1}{b_1^p} + \ldots + \frac{1}{b_n^p}\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Applications au Calcul intégral.

Mansion (*P.*). — **Sur les recherches de Schering en Métagéométrie. (A, 51-53).**

Contributions à l'histoire de la Métagéométrie :

1° C'est Schering qui, le premier, en 1870 et 1873, a caractérisé un espace non euclidien par la relation qui existe entre les distances de ($n+2$) points, n étant le nombre des dimensions de l'espace considéré;

2° Jusqu'à présent, rien ne prouve que Gauss ait devancé Lobatchefsky dans la connaissance de la partie métrique de la Géométrie non euclidienne. En revanche, par l'intermédiaire de Bartels et de W. Bolyai, il a probablement influé sur Lobatchefsky et J. Bolyai. [On sait maintenant que Gauss a devancé Lobatchefsky et Bolyai, mais n'a eu aucune influence sur eux.]

Mansion (*P.*). — **Sur la théorie des racines égales. (A, 54-56).**

Esquisse de cette théorie, exposée sans recourir au principe que toute équation de degré m a m racines.

Vallée-Poussin (*Ch. de la*). — **Sur la série de Weierstrass représentant une fonction continue sans dérivée. (A, 57-62).**

Il s'agit de la fonction

$$F(x) \sum_0^{\infty} b^n \cos a^n \pi x,$$

où $0 < b < 1$, a un entier impair plus grand que 1, tel que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. L'auteur étudie cette fonction par un procédé qui s'applique même au cas où a est pair, et abaisse la limite de ab quand a est impair et surpasse 3.

Goedseels (*E.*). — Sur la définition de la longueur des lignes courbeset l'aire des surfaces courbes. (A, 79-80).

Soient L une ligne, A un de ses points, A_r une normale à L de longueur r, v_r le volume de l'anneau plein qui est le lieu de toutes les normales, h_r la hauteur du cylindre de volume v_r, de base πr^2. Par définition, la longueur de L est la limite de h_r quand r tend vers zéro. On peut donner une définition analogue pour l'aire d'une surface et étendre ces notions même au cas où les courbes n'ont pas de tangentes ni les surfaces de plan tangent.

Mansion (*P.*). — Sur les principes de la Mécanique rationnelle. (A, 81-85).

Selon l'auteur, les principes de la Mécanique rationnelle sont une suite logique de la définition des mots : *force*, force agissant *simultanément* sur un point, systèmes soumis aux *mêmes* forces extérieures. Cette Note est suivie de remarques où M. de Tilly expose sa manière de voir sur le même sujet.

Mansion (*P.*). — Sur le théorème de Jacques Bernoulli. (A, 85-87).

Esquisse d'une démonstration rigoureuse de ce théorème.

Mansion (*P.*). — Notice sur Ph. Gilbert. (A, 102-110).

Cette Notice a été reproduite dans un écrit publié à part, qui a paru en 1893 et sera analysé plus tard. Gilbert est né le 7 février 1832 à Bauraing; il est mort à Louvain, le 4 février 1892. On lui doit un grand nombre de travaux [redacted]

Jordan (*C.*). — Rapport sur ce Mémoire. (A, 124-129).

L'auteur a déduit de son analyse un ensemble de conditions préc lesquelles on peut encore appliquer la règle de Leibniz pour la dériv intégrales à limites infinies, mais il est impossible de les résumer. Lc cipes qui servent à établir ces règles paraissent applicables au cas plus plexe où la fonction à intégrer passe par l'infini.

Dans une Note publiée à la suite du Mémoire, l'auteur prouve qu'une limite de somme double peut ne pas être égale à l'intégrale double correspondante, celle-ci étant regardée comme une intégrale simple portant sur une intégrale simple.

Sparre (*de*). — Sur le développement en série des formules du mouvement du pendule conique et sur quelques propriétés de ce mouvement. (B, 181-202).

Gilbert et *Tilly* (*de*). — Rapports sur ce Mémoire. (A, 1-2, 77-78).

Solution nouvelle par les séries qui met en évidence la propriété établie par Puiseux relativement à l'angle formé par les azimuts du pendule pour un maximum et pour le minimum consécutif de l'angle d'écart. Elle permet aussi de traiter, plus complétement qu'on ne l'a fait antérieurement, la question des points d'inflexion que peut présenter la projection horizontale de la courbe décrite par l'extrémité du pendule.

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur une manière très simple d'exposer la théorie des miroirs ou des lentilles. (A, 62-65).

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Théorie élémentaire des lentilles épaisses et des systèmes optiques. (B, 207-221).

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Note sur la détermination des éléments de la lentille équivalente au système optique de l'œil. (B, 263-272).

Exposé élémentaire des résultats connus pour les miroirs et les lentilles. L'auteur les établit en admettant dès le début les propriétés réciproques des foyers et des axes secondaires. Voici les conclusions de la troisième Note : Le système optique de l'œil normal est équivalent à une lentille convergente dont les points principaux sont placés l'un à 2^{mm}, l'autre à $2^{mm},4$ en arrière de la cornée; la distance focale extérieure est de $14^{mm},75$, la distance focale intérieure $19^{mm},88$; le premier point nodal est à $3^{mm},28$ en arrière de la face antérieure du cristallin, le second à $0^{mm},32$ en avant de la face antérieure du même cristallin.

Salvert (*de*). — Mémoire sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme. (Note V) Sur une

démonstration élémentaire du théorème d'Abel pour le cas particulier des fonctions hyperelliptiques, renfermée implicitement dans les résultats de la Note III précédente. (B, 273-366).

L'auteur fait connaître explicitement la démonstration contenue en principe dans une Note antérieure; il fait diverses applications ou vérifications des résultats trouvés; enfin il applique la même méthode à la démonstration du théorème de l'addition pour les trois intégrales elliptiques.

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES PUBLIÉE PAR LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES. Bruxelles, Société belge de librairie. Deuxième série.

Tome I, 1892.

Lucas (*J.-D.*). — Éphémérides planétaires des Chaldéens. (50-77).

Aperçu de l'Astronomie planétaire chaldéenne d'après les travaux des PP. Strassmaier et Epping. A la fin de l'article se trouve un résumé de tous les résultats exposés dans le présent article et dans deux antérieurs, dans la même revue, en octobre 1890 et en mars 1891. En somme, les Chaldéens cónnaissaient bien le mouvement de la Lune, du Soleil et des planètes.

Duhem (*P.*). — Quelques réflexions au sujet des théories physiques. (139-147).

Duhem (*P.*). — Notation atomique et théorie atomistique. (391-455).

[redacted]

Tome II, 1892.

Ocagne (*d'*). — Le calcul sans opération. La Nomographie. (48-82).

Exposé, sans le secours de l'Algèbre, des principaux procédés de calcul graphique.

1. Procédés opératoires simplifiés de calcul. 2. Les tableaux de calculs tout faits. Barèmes et abaques. 3. Principaux avantages des abaques. 4. Les abaques à double entrée. 5. Le principe de l'anamorphose. 6. L'anamorphose généralisée. 7. Les *desiderata* dans l'établissement des abaques. 8. Les abaques hexagonaux. 9. Les abaques à points isoplèthes. 10. Conclusion.

BULLETINS DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE. Bruxelles, F. Hayez, 1892.

Troisième série, t. XXIII.

Le Paige (*C.*). — Note bibliographique sur l'Ouvrage intitulé : *Galilée et la Belgique*, par M. le D[r] G. Monchamp. (7-8).

Analyse rapide du livre. M. Le Paige ajoute aux noms des professeurs cartésiens, cités par M. Monchamp, celui de François Laddersons, qui professait l'hypothèse cartésienne des tourbillons et, par suite, celle de Copernic (1701).

Le Paige (*C.*). — Rapport sur le Mémoire intitulé : « Sur la correspondance homographique entre les éléments de deux espaces linéaires quelconques », par M. Fr. Deruyts. (9-11).

Analyse du Mémoire de M. Fr. Deruyts. Celui-ci généralise les transformations homographiques du plan et de l'espace en étudiant la relation linéaire $f = 0$ entre deux séries de $n+1$ variables. Quand le discriminant de f est nul, ainsi que tous ses mineurs d'ordre $n-k+2$, l'homographie dite *dégénérescente* se ramène à une homographie non dégénérescente entre deux systèmes à $(n-k)$ dimensions. L'auteur étudie où les deux espaces considérés sont coïncidents et où, de plus, les éléments correspondants sont incidents. Le Mémoire sera publié dans les Mémoires in-4° de l'Académie.

Catalan (*E.*). — Quelques séries trigonométriques. (143-147)

Le titre est erroné, il faut lire *logarithmique*. L'auteur démontre et généralise la formule suivante de M. Baschwitz

$$\log\sqrt{7} = \left(1 - \frac{1}{5}\,\frac{1}{3^2}\right) - \left(\frac{1}{7}\,\frac{1}{3^3} - \frac{1}{11}\,\frac{1}{3^5}\right) + \left(\frac{1}{13}\,\frac{1}{3^6} - \frac{1}{17}\,\frac{1}{3^8}\right)\cdots,$$

et quelques relations analogues.

Deruyts (J.). — Sur les formes algébriques à particularité essentielle. (152-167).

L'auteur appelle ainsi les formes entre les coefficients desquelles existent un certain nombre de relations homogènes algébriques invariantes quand on effectue une transformation linéaire.

Un certain nombre des formes invariantes des formes générales deviennent identiquement nulles dans le cas où des relations de ce genre sont supposées exister entre les coefficients.

Comme application, l'auteur donne une démonstration nouvelle de sa loi de réciprocité généralisée.

Servais (Cl.). — Sur la courbure dans les sections coniques.

Le Paige (C.). — Rapport sur ce Mémoire. (213-234).

L'auteur débute en démontrant fort simplement un théorème de M. Mannheim concernant les tangentes à une courbe algébrique issues d'un point.

Appliqué aux coniques, ce théorème se traduit par la formule

$$\rho : \rho_1 = T^3 : T_1^3,$$

ρ et ρ_1 désignant les rayons de courbure en deux points M et M_1 d'une conique, et T et T_1 les longueurs comptées sur les tangentes en ces points depuis les points de contact jusqu'au point d'intersection S des deux tangentes. Si le point S se déplace infiniment peu sur M_1 S, ρ_1 reste fixe tandis que ρ, T et T_1 varient; en interprétant géométriquement les différentielles de ces quantités, l'auteur obtient une formule dont il tire un grand nombre de conséquences.

La fin de ce Mémoire est consacrée à l'exposition d'une méthode très féconde dans l'étude de la courbure dans les coniques. Elle est basée sur le théorème suivant :

Si des points R de la tangente en un point M d'une conique, on abaisse des perpendiculaires sur leurs polaires respectives, l'enveloppe de ces droites



Servais (*Cl.*). — Sur les coniques osculatrices dans les courbes du troisième ordre. (522-527).

Le Paige (*C.*). — Rapport sur cette Note. (456).

Cette Note repose sur la remarque suivante : A étant un point quelconque d'une cubique, cette courbe se correspond à elle-même dans la transformation birationnelle quadratique de troisième espèce (Voir *Mathesis*, t. VII, p. 116), qui a pour pôle le point A et pour conique fondamentale la conique polaire du point A par rapport à la cubique.

Demoulin (*A.*). — Quelques propriétés du système de deux courbes algébriques planes. (527-547).

Le Paige (*C.*). — Rapport sur ce Mémoire. (457).

Liouville a fait connaître une relation entre les rayons de courbure de deux lignes algébriques aux points où elles se coupent et les angles que les tangentes en ces points font avec un axe fixe, pris à volonté. M. Demoulin applique à la figure relative à ce théorème la transformation par polaires réciproques, et obtient ainsi un grand nombre de relations parmi lesquelles nous citerons la suivante, qui généralise un théorème de M. Mannheim :

T *étant la longueur d'une tangente commune à deux courbes algébriques, et* R *et* R' *les rayons de courbure de ces courbes aux points de contact, on a*

$$\sum \frac{R - R'}{T^3} = 0,$$

le signe sommatoire s'étendant à toutes les tangentes communes.

Tome XXIV.

Mansion (*P.*). — Rapport sur le Mémoire intitulé : Sur l'application des fonctions sphériques aux nombres de Segner, par M. F. Caspary. (15-20).

Le nombre

$$T_n = \frac{1.2.3\ldots 2n}{(1.2\ldots n)^2}\,\frac{1}{n+1}$$

de manières dont on peut décomposer un polygone convexe de $(n+1)$ côtés en triangles, par des diagonales, jouit de propriétés remarquables étudiées par Euler, Lamé, Rodrigues, Binet, Catalan. Ce dernier a trouvé des relations entre les nombres T_n et les polynomes $P_n(x)$ de Legendre. Caspary a trouvé que le premier et le dernier terme de $P_n(x)$ s'exprime aisément au moyen des nombres T_n. Au moyen de cette remarque et de la formule de F. Neumann

$$Q_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(u)\,du}{x-u},$$

sur les fonctions sphériques de seconde espèce, il retrouve un grand nombre de résultats obtenus antérieurement par les auteurs cités plus haut; il en trouve aussi de nouveaux, en particulier, sur les coefficients de $Q_n(x)$. Voici, par exemple, une formule assez simple

$$\sum_{r=0}^{r=n}(4r+1)\frac{(r+1)^2 T_r^2}{4^{2r}} = \left[\frac{(n+1)(n+2)\,T_{n+1}}{2^{2n+1}}\right]^2,$$

entre les carrés des nombres de Segner.

Baschwitz. — Une identité remarquable. (56).

Dans cette Note l'auteur fait connaître un certain mode de décomposition de l'expression

$$\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z^2-1}+\ldots+\frac{1}{z^n-1}.$$

Heen (*P. de*). — Variabilité de la température critique. (96-101).

La température critique dans le sens d'Andrews est une limite supérieure de température critique dans le sens de Cagniard-Latour, laquelle est variable et non constante.

Deruyts (*J.*). — Sur certaines substitutions linéaires. (102-110).

Extension de la théorie des formes associées de Hermite à la théorie des covariants primaires de l'auteur.

Mansion (*P.*). — Rapport sur : Mémoire sur l'intégration des équations différentielles par Ch.-J. de la Vallée-Poussin. (227-236).

L'auteur prouve, par une méthode originale, que l'on peut étendre la notion d'intégrale d'une équation différentielle, $y' = f(x,y)$, au cas où $f(x,y)$ est une fonction discontinue. Le même théorème subsiste dans le cas d'un système



Servais (*Cl.*). — Sur la courbure dans les surfaces du second degré. (467-474).

Le point de départ de ce Mémoire consiste dans l'ingénieuse remarque suivante : si l'on considère les normales en deux points M, M' d'une quadrique, la droite MM' et les jonctions des traces des deux normales sur les plans principaux de la quadrique sont quatre génératrices d'un paraboloïde hyperbolique (P). En combinant cette remarque avec les propriétés connues des coniques focales, on arrive à définir le paraboloïde (P_1), limite de P, lorsque M' tend vers M, c'est-à-dire lorsque la sécante MM' devient une tangente déterminée de la quadrique. La considération de ce paraboloïde permet à M. Servais de démontrer les propriétés fondamentales relatives à la courbure dans les quadriques. L'auteur signale encore une autre méthode conduisant aux mêmes propriétés, et termine en montrant que l'étude de la courbure en un point d'une surface quelconque se ramène à l'étude de la courbure en un point d'une surface du second degré.

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur la cause commune de la tension superficielle et de l'évaporation des liquides. (543-544).

La couche superficielle libre d'un liquide est telle que, dans le sens vertical, les particules sont à des distances de plus en plus grandes à mesure qu'on se rapproche de la surface libre. C'est là la cause commune des deux phénomènes indiqués.

Deruyts (*J.*). — Sur la réduction des fonctions invariantes dans le système des variables géométriques. (558-571).

Réduction au moyen de certaines formes réduites qui se déduisent des covariants primaires.

Deruyts (*Fr.*). — Construction d'un complexe de droites du second ordre et de la seconde classe. (571-577).

Le Paige (*C.*) et *Neuberg* (*J.*). — Rapports. (536-539).

Considérons dans l'espace deux plans α et β, dont les éléments complémentaires (points et droites) soient reliés homographiquement, de telle sorte qu'à un point de l'un des plans il corresponde une droite, réciproquement et inversement. Le complexe dont il s'agit est formé par les droites qui unissent les points d'un plan aux points des droites correspondantes de l'autre. L'auteur se réserve d'étudier le degré de généralité et les dégénérescences de ce complexe. M. Neuberg, dans son Rapport, donne, sous une forme concise, l'équation du complexe.

Catalan (*E.*), *Le Paige* (*C.*), *Mansion* (*P.*). — Rapport sur le Mémoire intitulé : « Sur l'intégrale eulérienne de premier espèce, par M. J. Beaupain. (606-614).

Discussion sur deux formules de M. Beaupain. Celui-ci a rédigé son Mémoire, qui sera analysé plus tard, de manière à éviter les critiques formulées par l'un des rapporteurs.

Heen (P. de). — La constitution de la matière et la Physique moderne. (670-687).

Plaidoyer en faveur de l'hypothèse cinétique et des hypothèses apparentées regardées ici comme donnant une explication objective des phénomènes.

MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE, t. XLVIII. Bruxelles, F. Hayez; mai 1892.

Catalan (E.). — Nouvelles Notes d'Algèbre et d'Analyse. (98 pages).

Voici les titres des quatorze paragraphes dont se compose ce Mémoire :

I. Sur la formule du binome. II. Relations entre les intégrales définies. III. Sur les intégrales eulériennes. IV. Sur une formule de Poisson. V. Sur la fonction $y = \frac{1}{x(1+x)^p}$. VI. Généralisation d'une formule de M. Genocchi. VII. Quelques sommations de sinus et de cosinus. VIII. Sur les produits indéfinis. IX. Sur l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos qx\, dx$. X. Comparaison entre deux fonctions circulaires. XI. Sur une question de probabilités. XII. Sur l'équation $x^p - 1 = 0$, p étant un nombre premier de la forme $4\mu + 1$. XIII. Sur l'équation $x^m - 1 = 0$ ($m = pq$, p et q étant impairs et premiers entre eux).


[redacted]

2. Cas particuliers divers de la formule

$$f(1+x) = q\int_0^1 u^{q-1} f(u+x)\,du + \int_0^1 u^q f'(u+x)\,du.$$

A noter, parmi les formules obtenues, celle-ci

$$\int_0^1 l\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma x}\,dx = y(ly-1).$$

3. En remplaçant dans celle-ci $l\Gamma x$ par l'une de ses valeurs connues, l'auteur trouve d'autres intégrales définies remarquables. Il étudie aussi la série

$$B = \varpi(1) - \varpi(2) + \varpi(3) - \varpi(4) + \ldots,$$

où $\varpi(x)$ est la fonction de Binet, et prouve que

$$G = \int \frac{12 - 2e^x}{e^{4x} - 1} x\,dx = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots.$$

5. Propriétés principales de la fonction $y = \frac{1}{x(1+x)^p}$ qui a des propriétés analogues aux fonctions X_n.

9. Résultats de Serret obtenus rigoureusement pour tous les cas où ils existent.

11. Problème de la ruine du joueur. Exposé critique de trois solutions de Rouché et d'une solution de Delannoy, identique à la première solution de Rouché. Identités que l'on en déduit.

12-13. Compléments et simplifications de Notes antérieures.

14. Décomposition de

$$\frac{\sin pqx \sin x}{\sin px \sin qx},$$

en une somme de cosinus. Nombreuses intégrales qui se déduisent de la formule trouvée.

MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÉGE. — 2e série. Tome XVII. Bruxelles, Hayez. Février 1892 [1].

Deruyts (*Fr.*). — Sur la corrélation polaire involutive dans un espace linéaire quelconque. (1-16).

([1]) Voir *Bulletin*, XVIII$_2$, p. 238 et 239.

L'auteur étudie les propriétés de la corrélation polaire involutive définie par une forme bilinéaire symétrique gauche à $(n+1)$ variables, égalée à zéro.

Deruyts (*Fr.*). — Sur une propriété des déterminants symétriques gauches. (1-6).

Si les mineurs d'ordre $2k$ d'un déterminant symétrique gauche sont nuls, les mineurs d'ordre $(2k-1)$ sont nuls également.

Deruyts (*Fr.*). — Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale. (1-208).

Deruyts (*I.*). — Essai d'une théorie générale des formes algébriques. (1-156).

Catalan (*E.*). — Lettres à quelques mathématiciens. (1-22).

Les principales, adressées à M. Hermite, contiennent des formules relatives au polynomes X_n de Legendre.

Studnicka. — Sur de nouvelles formules pour le calcul du nombre Π de Laisant. (1-7).

Le nombre Π dont il s'agit est tel que $\mathrm{S}h\,\frac{\Pi}{2} = 1$, ou $\Pi = l(1+\sqrt{2})$. L'auteur le calcule en faisant $x = 1+\sqrt{2}$, dans la formule connue

$$2l(x) = l(1+x) + l(1-x) + \frac{2}{3}\,\frac{1}{(2x^2-1)^3} + \frac{2}{5}\,\frac{1}{(2x^2-1)^5} + \ldots$$

puis par les fonctions continues.



déformation continue, amenée à coïncider avec une autre surface consistent en ce que : 1° les deux surfaces doivent être de même espèce, toutes deux unifaciales, ou toutes deux bifaciales; elles doivent avoir le même degré de connexion; elles doivent avoir le même nombre de contours limites.

La démonstration est obtenue en ramenant une surface, par déformation continue, à un type canonique, constitué par une sphère trouée.

Dans une seconde Partie, l'auteur établit diverses propriétés relatives en particulier aux systèmes de coupures qui ramènent la surface à avoir une connexion simple, et aux systèmes de *circuits* tracés sur elle. M. Mair étudie enfin le nombre des déformations qui permettent de ramener la surface au type canonique.

Cayley. — Sur le cercle des neuf points d'un triangle sphérique. (35-39).

Cole (*F.*). — Liste des groupes transitifs de substitutions pour dix et onze lettres. (39-50).

Dyson (*F.*). — Mouvement d'un satellite autour d'une planète sphéroïdale. (50-81).

Le satellite étant supposé sphérique, l'auteur donne les six équations qui déterminent les éléments du mouvement de la planète autour de son centre, les six équations qui déterminent les éléments de l'orbite du satellite, développe la fonction perturbatrice en termes qui dépendent du temps, en supposant que les surfaces d'égale densité forment des sphéroïdes semblables; il étudie complètement les inégalités séculaires : la moyenne distance des deux corps et l'inclinaison de l'axe de la planète sur son axe du moment résultant restent invariables; le mouvement du nœud du plan du moment résultant de la planète et de l'orbite du satellite sur le plan invariable du système est à peu près uniforme. Il étudie aussi les termes périodiques qui figurent dans la libration de la Lune. Enfin la moyenne distance et l'inclinaison de l'axe de la planète sur son axe du moment résultant sont stables en gardant les termes du second ordre de la masse perturbatrice.

Edwardes (*D.*). — Sur le problème de Chree relatif au mouvement de rotation d'un ellipsoïde élastique. (81-88).

Solution directe d'un problème traité par M. Chree (*Quarterly Journal*, t. XXII, XXIII) comme application de sa méthode pour la solution générale des équations de l'élasticité.

Love (*A.*). — Note sur les vortex elliptico-cylindriques. (89-92).

Un cylindre elliptique peut former la surface de séparation entre deux parties d'une masse liquide dont l'une est animée d'un mouvement rotatoire et l'autre d'un mouvement sans rotation. C'est ce qu'a montré Kirchhoff; l'auteur s'est d'ailleurs occupé déjà de cette question (*Proc. Lond. Math. Soc.*; 1893).

Dans le présent travail, il montre qu'il peut y avoir un mouvement stable d'un vortex elliptique, dans des conditions autres que celles qu'a données Kirchhoff pour la vitesse angulaire, quand la condition de continuité pour la vitesse tangentielle à la surface du vortex n'est pas vérifiée.

Crawford (*L.*). — Sur la solution de l'équation de Lamé

$$\frac{d^2 U}{du^2} = U[n(n+1)pu + B],$$

en termes finis quand $2n$ est un entier impair. (93-98).

La solution est développée suivant les puissances de $p\frac{u}{2} - e_2$.

Miller (*G.*). — Groupes intransitifs de substitution pour dix lettres. (99-118).

Maillet (*E.*). — Sur un mode de formation de certains groupes primitifs. (119-132).

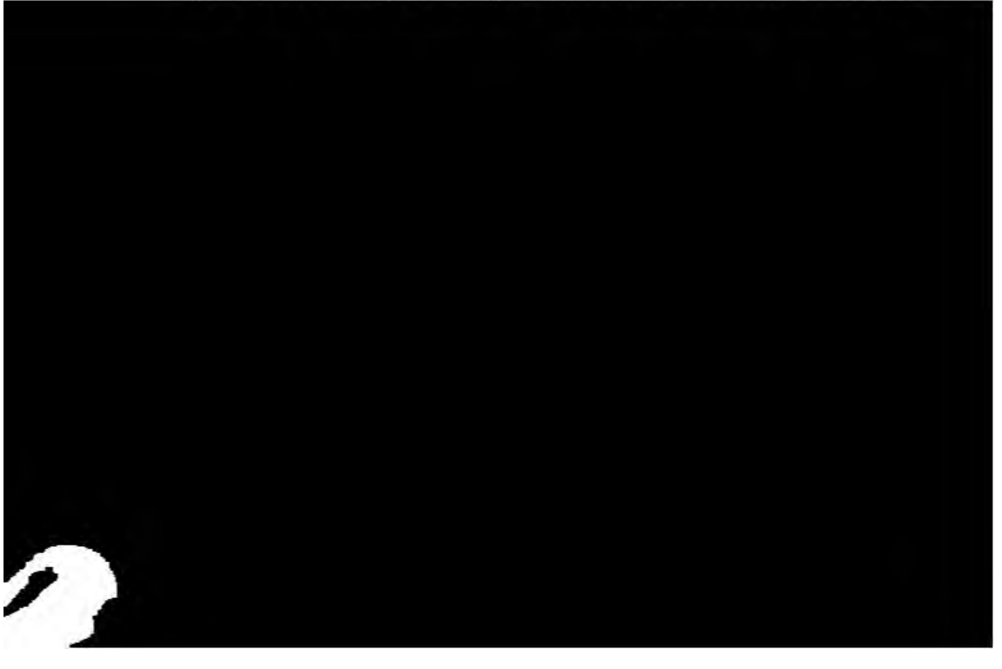
Démonstration nouvelle et extension du théorème suivant, déjà établi par l'auteur dans sa Thèse.

« De tout groupe simple d'ordre g, non premier, on déduit, par la considération de l'isomorphe transitif dont l'ordre égale le degré et de son conjoint, un groupe primitif d'ordre g^2 de degré g, de facteurs de composition g et g. »

Voici la définition que M. Maillet donne des groupes *conjoints;* elle comprend, comme cas particulier, les groupes conjoints de M. Jordan. Considérons g lettres et un carré formé des éléments

$$a_i^\alpha \ (i = 1, 2, \ldots, g;\ \alpha = 1, 2, \ldots g),$$

qui ne sont autres, dans chaque ligne et chaque colonne, que les g lettres



Maillet (*E.*). — Application de la théorie des substitutions à celle des carrés magiques. (132-144).

Les n^2 nombres entiers $0, 1, 2, \ldots, n^2-1$ étant rangés dans un carré A, chacun de ces nombres peut être mis sous la forme $a_{ij}+\alpha_{ij}n$, i et j indiquant le rang de la ligne et de la colonne où entre le nombre considéré, et les nombres a_{ij}, α_{ij} étant pris parmi les nombres $0, 1, 2, \ldots, n-1$; avec les nombres $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ on peut former des carrés B, B'; l'auteur suppose le carré A tel que les éléments qui figurent dans chaque ligne ou dans chaque colonne de B et de B' soient différents; ce sont les groupes dérivés des substitutions qui permettent de passer d'une ligne (ou d'une colonne) d'un de ces carrés B, B' à une autre ligne ou colonne que considère M. Maillet.

Mathews. — Note sur la torsion géométrique. (145-146).

Élégante application des méthodes cinématiques.

Haucock (*H.*). — Sur la réduction d'après Kronecker des systèmes modulaires. (147-184).

Le travail de M. Hancock contient d'abord une exposition élégante des propositions élémentaires concernant les systèmes de modules au sens de Kronecker et spécialement l'équivalence de tels systèmes.

Considérant ensuite un système de modules de seconde espèce (*Stufe*)

$$[F_1(x), F_2(x), \ldots, F_\mu(x)],$$

où les F sont des polynomes entiers en x à coefficients entiers, il se propose de le remplacer par un système *équivalent* plus simple. Rappelons qu'une équivalence telle que

$$[F_1(x), F_2(x), \ldots, F_\mu(x)] \backsim [\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_\nu(x)]$$

veut dire que les polynomes F et Φ sont liés par des relations identiques de la forme

$$F_\alpha = A_1^{(\alpha)}\Phi_1(x) + A_2^{(\alpha)}\Phi_2(x) + \ldots + A_\nu^{(\alpha)}\Phi_\nu(x), \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, \mu),$$

$$\Phi_\beta = B_1^{(\beta)}F_1(x) + B_2^{(\beta)}F_2(x) + \ldots + B_\mu^{(\beta)}F_\mu(x), \quad (\beta = 1, 2, \ldots, \nu),$$

où les $A_i^{(\alpha)}$, $B_j^{(\beta)}$ sont des polynomes entiers en x à coefficients entiers.

La théorie du plus grand commun diviseur permet de ramener le système de modules $[F_1(x), F_2(x), \ldots, F_\mu(x)]$ à la forme $[m, f_1(x), f_2(x), \ldots,]$, où m est un entier; si m est un nombre composé, le système de modules se décompose lui-même et l'on est ramené à considérer des systèmes de la forme

$$[p^h, p^{h-1}g_1(x), p^{h-1}g_2(x), \ldots, p\chi_1(x), p\chi_2(x), \ldots, \Psi_1(x), \Psi_2(x), \ldots,],$$

où p est un nombre premier; l'auteur montre par induction qu'un tel système est équivalent à un système de la forme

$$[p^h, p^{h-1}G(x), p^{h-2}H(x), \ldots, pS(x), T(x)].$$

Mathews (*G.*). — Note sur les nombres de Hamilton. (184-188).

Ces nombres ont été introduits par Sylvester et M. Hammond (*Phil. Trans.*, A. 1788, p. 285); M. Mathews indique une modification dans la façon d'écrire le tableau de ces nombres. (*Voir* Lucas, *Théorie des nombres*, p. 495), modification dont M. Glaisher fera ressortir l'utilité dans une Note ultérieure. M. Mathews montre, en outre, l'existence de relations de récurrence entre les éléments d'une colonne.

Cullovin (*T.*). — Une démonstration euclidienne rigoureuse de la théorie des parallèles à introduire immédiatement après Euclide I, 26. (188-191).

Herman (*R.*). — Exemple de la fonction caractéristique. (191-216).

Il s'agit de la fonction caractéristique de Hamilton pour un pinceau lumineux étroit (Maxwell, *Collected Papers*, t. I, p. 381; Larmor, *Proceedings of the London Math. Society*, t. XX, p. 181, t. XXIII, p. 163).

Forsyth. — Évaluation de deux intégrales définies. (216-225).

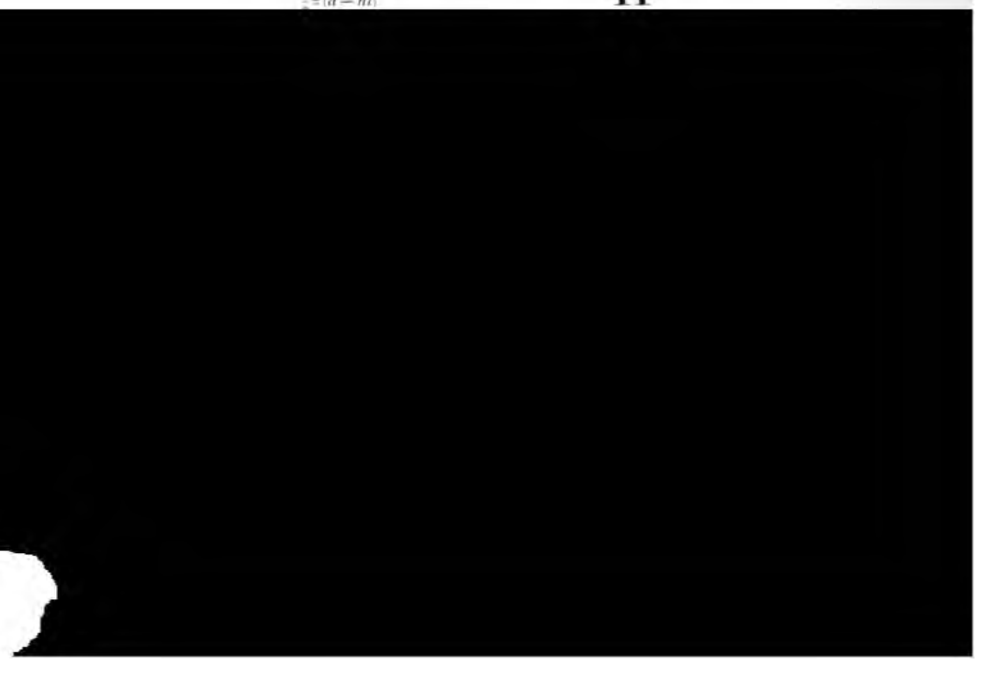
On a

$$\int_0^\pi \sin^m\theta\, e^{a\theta}\, d\theta = \frac{\pi e^{\frac{1}{2}\pi a} \prod(m)}{2^m \prod\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}ai\right) \prod\left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}ai\right)};$$

pourvu que la partie réelle de m soit plus grande que -1;

$$\int_0^\pi \sin^m\theta \cos^n\theta\, e^{a\theta}\, d\theta$$

$\frac{1}{2}\pi(a-ni)$ $\qquad 2^{-m}\pi \prod(m)$



Démonstration élémentaire d'un théorème de Smith (*Coll. Papers*, t. I, p. 284) sur deux formes quadratiques primitives (a, b, c), (a', b', c), de déterminants D, D' et dont l'invariant simultané est nul; si m, m' sont les plus grands communs diviseurs respectifs de a, $2b$, c et de a', $2b'$, c', $m^2 D'$ et $m'^2 D$ sont susceptibles d'une représentation primitive par les doubles respectifs des deux formes (a, b, c), (a', b', c').

Cayley. — Sur les soixante substitutions icosaédrales. (236-242).

Élégante représentation de ces substitutions au moyen de 60 matrices, déduite de celle qui a été donnée par M. Gordan [*Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veranderlichen* (*Math. Ann.*, t. XII, 1877)]. La correspondance avec les substitutions de cinq lettres est donnée explicitement. L'illustre auteur vérifie en outre que le produit de deux matrices fait partie du groupe.

Glashan (O.). — Sur la Table de Sylvester des différences hamiltoniennes et sur les nombres qui leur sont associés. (242-247).

Cette Note se rapporte à une Note de M. Mathews signalée plus haut.

Forsyth (A.). — Sur les quartiques gauches de seconde espèce. (247-269).

La partie la plus importante du travail de M. Forsyth se rapporte à l'étude des quartiques rationnelles dont les équations sont ramenées à la forme

$$x = a + t^4, \quad y = b + t^3, \quad z = c + t^2, \quad u = d + t.$$

où t est le paramètre variable. De la condition pour que quatre valeurs de t correspondent à quatre points situés dans un même plan, l'auteur déduit les propriétés les plus importantes de ces courbes.

La condition pour que la quartique soit de première espèce (intersection de deux quadriques) se réduit à

$$a(c + d^2) = b^2 + 2bcd - c^3.$$

M. Forsyth termine en indiquant comment se généralise, pour les courbes unicursales de degré quelconque, la méthode de réduction à une forme simple qu'il a employée pour les cubiques et les quartiques gauches.

Glaisher (J.). — Produits et séries ne renfermant que des nombres premiers. (270-337).

Le point de départ de ce Mémoire est dans une formule donnée par M. Rogel dans l'*Educational Times* (t. LV, p. 66) et que voici

$$\prod_{n=2}^{n=\infty} n^{\sin\frac{2n\mu\pi}{n}} = \left[\frac{(\sin\mu\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma(\mu)}{2^{\frac{1}{2}-\mu}\pi^{\frac{1}{2}-\mu}e^{\gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}}\right]^{\pi},$$

où μ est un nombre réel compris entre o et 1; de cette formule pour $\mu = \frac{1}{4}$ et $\mu = \frac{1}{3}$, M. Rogel a déduit les résultats suivants où K_0 et K_1 sont les intégrales elliptiques complètes pour les modules sin 45° et sin 15° :

$$\frac{4K_0^2}{\pi^2 e^r} = \prod_{p=3}^{p=\infty} p^{f_0(p)}, \qquad \frac{2^{\frac{2}{3}}K_1^2}{\pi^2 e^r} = \prod_{p=2}^{p=\infty} p^{f_1(p)},$$

où p parcourt la suite des nombres premiers et où

$$f_0(p) = \frac{1}{-1+(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}, \qquad f_1(p) = \frac{1}{-1+\varepsilon p},$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1 suivant que p est congruent à 1 ou 2 suivant le module 3.

Après avoir repris la démonstration de ces derniers résultats, M. Glaisher transforme la formule générale de M. Rogel au moyen de la relation bien connue

$$\sin \pi x + \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \frac{\sin 4\pi x}{4} + \ldots = \frac{1}{2}\pi[x],$$

où $[x]$ représente $n - x$, en désignant par n le nombre impair le plus voisin de x; $[x]$ est supposé nul pour n entier. Au moyen de cette relation, M. Glaisher met la relation de M. Rogel sous la forme

$$\frac{1}{2}[2a] + \frac{1}{4}[4a] + \frac{1}{8}[8a] + \ldots - \frac{1}{3}[3a] + \frac{1}{9}[9a] + \ldots - \frac{1}{5}[5a] + \frac{1}{25}[25a] + \ldots + \ldots = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}a\right)}{(2\pi e^{\gamma})^{1-a}\,\Gamma\left(1-\frac{1}{2}a\right)},$$

où a est supposé compris entre o et $\frac{1}{2}$.

[redacted]

d'un potentiel

$$V = \frac{1}{2}(Px^2 + Qy^2 + Rz^2),$$

où P, Q, R sont des constantes, et de forces normales à la surface s'exprimant par la formule

$$Sx^2 + Ty^2 + Uz^2,$$

où S, T, U sont encore des constantes.

Love (*A.*). — Note sur la démonstration, d'après M. Cullovin, de la théorie des parallèles. (353-356).

Brill (*I.*). — Sur certaines propriétés générales des transformations ponctuelles. (356-362).

Si l'on considère une transformation ponctuelle dans le plan : à un faisceau de directions issues d'un point, formé, si l'on veut, par les tangentes à des courbes qui passent par ce point, correspond un faisceau homographique de directions, constitué par les tangentes aux courbes correspondantes : l'auteur généralise cette proposition pour l'espace à n dimensions.

Dixon (*A.*). — Sur un théorème de Dynamique dû à Jacobi. (362-366).

C'est le théorème sur la réduction au mouvement d'un corps solide ayant un point fixe sans forces extérieures, du mouvement d'un corps solide pesant de révolution fixé par un point de son axe; M. Dixon revient sur cette proposition à propos d'un article de M. Routh inséré dans le tome XXIII du *Quarterly Journal*.

Dickson (*Z.*). — Nombres cycliques. (366-377).

Un nombre ($A_1 A_2 \ldots A_{D-1} A_D$) de D chiffres A_1, A_2, A_D, écrit dans la base N, a des multiplicateurs cycliques s'il y a D entiers différents $B_1 = 1$, B_2, ..., B_D tels que le produit du nombre donné par chacun des nombres B reproduise les chiffres du nombre donné dans le même ordre circulaire. Tel est le nombre 142857, dans la base 10. Les nombres $\frac{N^D - 1}{P}$, où P est premier à N, est cyclique si N appartient à l'exposant D, *modulo* P.

Hudson (*E.*). — Sur un triangle sphérique formé de petits cercles. (378-386).

Tome XVIII; 1897.

Glaisher. — Produits et séries procédant suivant les nombres premiers (2[e] Partie). (1-174).

La première Partie de ce Mémoire a paru dans le Volume précédent du *Quarterly Journal*; quelques points qui se rapportent au même sujet ont été traités dans les n[os] du *Messenger* analysés récemment dans le *Bulletin*. Dans

la première Partie, l'auteur introduit des fonctions qu'il désigne par le symbole

$$\mathrm{ilg}_n x$$

et qui jouent dans ses recherches un rôle essentiel.

Ces fonctions se déduisent par des intégrations successives du logarithme de la fonction Γ, comme il suit

$$\mathrm{ilg}_1 x = \mathrm{ilg}\, x = \int_0^x \log\Gamma(z)\,dz,$$

$$\mathrm{ilg}_n x = \int_0^x \mathrm{ilg}_{n-1} z\,dz.$$

M. Glaisher donne un très grand nombre de propriétés concernant ces fonctions, pour les petites valeurs de l'indice, et pour les valeurs simples de x.

Les constantes numériques A_n, qui interviennent dans un grand nombre des formules de M. Glaisher, sont définies par la relation approchée pour de grandes valeurs de x,

$$1^{1^n} 2^{2^n} 3^{3^n} \dots x^{x^n} = A_n x^{f(x,n)} e^{F(x,n)},$$

où l'on suppose

$$f(x, n) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2} x^n + \frac{B_1}{2!} n x^{n-1} - \frac{B_2}{4!} n^{(3)} x^{n-3} + \frac{B_3}{6!} n^{(5)} x^{n-5} - \dots,$$

$$F(x, n) = -\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{B_1}{2!} n\left(\frac{1}{n}\right) x^{n-1} - \frac{B_2}{4!} (n)^{(3)}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}\right) x^{n-3}$$
$$+ \frac{B_3}{6!} n^{(5)}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-4}\right) x^{n-5} - \dots,$$

où $B_1, B_2, B_3, \dots$ sont les nombres de Bernoulli, où $n^{(r)}$ est mis à la place de $n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$, et où l'on ne conserve que les termes contenant les puissances positives de x, en gardant pour $f(x, n)$, et non pour $F(x, n)$ les termes indépendants de x, s'il y en a. A_0, comme on sait, est égal à $\sqrt{2\pi}$: l'auteur donne, en outre, les valeurs numériques de $\log A_n$ pour $n = 1, 2, 3, 4$. Les nombres $\log A_n$ peuvent être regardés comme des généralisations de la constante d'Euler γ.

Dans diverses relations s'introduit le polynome de Bernoulli

[redacted]

valable pour x compris entre 0 et 1, et celles-ci :

$$\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^{2n+1}} + \frac{\sin 6\pi x}{3^{2n+1}} + \ldots$$
$$= (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} \varphi(|x|_0, 2n+1),$$
$$\cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^{2n}} + \frac{\cos 6\pi x}{3^{2n}} + \ldots$$
$$= (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!} [\varphi(|x|_0, 2n) + (-1)^{n-1} B_n],$$

où $|x|_0$ désigne la mantisse du nombre positif x. Ces notations expliquées, nous pouvons maintenant donner une proposition générale relative à un produit infini où p doit prendre toutes les valeurs premières 2, 3, 5, 7, 11, ..., et dont M. Glaisher étudie un grand nombre de cas particuliers intéressants. Dans les relations qui suivent, la fonction $B_n(x)$ est mise à la place de $\frac{\varphi(x, n)}{n}$, et m_r désigne le coefficient binomial $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{r!}$.

En posant

$$\frac{1}{2}\theta(p, n) = \frac{B_n(|px|_0)}{p^n} + \frac{B_n(|p^2 x|_0)}{p^{2n}} + \frac{B_n(|p^3 x|_0)}{p^{3n}} + \ldots,$$

on a

$$\prod_2^\infty p^{\theta(p, 2n+1)} = (2\pi e^\gamma)^{-2B_{2n+1}(x)} A_0^{-[(1-x)^{2n} - x^{2n}]}$$
$$\times A_1^{-2n[(1-x)^{2n-1} - x^{2n-1}]} A_2^{-(2n)_2[(1-x)^{2n-2} - x^{2n-2}]} \ldots$$
$$\times A_{2n-2}^{-(2n)_2[(1-x)^2 - x^2]} A_{2n-1}^{-2n[(1-x) - x]} e^{(2n)!\,[\mathrm{ilg}_{2n}(1-x) - \mathrm{ilg}_{2n}(x)]},$$

$$\prod_2^\infty p^{\theta(p, 2n)} = (2\pi e^\gamma)^{-2B_{2n}(x)} A_0^{(1-x)^{2n-1} + x^{2n-1}}$$
$$\times A_1^{(2n-1)[(1-x)^{2n-2} + x^{2n-2}]} A_2^{(2n-1)_2[(1-x)^{2n-3} - x^{2n-3}]} \ldots$$
$$\times A_{2n-3}^{(2n-1)_2[(1-x)^2 + x^2]} A_{2n-2}^{(2n-1)[(1-x) + x]}$$
$$\times e^{-(2n-1)\,[\mathrm{ilg}_{2n-1}(x) + \mathrm{ilg}_{2n-1}(1-x)]},$$

[illegible] doit être compris entre 0 et 1.

Signalons encore la relation particulière

$$\prod_2^\infty p^{\frac{1}{p^{2n}-1}} = \frac{A_{2n-1}^{(-1)^{n-1}\frac{2n}{B_n}}}{2\pi e^\gamma},$$

et enfin l'introduction des fonctions $ga_n(x)$ liées à la fonction Γ et définies par la formule

$$ga_n(x) = A_0^{-x^n} A_1^{-nx^{n-1}} A_2^{-(n)_2 x^{n-2}} \ldots A_{n-2}^{-(n)_2 x^2} A_{n-1}^{-nx}$$
$$\times e^{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) B_{n+1}(x)} \times e^{n!\,\mathrm{ilg}_n(x)},$$

dont la première est identique avec la fonction $G(x)$, considérée par M. Kinkelin (*Crelle*, LVII) et définie par l'équation

$$\log G(x) = \int_0^x \log\Gamma(z)\,dz + \frac{1}{2}x(x-1) - \frac{1}{2}x\log(2\pi),$$

qui jouit de la propriété

$$G(x+1) = x^x G(x).$$

Walker. — Sur la toupie. (175-184).

Description et explication d'expériences relatives à des cas singuliers du mouvement de la toupie.

Brill (*J.*). — Note sur la forme de l'intégrale de l'énergie dans le mouvement d'un fluide incompressible. (185-192).

Cette intégrale est obtenue en partant de la condition pour que l'expression

$$F\,dx + G\,dy + H\,dz + K\,dt$$

puisse être ramenée à la forme $d\alpha + m\,d\beta$. L'auteur examine successivement le cas d'un fluide parfait et celui d'un fluide visqueux.

Mathews (*G.*). — Un lieu géométrique. (190-192).

Le lieu des points de l'espace d'où l'on voit deux segments donnés AB, CD sous des angles égaux ou supplémentaires se compose de deux surfaces cubiques distinctes. La question est traitée en coordonnées projectives.

Miller (*G.*). — Liste des groupes de substitutions transitifs de degré 12. (193-231).

Cette liste est précédée d'explications théoriques. L'auteur étudie d'abord séparément les groupes imprimitifs suivant le nombre de lettres contenues dans

[redacted]

Cette méthode, que l'auteur a déjà donnée dans le *Messenger of Mathematics* (t. XXIV), et qu'il perfectionne ici, consiste essentiellement à limiter la somme de deux facteurs complémentaires du nombre donné ou d'un multiple de ce nombre, en déterminant une congruence que doit vérifier cette somme. Si, par exemple, le nombre est de la forme $3m+2$, il est clair que la somme de deux facteurs complémentaires doit être divisible par 3 : on n'aura donc à essayer pour cette somme que le tiers des nombres entiers inférieurs à sa limite supérieure. La méthode est naturellement d'autant plus pratique que le module de la congruence est plus grand.

Maddison (Miss). — Sur les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre et les propriétés géométriques de certains invariants et covariants des intégrales complètes. (311-374).

Le Mémoire de Miss Maddison a été analysé dans la première Partie du *Bulletin*.

Dixon. — Les ovales de Descartes. (375-376).

Scott (Miss). — Note sur les courbes adjointes. (377-384).

Utilité d'introduire la considération des courbes adjointes dans la géométrie des courbes planes algébriques; c'est le réseau des courbes de degré $n-3$, adjointes à une courbe donnée de degré n, qui permet, en général, de transformer celle-ci en une courbe de degré minimum. Si les adjointes sont unicursales, elles fournissent une transformation de Cremona.

Tome XXIX; 1898.

Glaisher. — La fonction de Bernoulli. (1-168).

Le Mémoire de M. Glaisher contient un très grand nombre de résultats concernant la fonction de Bernoulli

$$B_n(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{n-1}{2!}B_1 x^{n-2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}B_2 x^{n-4} + \ldots,$$

sur les nombres de Bernoulli $B_1, B_2, \ldots$, les nombres d'Euler et d'autres nombres analogues qui se rencontrent dans des développements de fonctions circulaires ou hyperboliques, etc.

Au lieu de considérer la fonction $B_n(x)$ elle-même, l'auteur est amené, pour la simplification des résultats, à considérer deux polynomes liés étroitement à celle-ci et que définissent les égalités qui suivent :

$$V_n(x) = x^n - \frac{1}{2}nx^{n-1} + (n)_2 B_1 x^{n-2} - (n)_4 B_2 x^{n-4} + \ldots,$$

le dernier terme étant $(-1)^{m+1}(2m+1)B_m x$ si n est égal à $2m+1$, e $(-1)^{m+1}B_m$ si n est égal à $2m$. Le symbole $(n)_r$ est mis à la place de $\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}$;

$$U_n(x) = \frac{1}{2}nx^{n-1} - (n)_2(2^2-1)B_1 x^{n-2} + (n_4)(2^4-1)B_2 x^{n-4} - \ldots;$$

le dernier terme étant $(-1)^m(2m+1)(2^{2m}-1)B_m x$ ou $(-1)^m(2^{2m}-1)B_m$ suivant que x est égal à $2m+1$ ou à $2m$. $V_n(x)$ ne diffère que par le facteur n du polygone $B_n(x)$ de Bernoulli si n est impair; il en diffère, en outre, par le dernier terme si n est pair. On suppose enfin $U_0(x)=0$, $V_0(x)=1$.

$U_n(x)$, $V_n(x)$ vérifient la même équation symbolique

$$(a)\qquad U_n(x)=(E+x)^n U_0(x),\qquad V_n(x)=(E+x)^n V_0(x),$$

où E est un opérateur défini, suivant les cas, par les équations

$$EU_n(x)=U_{n+1}(x),\qquad EV_n(x)=V_{n+1}(x).$$

Notons les relations suivantes, dont plusieurs se rapportent à des propriétés bien connues de la fonction de Bernoulli :

$$V_n(1-x)=(-1)^n V_n(x),\qquad U_n(1-x)=(-1)^{n-1}U_n(x),$$

$$\frac{d}{dx}V_n(x)=nV_{n-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}U_n(x)=nU_{n-1}(x),$$

$$U_n(x)-V_n(x)=2^n V_n\left(\frac{x}{2}\right).$$

$$\left.\begin{aligned} V_n(x)-V_n(0)&=n[1^{n-1}+2^{n-1}+\ldots+(x-1)^{n-1}]\\ (-1)^n U_n(x)-U_n(0)&=n[1^{n-1}-2^{n-1}+\ldots+(-1)^n(x-1)^{n-1}]\end{aligned}\right\}\ (x \text{ entier}),$$

$$V_n(x)+V_n\left(x+\frac{1}{k}\right)+V_n\left(x+\frac{2}{k}\right)+\ldots+V_n\left(x+\frac{k-1}{k}\right)=\frac{1}{k^{n-1}}V_n(kx),$$

$$U_n(x)-U_n\left(x+\frac{1}{k}\right)+U_n\left(x+\frac{2}{k}\right)+\ldots+U_n\left(x+\frac{k-1}{k}\right)=\frac{1}{k^{n-1}}U_n(kx);$$

dans la dernière relation k est supposé impair.

$$\sin 2\pi x-\frac{\sin 4\pi x}{2^{2n+1}}+\frac{\sin 6\pi x}{3^{2n+1}}+\ldots=(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}V_{2n+1}(x),$$

$$\cos 2\pi x+\frac{\cos 4\pi x}{2^{2n}}+\frac{\cos 6\pi x}{3^{2n}}+\ldots=(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}V_{2n}(x);$$

[redacted]

ces formules en engendrent un très grand nombre d'autres; en particulier l'équation symbolique (a) et l'introduction du symbole opérateur E dans les séries qui précèdent, suivant les puissances de a, fournissent beaucoup de résultats intéressants, parmi lesquels quelques-uns ont été signalés par M. J. Blissard (*Quarterly journal*, t. IV; 1861), retrouvés par E. Lucas (*Comptes rendus*, t. LXXXIII, p. 539; 1876), et d'autres sont dus à M. Cesàro (*Nouvelle correspondance mathématique*, t. VI). Les valeurs des polynomes $U_n(x)$, $V_n(x)$, pour des valeurs simples de la variable comme $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \ldots$ fournissent précisément les nombres de Bernoulli, d'Euler et les nombres analogues auxquels nous avons fait allusion plus haut. Signalons enfin la sommation au moyen de ces nombres de séries analogues aux séries harmoniques, et l'étude d'autres séries du même genre, mais où ne figurent que des nombres premiers.

Dickson. — Un système triplement infini de groupes simples. (169-178).

Généralisation de résultats obtenus par M. Jordan (*Traité des substitutions*, p. 171-179) sur la décomposition des groupes abéliens étudiés par M. Hermite dans leur connexion avec la transformation des fonctions abéliennes.

Roberts. — Sur un système doublement infini de figures dans l'espace à la fois inscrites et circonscrites. (179-195).

L'auteur a entrepris dans diverses directions des recherches pour étendre à l'espace la belle théorie de Poncelet sur les polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre. Il a montré, en particulier, l'existence d'une double infinité de polygones respectivement tangents à deux quadriques confocales (*Proceedings of the London Mathematical Society*, t. XVIII). Dans le présent Travail il étudie une double infinité de polygones inscrits à une cyclide dont les côtés coupent le cercle imaginaire à l'infini et touchent une cyclide confocale.

Crawford (*L.*). — Sur les facteurs des solutions en termes finis de l'équation de Lamé

$$\frac{d^2 U}{du^2} = U[n(n+1)pu + B].$$

L'auteur étudie, en particulier, le cas de m pair $= 2m$ et de $m+1$ solutions du type

$$a_m p^m u + a_{m-1} p^{m-1} u + \ldots + a_0$$

qui correspondent aux $m+1$ racines d'une équation en B, dont il montre de deux façons qu'elle a ses racines réelles et inégales.

Hudson. — Démonstration géométrique de formules de Trigonométrie sphérique et application à l'Astronomie. (202-205).

Blythe. — Sur la construction des modèles d'une surface du troisième degré. (206-223).

Miller. — Sur les groupes transitifs de substitutions du treizième et du quatorzième degré. (224-249).

Pour les groupes du treizième degré, notons les résultats suivants : si un groupe transitif de degré 13 ne contient pas le groupe alterné de ce même degré, il est au plus deux fois transitif et son ordre est de la forme $2^\alpha.3^\beta.13$. Tout groupe transitif de degré 13 qui contient plus d'un sous-groupe d'ordre 13, sans contenir le groupe alterné de ce degré, contient exactement 144 sous-groupes de cet ordre. Chaque groupe transitif simple de degré 13 est contenu dans le groupe métacyclique de ce degré. Le groupe simple d'ordre 5616 est l'objet d'une étude spéciale. Pour les groupes de degré 14 l'étude est divisée en deux parties : groupes imprimitifs et groupes primitifs. Les premiers sont étudiés successivement d'après la nature du système d'intransitivité. Il n'y a pas de groupe primitif simplement transitif. Outre les groupes symétriques et alterné il y a deux groupes plusieurs fois transitifs dont les ordres sont 1092 et 2184. Une liste des différents groupes transitifs de degré 13 ou 14 termine le Mémoire de M. Miller.

Maillet. — Sur les groupes d'ordre fini. (250-269).

Soient λ un nombre donné, et p, q des nombres premiers différents, G un groupe de substitutions d'ordre $\overline{G}$.

1° Si $\overline{G}$ est égal à λp^m, G renferme un sous-groupe invariant d'ordre p^t, sauf peut-être pour des valeurs de p et m limitées en fonction de λ.

2° Si $\overline{G}$ est égal à $\pi p^i q^\beta$ ($\beta \geqq 1$, $i \leqq 2$, $p < q$), G renferme un sous-groupe invariant d'ordre q^β, sauf peut-être pour des valeurs de p, q limitées en fonction de λ.

Un groupe donné d'ordre $p^2 q^2 r^2$ (p, q, r étant des nombres premiers différents) est composé; par suite, il est résoluble, sauf peut-être pour quelques [redacted]



par $S(\alpha\beta\gamma)$ l'expression

$$(1-\cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C)^{\frac{1}{2}}$$

relative au trièdre formé par les trois plans α, β, γ, dont A, B, C sont les dièdres, la fonction

$$\frac{S(123)\,S(145)\,S(256)\,S(364)}{S(465)\,S(413)\,S(632)\,S(521)}$$

qui reste invariable par une transformation linéaire. L'auteur étend ses recherches à l'espace à n dimensions.

Glaisher. — Formules générales de sommation. (303-328).

Reprenant les notations exposées dans l'analyse du précédent Mémoire de l'auteur, nous désignerons par V_n, U_n les valeurs pour $x = 0$ des polynomes $V_n(x)$, $U_n(x)$. La formule sommatoire d'Euler prend alors la forme symbolique très simple

$$\sum \varphi(x) = \int \varphi(x+V)\,dx + C,$$

où il faut entendre que $\varphi(x+V)$ étant développé par la formule de Taylor, suivant les puissances de V, on remplace $V, V^2, V^3, \ldots$ par $V_1, V_2, V_3, \ldots$. Une autre formule (symbolique) assez curieuse est la suivante :

$$\sum \varphi(x) = C + x\,\varphi(V) + \frac{x^2}{2!}\varphi'(V) + \frac{x^3}{3!}\varphi''(V) + \ldots.$$

Signalons les formules générales

$$\sum \varphi(x) = \int \varphi(x-a+e)\,dx.V_0(a) + C,$$

$$\sum (-1)^x \varphi(x) = (-1)^{x-1}\int \varphi(x-a+e)\,dx.U_0(a) + C,$$

où il faut entendre que $\varphi(x-a+e)$ est développé par la formule de Taylor suivant les puissances de e et que e doit être regardé comme un opérateur tel que l'on ait

$$eV_n(a) = V_{n+1}(a), \qquad eU_n(a) = U_{n+1}(a).$$

On peut aussi développer $\varphi(x-a+e)$ suivant les puissances de $(x-a)$ et remplacer, par exemple, $\varphi^{(n)}(e)V_0(a)$ par $\varphi^{(n)}[V(a)]$, où il est entendu que, dans cette dernière expression, $V^p(a)$ est remplacé par $V_p(a)$. L'auteur donne des applications de ces formules sommatoires aux cas $a = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$, et l'on voit alors apparaître comme coefficients les nombres de Bernoulli, d'Euler, etc. Notons encore les théorèmes qu'expriment les égalités symbo-

liques

$$\varphi(e)\,V_0(x) = \varphi(e-a)\,V_0(x+a),$$

$$\varphi(e)\,U_0(x) = \varphi(e-a)\,U_0(x+a).$$

Scott (Miss). — **Études sur la transformation des courbes algébriques planes.** (329-381).

Ces *études*, qui seront ultérieurement continuées, constituent une intéressante exposition de la théorie de la transformation rationnelle, théorie qui, comme l'auteur le fait justement observer, est présentée d'habitude avec une trop grande généralité. L'auteur n'a pas voulu borner son Mémoire à l'établissement de quelques faits nouveaux, mais bien donner une exposition d'ensemble; la lecture de son Travail en est d'autant plus profitable.

Mlle Scott, reprenant les choses au début, montre le rôle du réseau de courbes qui servent à définir la transformation rationnelle ($\varkappa$, 1), de multiplicité x, du plan des x dans le plan des x', définit les points fondamentaux et les courbes fondamentales, établit les propriétés essentielles du jacobien J, de la courbe correspondante J' et du *compagnon* j de la courbe J; à un point de J' correspondent, dans le plan des x, deux points sur J et $\varkappa - 2$ points sur j. Mlle Scott montre le rôle important de cette courbe j, dont les relations avec la courbe J déterminent les singularités ponctuelles et tangentielles de la courbe J'; elle désigne cette dernière courbe J' sous le nom de *courbe synoptique*, parce qu'elle résume en quelque sorte les caractères du réseau. Les courbes J et j, quelques courbes du réseau convenablement choisies dans le plan des x, la courbe synoptique et les droites correspondant aux courbes du réseau dans le plan des x' permettent de diviser les deux plans en régions; $\varkappa$ (au plus) régions du plan des x correspondant à une seule région du plan des x'. L'auteur montre comment, ces régions une fois déterminées, l'effet de la transformation sur une courbe quelconque devient, en quelque sorte, intuitif. En terminant, Mlle Scott donne plusieurs exemples simples, qui peuvent être traités en détail.

Walker. — **Un théorème sur le mouvement vorticellaire.** (382-384).



ZEITSCHRIFT für Mathematik und Physik.

38e année; 1893 ([1]).

Bützberger (*F.*). — Sur certaines affinités particulières. (1-6).

Correspondance homographique avec conservation du plan de l'infini quand les trois droites qui coïncident avec leurs correspondantes forment un trièdre trirectangle.

Mehmke (*R.*). — Recherches sur les propriétés concernant la courbure des lignes et des surfaces dans les transformations de contact. (7-26).

Étant données plusieurs courbes tangentes en un point, les centres de courbures relatifs à ce point et les centres de courbure des courbes transformées par une transformation de contact se correspondent homographiquement. Conséquences diverses.

Lohnstein. — Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre. (27-33).

Si l'on a un système de solutions de la forme

$$y_1 = P_1(x), \qquad y_2 = P_1(x) \log x + P_2(x),$$

la connaissance de la série $P_1(x)$ simplifie la recherche de la série $P_2(x)$.

Sporer (*B.*). — Sur une courbe spéciale liée à un faisceau de coniques. (34-47).

Enveloppe des tangentes aux courbes du faisceau qui passent par les points d'une droite.

Kurz (*A.*). — Sur la pression hydraulique. (48-56).

Rœdel (*E.*). — Déduction d'une nouvelle formule pour l'aire d'une zone d'un ellipsoïde de révolution. (56-60).

Anton (*L.*). — Sur un nouveau procédé pour la mise en équation des résultats d'une table de mortalité. (61-64).

Beyel (*C.*). — Représentation des courbes de troisième ordre et de troisième classe au moyen de deux réciprocités. (65-83).

([1]) Voir *Bulletin*, t. XXII$_2$, p. 79.

Le point de départ de l'auteur est le suivant : considérant trois points fixes A, B, C et le réseau de coniques passant par ces trois points : à chaque point P du plan correspond une conique du réseau passant par le point P et telle que le rapport anharmonique des quatre points A, B, C, P sur la conique soit donné; si l'on considère deux correspondances de cette sorte, à chaque point P correspondront les trois points d'intersection des deux coniques qui correspondent au point P. Cette correspondance est appliquée à de nombreuses constructions relatives aux courbes de troisième ordre et de troisième classe.

Schendel (*L.*). — Mélanges mathématiques. (84-94).

Étude d'un déterminant égal au produit des différences de *n* quantités, différences affectées d'exposants. Formation du résultant de deux équations. Pour le Théorème de Sturm.

Pund (*O.*). — Sur les mouvements périodiques d'un point matériel sur une surface du second ordre avec une étude particulière des cas limites. (95-104, 165-189).

Forme générale des deux intégrales premières. *Exemples :* Mouvements sur les surfaces de révolution du second ordre : cas où il n'y a pas de forces extérieures; cas d'un point pesant. Relations entre les périodes. Mouvement d'un point matériel sur une surface à centre sous l'influence d'une force émanant de ce centre et proportionnelle à la distance : distinction des diverses formes de mouvement d'après les valeurs des constantes. Cas singuliers.

Müller (*R.*). — Construction des points de Burmester pour un quadrilatère plan articulé. (129-147).

Suite d'un Mémoire inséré dans le Tome précédent, où l'auteur a montré comment on pouvait obtenir deux points (réels ou imaginaires) dont la trajectoire a un contact du quatrième ordre avec son cercle de courbure. Dans l présent Travail, il étudie divers cas particuliers et montre comment ses



Soit UTWV un quadrilatère articulé en ses sommets, qui se l'ordre indiqué; soit F un foyer d'une conique inscrite dans l il existe des points A, B, C, D respectivement situés sur les côté WT, tels que les quadrilatères TDFA, UBFA soient respectivem aux quadrilatères FCVC, FDWC, les points correspondants occupent le même rang dans les notations des quadrilatères; si l'on suppose ces quatre quadrilatères articulés en leurs sommets, on obtient un mécanisme, composé de huit tiges et comportant neuf points d'articulation que M. Burmester désigne sous le nom de *mécanisme focal*, et dont il étudie les intéressantes propriétés géométriques.

Kurz (*A.*). — Pour la théorie de la dilatation des corps creux. (224-236).

Wölffing (*E.*). — Le rapport des rayons de courbure au point de contact de deux courbes. (237-249).

Une transformation homographique laisse ce rapport invariant.

Bochow. — Méthode simple pour le calcul du polynome régulier de dix-sept côtés. (250-252).

Meyer (*T.*). — Sur une relation de puissance pour les courbes du second ordre. (253-256).

Les cercles décrits sur les cordes d'une conique qui passent par un point fixe comme diamètres ont même puissance par rapport à un point fixe.

Disteli (***M.***). — Sur les points d'osculation d'une courbe plane du troisième ordre avec une courbe plane du $n^{\text{ième}}$ ordre. (257-281).

Étude sur une courbe donnée du $3^{\text{ième}}$ ordre, des points qui peuvent avoir un contact du $(3n-1)^{\text{ième}}$ ordre avec une courbe d'ordre n. L'auteur examine successivement le cas d'une cubique générale et celui d'une cubique rationnelle; les résultats dépendent de la forme du nombre n et conduisent à des configurations intéressantes.

Stoll. — Quelques méthodes pour la détermination des foyers et des axes d'une conique en coordonnées trilinéaires. (282-309).

Schlömilch. — Sur la construction du quadrilatère dont les côtés sont les rayons des cercles inscrits à un triangle. (310-313).

Muth. — Sur la position hyperboloïdique de deux tétraèdres. (314-315).

Voigt (*A.*). — Une extension du concept de maximum. (315-317).

Sporer (B.). — Théorèmes de Géométrie. (318-319).

Kurz (A.). — Déviation minimum dans le prisme. (319-320).

Lipps (G.). — La forme normale des expressions construites avec des radicaux et des propriétés. (321-343).

L'objet essentiel de l'auteur est de reprendre par une voie nouvelle le problème de la résolution par radicaux d'une équation algébrique. Il se place, non au point de vue arithmétique, mais au point de vue de la théorie des fonctions en considérant les coefficients de l'équation considérée comme des fonctions de variables indépendantes, ou même comme étant eux-mêmes ces variables indépendantes. Les racines de l'équation algébrique apparaissent alors comme des fonctions de ces variables indépendantes, définies par l'expression même.

Considérant maintenant une suite d'opérations définies par les égalités

$$
\begin{aligned}
[x^{(1)}]^{n_1} &= R_1(a_1, a_2, \ldots, a_\mu),\\
[x^{(2)}]^{n_2} &= R_2(x^{(1)}, a_1, a_2, \ldots, a_\mu),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
[x^{(\nu)}]^{n_\nu} &= R_\nu[x^{(\nu-1)}, \ldots, x^{(2)}, x^{(1)}, a_1, a_2, \ldots, a_\mu],
\end{aligned}
$$

où les R désignent des fonctions entières par rapport aux x et rationnelles par rapport aux variables indépendantes a, puis une fonction rationnelle quelconque formée au moyen des x et des a, les diverses valeurs que peut prendre cette fonction rationnelle peuvent être individualisées, en assujettissant les a à rester dans un domaine convenable et chacune peut être représentée par une expression de la forme

$$\sum_{\alpha_1=0}^{\alpha_1=n_1-1} \cdots \sum_{\alpha_\nu=0}^{\alpha_\nu=n_\nu-1} \varepsilon_{n_1}^{\alpha_1\lambda_1+\ldots+} \varepsilon_{n_\nu}^{\alpha_\nu\lambda_\nu} a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu},$$

où les ε désignent des racines de l'unité et où $a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu}$ est une série de

[redacted]

Jürges (*W.*). — Mécanismes pour la descripl n coniques. (350-356).

Mécanismes pour la description d'une conique déterminée par cinq points, par cinq tangentes.

Netto (*E.*). — Sur les équations aux dérivées partielles qui vérifient les fonctions symétriques des racines des équations algébriques. (357-365).

Remarques sur les équations

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} x_\lambda^i \frac{\partial R}{\partial x_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (S_i C_{\lambda-1} - S_{i+1} C_{\lambda-2} + \ldots) \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \lambda S_{i+\lambda-1} \frac{\partial R}{\partial s_\lambda},$$

$$\sum_{\lambda=k}^{\lambda=n} C_{\lambda-k} \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} = (-1)^{k-1} k \frac{\partial R}{\partial s_k},$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont les racines et $S_0, S_1, S_2, \ldots$ les sommes des puissances semblables des racines de l'équation

$$x^n - C_1 x^{n-1} + C_2 n^{n-2} - \ldots,$$

et où R désigne une fonction symétrique des racines. Aprés avoir établi d'une façon simple ces équations, que l'on doit à Brioschi, l'auteur montre qu'elles ne caractérisent nullement les fonctions symétriques et en donne la solution générale.

Willgrod. — Sur les fractions continues qui proviennent de l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier. (366-370).

Table des racines carrées de tous les nombres entiers de 1 à 100, réduites en fraction continue. Le dernier nombre de la période est toujours le double de la partie entière de la fraction.

Kurz. — Le centre de la pression hydrostatique dans les figures planes. (371-374).

Helm (*G.*). — Une application de la théorie de l'échange au Calcul des probabilités. (374-376).

Kilbinger. — Sur un complexe de droites quadratiques dégénéré. (376-381).

Cas où le complexe de Reye (engendré par deux systèmes polaires dans l'espace) se décompose en deux systèmes linéaires.

Thomae (*J.*). — Sur le Théorème de Pascal dans le cas des points imaginaires. (381-383).

Beau (*O.*). — Analogue dans l'espace du Théorème de Pythagore.

Partie historique.

Suter (*H.*). — Le cinquième Volume des Livres arabes de la bibliothèque vice-royale du Caire. (1-24, 41-57, 161-183).

Hunrath (*K.*). — Pour l'histoire des fractions décimales. (25-27).

Cantor (*M.*). — Un papyrus mathématique en langue grecque. (81-87).

Berthold (*G.*). — Notes pour l'histoire de la Physique. (121-125).

Suter (*H.*). — Post-scriptum à ma traduction. (126-127).

39e année, 1894.

Lipps (*G.*). — La forme normale des expressions construites avec des radicaux et ses propriétés. (1-10).

Voir plus haut.

Kraus (*J.*). — Nouveaux fondements d'une théorie générale des nombres. (11-37).

[redacted]

droite perpendiculaire à sa polaire. Le pied d'un axe est le poi
coupé à angle droit par un plan conjugué.

Voigt (*A.*). — Sur les fonctions ordinales. (61-63).

Sur les grandeurs intensives (que l'on peut distinguer comme plus grandes ou plus petites).

Thomae (*J.*). — Sur la construction d'une conique au moyen de cinq points. (63).

Kurz. — Sur la formule qui donne les hauteurs au moyen de l'observation barométrique. (63-64).

Kloss, Pützer. — Remarques sur l
dans l'espace du Théorème de *re.*

Lipps (*G.*). — Sur la résolution des équations au moyen de la forme normale. (65-86).

Voir plus haut.

Kraft (*F.*). — Équivalence des systèmes de segments. (87-115).

Les systèmes de segments et leur équivalence sont étudiés au moyen du calcul géométrique.

Muth. — Forme projective d'un Théorème métrique. (116-117).

Schlömilch. — Sur la construction d'une conique au moyen de cinq points ou de cinq tangentes.

Soient T, T′ deux plans parallèles, P un plan quelconque qui le coupe suivant les droites Δ, Δ'; on fait la perspective du plan P sur le plan T en prenant le point de vue O dans le plan T′; considérons une droite du plan P qui coupe Δ, Δ' en α, α'; la perspective de $\alpha\alpha'$ sera la parallèle menée par le point α à la droite $O\alpha'$; si $\beta\beta'$ est de même une droite de P qui rencontre Δ, Δ' en β, β' la perspective de cette droite sera perpendiculaire à la perspective de $\alpha\alpha'$ si O est choisi, dans T′, sur le cercle décrit sur $\alpha'\beta'$ comme diamètre; de là le moyen, étant donnés le plan P, d'autre part cinq points a, b, c, d, e dans ce plan, de choisir, d'une part, les plans T et T′, le point O dans le plan T′, de l'autre, de manière que la perspective du quadrilatère $abcd$ soit un rectangle ABCD et que la perspective du triangle ace soit un triangle ACE rectangle en E; dès lors, les cinq points A, B, C, D, E sont sur un cercle dans le plan T et la conique passant par les cinq points a, b, c, d, e est la perspective de ce cercle faite sur le plan P. La solution du second problème est analogue.

Stoll. — Addition au Mémoire : *Quelques méthodes, etc.* (120-124).

Kurz. — Les capacités thermiques des corps solides et des vapeurs condensées, en particulier de l'eau. (124-128).

Kraft. — Équivalence des systèmes de segments. (129-161).

Heymann (W.). — Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. (162-182).

L'auteur, qui s'est spécialement occupé de la résolution transcendante des équations algébriques, publie un important Travail sur l'équation du cinquième degré. Une partie de son exposition, d'un caractère purement algébrique, concerne les diverses résolvantes (Brioschi, Jordan, Klein, etc.). Une autre partie se rapporte à la résolution de l'équation du cinquième degré au moyen de la série hypergéométrique. L'auteur résume comme il suit les résultats auxquels il parvient.

On vérifie l'équation

$$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0;$$

où α, β, γ sont des constantes en posant

$$y_\nu = \frac{(t_\nu \sqrt{rf} + sf) W_\nu}{H},$$

$$t_\nu = \varepsilon^{3\nu}\lambda_1^6 + 2\varepsilon^{2\nu}\lambda_1^5\lambda_2 - 5\varepsilon^{\nu}\lambda_1^4\lambda_2^2 - 5\varepsilon^{4\nu}\lambda_1^2\lambda_2^4 - 2\varepsilon^{3\nu}\lambda_1\lambda_2^5 + \varepsilon^{2\nu}\lambda_2^6,$$

$$W_\nu = -\varepsilon^{4\nu}\lambda_1^8 + \varepsilon^{3\nu}\lambda_1^7\lambda_2 - 7\varepsilon^{2\nu}\lambda_1^6\lambda_2^2 - 7\varepsilon^{\nu}\lambda_1^5\lambda_2^3 + 7\varepsilon^{4\nu}\lambda_1^3\lambda_2^5 - 7\varepsilon^{3\nu}\lambda_1^2\lambda_2^6 - \varepsilon^{2\nu}\lambda_1\lambda_2^7 - \varepsilon^{\nu}\lambda_2^8,$$

$$\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \qquad \nu = 0, 1, 2, 3, 4,$$

$$f = \lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{10} + 11\lambda_1^5\lambda_2^5 - \lambda_2^{10}),$$

$$H = -(\lambda_1^{20} + \lambda_2^{20}) + 228\lambda_1^5\lambda_2^5(\lambda_1^{10} - \lambda_2^{10}) - 494\lambda_1^{10}\lambda_2^{10};$$

les variables λ_1, λ_2 sont des intégrales particulières de l'équation différentielle hypergéométrique

$$I(1 - I)\frac{d^2\lambda}{dI^2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{6}I\right)\frac{d\lambda}{dI} + \frac{11}{3600}I = 0,$$

Enfin, dans une dernière Partie, il étudie la résolution des [illegible] au moyen de ce qu'il appelle une *chaîne de fonctions* : par exemple l'équation

$$x^n + x - c = 0,$$

où n est un entier impair et c un nombre positif, admet comme solution la limite de l'une ou de l'autre des expressions

$$\sqrt{c - \sqrt[n]{c - \sqrt[n]{c - \ldots \sqrt[n]{c - x^n}}}},$$
$$c - \left[c - \left[c - \ldots [c - x]^n\right]^n\right]^n,$$

suivant que $n^n c^{n-1} - (n+1)^{n-1}$ est positif ou négatif.

Haussner (*R.*). — Représentation indépendante des nombres de Bernoulli et d'Euler par des déterminants. (183-192).

Kurz. — Sur le frottement de glissement et de roulement dans la machine d'Atwood. (188-191).

Kurz. — Addition à ma Note sur les capacités thermiques. (192).

Fink. — Remarques sur l'Article : *Un analogue dans l'espace du Théorème de Pythagore.* (192).

Heymann (*W.*). — Sur la résolution des équations du cinquième degré. (193-202).

Goldsmith (*L.*). — Sur les nombres premiers relatifs. (203-212).

Démonstration d'une curieuse généralisation de l'expression $\varphi(m)$ du nombre de nombres premiers à m et inférieurs à m, due à M. Schemmel (*Crelle*, 70).

Heinrichs (*E.*). — Quelques propriétés métriques de l'hyperbole cubique. (213-227).

L'auteur parvient, en particulier, à la représentation paramétrique suivante, en coordonnées rectangulaires (λ est le paramètre variable) :

$$x = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3},$$
$$y = \frac{\lambda}{t_1} + \frac{\lambda}{t_2} + \frac{\lambda}{t_3},$$
$$z = \frac{a}{b}\left(f_1 \frac{t_2 - t_3}{t_1} + f_2 \frac{t_3 - t_1}{t_2} + f_3 \frac{t_1 - t_2}{t_3}\right);$$

en désignant par u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 les constantes vérifiant les conditions

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0, \qquad v_1 + v_2 + v_3 = 0,$$

et par ξ, η d'autres constantes arbitraires, on suppose

$$t_i = u_i + v_i \lambda, \qquad f_i = u_i \xi + v_i \eta - 1,$$
$$i = 1, 2, 3.$$

Sporer (*B.*). — Nouvelle déduction du Théorème de Cayley-Brill relatif aux systèmes de points sur une courbe algébrique. (228-236).

Démonstration simple du théorème découvert par induction par Cayley (*Comptes rendus*, t. LXII, p. 558), démontré par Brill (***Math. Ann.***, t. VI, p. 33; t. VII, p. 607; t. XXXI, p. 374) et relatif aux coïncidences d'une correspondance (α, β) sur une courbe plane de degré n et de genre p.

Grünfeld (*E.*). — Sur la représentation des invariants fondamentaux d'un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients uniformes. (237-244).

La question a été traitée par l'auteur dans le t. XXXVI de la ***Zeitschrift***, mais en laissant subsister certaines restrictions relatives au rayon du domaine dans lequel les représentations obtenues étaient valables; il montre actuellement comment on peut se débarrasser de ces restrictions en suivant une voie analogue à celle qu'a ouverte M. Mittag-Leffler, pour une équation différentielle linéaire d'ordre n (*Acta mathematica*, t. XV).

Schlömilch. — Sur la conique circonscrite ou inscrite à un pentagone. (245-247).

Remarques sur l'ingénieuse démonstration qui a été signalée plus haut.



on a

$$U = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left(1 + \frac{1}{8m} - \frac{\theta}{8m^2}\right) \frac{e^{-\frac{p}{m} + \frac{\theta' q}{m^2}}}{\sqrt{2m+1}},$$

en posant

$$p = \frac{(a-2)(2a-1)}{24a}, \qquad q = \frac{p}{120}\left[4\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 - 2\left(a+\frac{1}{a}\right) - 5\right],$$

et en désignant par θ, θ' des nombres compris entre 0 et 1.

Pietzker. — Nouvelle démonstration du Théorème d'addition pour les fonctions elliptiques de première espèce. (253-254).

Prix de la Société du prince Jablonowski (Section des Sciences mathématiques et physiques). (255-256).

Heymann (*W.*). — Sur la résolution des équations du cinquième degré. (257-272).

Heinrichs (*E.*). — Quelques propriétés métriques des hyperboles cubiques dans l'espace. (273-289).

Keller (*J.*). — Un système de coniques monofocales. (290-313).

Heymann (*W.*). — Sur le carré de l'intégrale d'une équation différentielle linéaire du second ordre. (314-315).

Thomae (*J.*). — Démonstration projective de ce Théorème : Le lieu des points d'où l'on voit une conique sous un angle droit est un cercle. (315-320).

Heymann (*W.*). — Sur la résolution des équations du cinquième degré.

Weiler (*A.*). — Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre. (355-375).

L'auteur a donné en 1863, dans le t. VIII de la *Zeitschrift*, une méthode pour l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, méthode dont il reprend l'exposition en la complétant et en la faisant précéder de renseignements historiques. Cette méthode exige moins d'intégrations que celle de Jacobi et a donné à Clebsch l'occasion de montrer comment il était possible de modifier l'exposition de Jacobi, de manière à n'avoir pas plus d'intégrations à faire que ne le demande la méthode de M. Weiler. Cette dernière repose sur l'intégration d'un système complet d'équations linéaires, mais qui n'est pas nécessairement un système jacobien.

Mayer (*J.*). — Sur les périodes complètes et complémentaires et sur la suite des restes d'une fraction décimale indéfinie. (376-382).

Netto (*E.*). — Sur l'itération des fractions rationnelles. (382-385).

On ne peut pas trouver une fraction rationnelle $\theta(x)$, d'un degré supérieur au premier, telle que l'on ait

$$\theta^n(x) = x,$$

θ^n étant mis à la place de $\theta[\theta[\ldots\theta(x)]]$.

Partie historique.

Ruoss (*H.*). — Histoire des anamorphoses optiques et catoptriques. (1-12).

Tannery (*P.*). — Un fragment des métriques de Héron. (13-16).

Wittstein (*A.*). — Sur la pendule hydraulique et l'astrolabe d'Arzachel. (41-56, 81-94).

Hultsch (*E.*). — Sur la mesure du cercle d'Archimède. (121-137, 161-172).

Cantor (*M.*). — Le prince Boncompagni. (201-203).

Droehlemann (*G.*). — Georg von Vega. (204-211).

Vicaire (*E.*). — De la valeur objective des hypothèses physiques à propos d'un article de M. P. Duhem. (451-510).

Les théories physiques n'ont pas simplement pour but de coordonner les lois ou de les présenter sous une forme plus simple. Leur but véritable est la connaissance de la nature, l'explication des lois par leurs causes; ce but n'est pas inaccessible et est seul capable de soutenir la curiosité scientifique.

Duhem (*P.*). — Physique et Métaphysique. (55-83).

Réponse à M. Vicaire. Voici les thèses de l'auteur : 1° La Physique étudie les phénomènes et les lois de la matière inorganique; la Métaphysique (Cosmologie) cherche à connaître la nature de cette matière comme cause des phénomènes et raison d'être des lois de la matière inorganique; 2° la Métaphysique peut suggérer une vérité physique nouvelle, mais la Physique seule peut l'établir; 3° la Physique repose sur des principes évidents dont la Métaphysique rend compte, sans rien ajouter à leur certitude dans le domaine de la Physique; 4° les théories physiques sont indépendantes de la Métaphysique et réciproquement; 5° cette thèse, conforme à la tradition, n'est pas une concession faite au scepticisme positiviste.

Duhem (*P.*). — L'école anglaise et les théories physiques, à propos d'un Livre récent de W. Thomson. (345-378).

Les Allemands et les Français ont une tendance à faire des théories physiques simples et logiques; les Anglais préfèrent des théories diverses même incohérentes entre elles, mais représentant à l'imagination les faits dans leur complexité totale.

Thirion (*J.*). — Deux passages curieux d'un Livre oublié. (563-572).

N. Cabeus, jésuite, dans sa *Philosophia magnetica* publiée à Ferrare en 1629, explique assez bien certains phénomènes capillaires et indique une expérience qui pourrait servir à décider si la gravité d'un corps décroît quand on s'éloigne du centre de la Terre. C'est l'expérience réalisée en 1878 par Von Jolly (*Annalen der Physik*, t. V, p. 112; 1878). Un ami de Cabeus qui avait tenté l'expérience en avait conclu la constance de la pesanteur, quand l'altitude varie.

Tome V; 1894.

Pas de Mathématiques.

Tome VI; 1894.

Duhem (*P.*). — Quelques réflexions au sujet de la Physique expérimentale. (179-229).

Une expérience de Physique n'est pas simplement l'observation d'un phéno-

mène; elle est, en outre, l'interprétation de ces phénomènes; elle substitue aux données de l'observation des représentations symboliques qui leur correspondent en vertu des théories physiques admises par l'observateur. Une expérience de Physique ne peut donc jamais condamner une hypothèse isolée, mais seulement tout un ensemble théorique. Le résultat d'une expérience de Physique est un jugement abstrait et symbolique, auquel l'expérience ne correspond qu'approximativement. Les lois symboliques de la Physique ne sont ni vraies, ni fausses, mais approchées, provisoires, mais de plus en plus précises et plus détaillées. Les philosophes ne doivent pas confondre ces lois avec des théorèmes mathématiques.

Mansion (*P.*). — Le prince B. Boncompagni. (262-264).

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES. **Dix-septième année, 1892-1893. Bruxelles, Schepens; Paris, Gauthier-Villars, 1893 (A, première Partie; B, seconde Partie).**

Mansion (*P.*). — Sur la fonction gamma. (A, 4-8).

En rapprochant divers résultats trouvés par Gilbert et Catalan, l'auteur parvient à établir, d'une manière élémentaire, pour une variable réelle ou imaginaire, les formules de Weierstrass, de Stirling, de Gudermann, de Gilbert et de Binet.

Vallée-Poussin (*C. de la*). — Sur l'intégration des équations différentielles. (A, 8-12).

Démonstration de l'existence d'un système d'intégrales à partir d'un système de valeurs initiales, par un procédé analogue à celui de Peano (*Mathematische Annalen*, t. XXXVII, p. 182-188), mais beaucoup plus simple.

[redacted]

Mansion (*P.*). — Sur la Trigonométrie élémentaire. (A

Salvert (*F. de*). — Sur le théorème de l'addition des
elliptiques et des fonctions hyperelliptiques. (A, 70-7

Dutordoir (*H.*). — Sur une généralisation possible du
théorème de Fermat. (A, 81).

Pasquier (*E.*). — Sur les solutions multiples du problème des comètes. (A, 82-83).

Ocagne (*d'*). — Sur les instruments et machines arithmétiques. (A, 84-86).

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Réfutation des objections du R. P. Leray contre la théorie de la tension superficielle des liquides. (A, 91-97).

Vallée-Poussin (*Ch.-J. de la*). — Sur quelques applications de l'intégrale de Poisson. (B, 18-34).

Si fx et Fx sont développables en séries trigonométriques uniformément convergentes et ne contenant que des cosinus, on trouve par multiplication de séries et intégration d'autres séries ayant pour somme les intégrales

$$A = \int_0^\pi Fx fx\, dx, \qquad B = \int_0^\pi Fx fx \cos px\, dx.$$

Au moyen de l'intégrale de Poisson, l'auteur montre que les développements de A et B ainsi obtenus subsistent même quand les séries de Fourier pour F et f ne subsistent plus; il suffit que les fonctions considérées soient intégrables; dans certains cas, les séries ont pour sommes A et B, même quand Fx et fx sont infinis.

Goedseels (*E.*). — Étude du mouvement d'un corps solide. (B, 35-58).

De Tilly. — Rapport. (A, 47-49).

Revision de la théorie habituelle : l'auteur examine avec soin si les fonctions auxiliaires introduites dans cette théorie ont des dérivées. Dans le Chapitre I, il démontre ce théorème : Si les trois coordonnées de trois points d'un solide ont des dérivées non infinies par rapport au temps, il en est de même des coordonnées de tout point et des cosinus directeurs de toute droite du solide. Dans le Chapitre II, il classe et étudie les mouvements des solides dont trois points jouissent de la propriété précédente.

Salvert (F. de). — Mémoire sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme. Chapitre VI. Applications, Note VI. Autre mode de détermination des intégrales déjà déterminées dans le Chapitre VI. (B, 103-272).

Humbert (G.). — Rapport. (A, 1-4).

Détermination par deux méthodes différentes, au moyen des coordonnées thermométriques, de l'intégrale d'un élément de volume dM, quand les limites de l'intégrale sont des couples de quadriques homofocales de famille différente; puis des intégrales de $(yz)^{2\alpha+1}dM$, et de $x^{\alpha}\,dM$. Centre de gravité, plans principaux, moments d'inertie principaux de ce volume; attraction exercée sur ce volume par un ellipsoïde homogène, particulièrement dans le cas où les deux centres de gravité coïncident. Les calculs, souvent longs et compliqués, sont exposés avec la clarté et l'élégance habituelle de l'auteur.

Vallée-Poussin (Ch.-J. de la). — Sur les applications de la notion de convergence uniforme. (A, 83-84, B, 325-330).

L'auteur établit avec rigueur et simplicité les propriétés fondamentales relatives à la dérivation des séries et des intégrales définies en partant du théorème suivant : Si $f(n, z)$ tend uniformément vers une limite $f(\infty, z)$ quand z reste à l'intérieur d'une aire T, $f(n, z)$ étant synectique pour les valeurs considérées de n, 1° $f(\infty, z)$ est une fonction synectique dans l'aire T; 2° $D_z^p f(n, z)$ tend uniformément vers $D_z^p f(\infty, z)$.

18e année; 1894.

Mansion (P.). — Sur l'éliminant de deux équations algébriques. (A, 5-8).

[redacted]

Mansion (*P.*). — Sur une opinion de Galilée relative à l'origine commune des planètes. (A, 46-49; 90-92).

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Démonstration très simple de la cause commune de la tension superficielle et de l'évaporation des liquides. (A, 49-53).

Ocagne (*M. d'*). — Démonstration des formules relatives à la composition des lois d'erreurs de situation d'un point publiées dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris (5 mars 1894). (A, 86-90).

Mansion (*P.*). — Sur une opinion de Galilée relative à la chute des corps. (A, 92-94).

Vicaire (*E.*). — Sur la constitution physique du Soleil. (A, 94-95).

Vicaire (*E.*). — Sur le principe de l'inertie et sur la notion du mouvement absolu en Mécanique. (A, 97-98).

Voir seconde Partie, p. 283-310.

Leray. — Sur la théorie des phénomènes capillaires. (A, 99-101).

Critique, sur un point essentiel, de la théorie des phénomènes capillaires de M. Van der Mensbrugghe.

Gilbert (*Ph.*). — Sur l'emploi des cosinus directeurs de la normale dans la théorie de la courbure des surfaces. (B, 1-24).

Vallée-Poussin (*Ch.-J. de la*). — Rapport. (A, 1-5).

Salvert (*de*). — Sur l'addition des fonctions hyperelliptiques. (B, 41-60).

Salvert (*de*). — Mémoire sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme. Introduction. (B, 61-94).

Introduction historique, analyse, table des matières et errata du Mémoire dont le titre vient d'être transcrit et qui a été publié *antérieurement* dans les *Annales de la Société scientifique*. Dans ce Mémoire, l'auteur a prouvé que la solution donnée, par Lamé, au problème dont il s'occupe est complète, ce que Lamé n'a pas établi. De plus, il a fait diverses applications des coordonnées dites thermométriques qui prouvent bien leur utilité.

Duhem (*P.*). — Fragments d'un cours d'Optique. (B, 95-123).

Essai d'exposition logique de l'Optique, sans recourir à aucune hypothèse sur la nature de la lumière. Le premier fragment est consacré au principe d'Huygens : 1° pour un milieu homogène illimité ; 2° à la surface de séparation de deux milieux. Toutes les hypothèses faites dans cet exposé de l'Optique sont énoncées explicitement.

Gilbert (*Ph.*). — Recherches sur les accélérations en général. Deuxième Partie. (Sur les accélérations d'ordre supérieur). (B, 205-282).

Suite d'un travail publié en 1889, dans le même recueil, t. XIII, deuxième Partie, p. 261-315. § 7 : Composantes normale, binormale et tangentielles de l'accélération d'ordre quelconque, en coordonnées rectilignes ou curvilignes ; § 8 : Application, 1° au mouvement d'une figure plane dans son plan ; § 9-10 2° au mouvement d'un solide ayant un point fixe ; § 11 : Accélérations dans les mouvements relatifs ; § 12 : Cas où le système de comparaison est animé d'un mouvement de translation ; § 13 : Applications diverses.

Vicaire (*E.*). — Sur la réalité de l'espace et le mouvement absolu. (B, 283-310).

Développement d'une idée indiquée plus haut. Historique : Newton, Euler, Kant, Neumann, Streintz. Le principe de l'inertie dont plusieurs expériences célèbres (pendule de Foucault, gyroscope, etc.) attestent le caractère absolu, c'est-à-dire l'indépendance vis-à-vis du système des étoiles fixes, conduit, selon l'auteur, à la notion d'un espace absolu. Voici la conclusion de ce travail : « Il faut placer en tête de la Science mécanique l'hypothèse d'un espace réel, auquel se rapporteraient essentiellement les mouvements de la matière et par rapport auquel s'appliquerait d'une façon primordiale le principe de l'inertie.... Cet espace (réel) doit être fini. » Dans le système contraire, les théorèmes sur l'énergie n'ont aucun sens.

[redacted]

Corrections, additions et généralisations des résultats donnés par M. Mansion (*Annales de la Soc. scient.*, t. XVI; 1892); M. Pasquier suppose que les équations de liaison puissent contenir les dérivées premières et secondes des coordonnées par rapport au temps.

Mansion (*P.*). — Sur l'inutilité de la considération de l'espace dit réel, en Mécanique. (A, 56-58).

Vicaire (*E.*). — Sur la réalité de l'espace. (A, 113-116).

M. Mansion soutient que la Mécanique s'occupe nécessairement de mouvements relatifs; M. Vicaire défend la thèse inverse. Cette discussion a continué en 1896.

Vallée-Poussin (*Ch.-J. de la*). — Sur les formes quadratiques binaires. (A, 59-60).

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur la pression capillaire exercée par une couche superficielle courbe. Réponse à M. Leray. (A, 60-64).

Leray. — Observations sur cette Note. (A, 117-120).

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Réponse. (A, 120-121).

Ocagne (*d'*). — Sur la courbure du contour apparent d'une surface. (A, 99-101).

Voir *Mathesis*, 1895, Supplément V, p. 1-2.

Mansion (*P.*). — Sur l'enseignement élémentaire de l'Algèbre en 1676. (A, 101-105).

Voir *Mathesis*, 1895, Supplément V, p. 3-6.

Vallée-Poussin (*Ch.-J. de la*). — Sur les fractions continues et les formes quadratiques. (A, 111-113).

Les fractions continues à dénominateurs entiers négatifs sont très utiles en théorie des nombres; leur emploi permet de simplifier plusieurs recherches difficiles.

Vallée-Poussin (*Ch.-J. de la*). — Sur la Géométrie non euclidienne. (A, 7; B, 17-26).

De Tilly. — Rapport sur ce Mémoire. (A, 45-46).

Voir *Mathesis*, 1895, Supplément V, p. 6-16.

Duhem (*P.*). — Fragments d'un cours d'Optique. (B, 27-94).

L'ancienne Optique d'Euclide, Ptolemée, Descartes, Newton, a pu donner une théorie de la réflexion, de la réfraction, de la dispersion; l'Optique d'Huygens, une théorie de la double réfraction : celle de Young une théorie des interférences et de la diffraction. L'auteur, après un coup d'œil sur l'Optique ancienne, expose l'Optique de Young, en supprimant toute hypothèse sur la nature de la lumière. Pour lui, la lumière n'est qu'une qualité et l'Optique physique un système d'équations symboliques dont le but est de *figurer* et non d'expliquer réellement les caractères que l'analyse expérimentale nous signale en cette qualité.

Mansion (*P.*). — Relations entre les distances de cinq ou six points en Géométrie euclidienne et en Géométrie non euclidienne. (B, 189-196).

20ᵉ année, 1896.

Leray. — Sur la nature de l'espace. (A, 1-6).

Vicaire (*E.*). — Observations sur cette Note. (A, 6-7).

M. l'abbé Leray suppose que l'espace est un être réel et passif, M. Vicaire un être réel et actif.

Mansion (*P.*). — Analyse de l'Ouvrage d'Engel et Stäckel sur l'histoire de la théorie des parallèles. (A, 7-8).

Vicaire (*E.*). — Observations sur une Note de M. Mansion. (A, 8-19).

[redacted]

Vallée-Poussin (*Ch.-J. de la*). — Sur la série de Lambert. (A, 56-62).

Sommation de cette série par des intégrales portant sur les fonctions théta, sn u ou pu.

Mansion (*P.*). — Une nouvelle forme de la relation entre les distances de cinq points en Géométrie non euclidienne. (A, 62-63).

Cette relation est $|x_i, y_i, z_i, u_i, o| = o (i = 1, 2, 3, 4, 5)$, x_i, y_i, z_i représentant les sinus des distances du point i à trois plans coordonnés, u_i le cosinus de la distance à l'origine.

Duhem (*P.*). — Fragments d'un cours d'Optique. Troisième fragment. L'Optique de Fresnel. (B, 27-105).

Suite du travail analysé plus haut. Dans un Chapitre préliminaire, l'auteur montre comment l'Optique de Young est insuffisante pour expliquer les phénomènes de réflexion et de réfraction à la surface de séparation de deux milieux homogènes transparents isotropes; il recourt donc à un système plus parfait, celui de Fresnel, pour expliquer ces phénomènes et ceux de la polarisation; il fait remarquer aussi que l'on pourrait recourir pour cela au système de Mac-Cullagh et Fr. Neumann. Enfin, s'il s'agissait de milieux anisotropes, imparfaitement transparents, il faudrait imaginer d'autres systèmes encore. La conclusion des trois fragments est celle-ci : *On peut construire une Optique rationnelle sans faire aucune hypothèse sur la constitution intime des milieux transparents, ni sur la nature de la lumière.*

Lechalas (*G.*). — Identité des plans de Riemann et des sphères d'Euclide. (B, 167-177).

Mansion (*P.*). — Sur la non-identité du plan riemannien et de la sphère euclidienne. (B, 178-182).

Les deux contradicteurs sont d'accord sur ce point : le plan riemannien a les mêmes propriétés intrinsèques que la sphère euclidienne; les propriétés autres diffèrent. Le désaccord ne porte probablement que sur une question de définition.

Vallée-Poussin (*Ch.-J. de la*). — Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. I. La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers en général. II. Les fonctions de Dirichlet et les nombres premiers de la forme linéaire $Mx + N$. III. Les formes quadratiques de déterminant négatif. (B, 183-256; 281-362; 363-397.

Jordan (*C.*). — Rapport sur la première Partie. (A, 91-96).

Vallée-Poussin (*Ch.-J. de la*). — Sur la deuxième et la troisième Partie. (A, 100-101).

MATHESIS, RECUEIL MATHÉMATIQUE A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE, publié par *P. Mansion* et *J. Neuberg*, Gand, Hoste; Paris, Gauthier-Villars, 1893.

3e série, t. III, 1893.

Balitrand. — Sur les courbes du quatrième ordre qui ont trois points doubles d'inflexion. (5-9).

Mandart. — Sur un nouveau groupe de trois paraboles. (10-13).

Servais (*Cl.*). — Une propriété des quadriques. (14-15).

Meurice (*L.*). — Sommation des sinus et des cosinus d'angles en progression arithmétique. (19-20).

Prime (Mme). — Sur le cercle orthocentroïdal. (33-36).

Mansion (*P.*). — Sur la formule de Leibniz. (36-39).

Barbarin. — Théorèmes sur les courbes et les surfaces du second ordre. (60-62).

[redacted]

Delbœuf (*J.*). — Sur les premières propositions concernant le plan. (134-136).

Neuberg (*J.*). — Une propriété des quadriques homofocales. (136).

Laisant (*C.-A.*). — Sur une fonction représentative des coefficients du binome. (153-154).

Bertrand (*E.*). — Note sur quelques propriétés du triangle. (155-162).

Rocquigny (*G. de*). — Questions d'Arithmologie. (112-114, 164-165).

Neuberg (*J.*) et *Longchamps* (*G. de*). — Théorème d'Arithmétique. (137, 168-169).

Cesaró (*E.*). — Question de Géométrie infinitésimale. (177-183).

Servais (*Cl.*) et *Neuberg* (*J.*). — Sur les quadriques homofocales. (186-187).

Cesaró (*E.*). — Sur quelques théorèmes de MM. Fouret et Jamet. (217-222).

Meurice (*L.*). — Questions de Mécanique. (222-223, 243-244).

Mansion (*P.*). — Limite ou génératrice. (225-228).

Cesaró (*E.*). — Démonstration d'un théorème de M. Appell. (241-243).

Neuberg (*J.*). — Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde. (244-246).

Gelin (*E.*). — Condition pour que deux équations du second degré aient une racine commune. (265-269).

Articles divers, questions résolues, questions d'examen, questions proposées, bibliographie (*passim*).

Suppléments.

I. *Neuberg* (*J.*). — Rayon de courbure de certaines courbes planes. (13 p.).

Ce travail est extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 3ᵉ série, t. XXV, nº 4, p. 374-386; 1893.

II. *De Tilly* (*J.-M.*). — Essai de Géométrie analytique générale. (80 p.).

Ce travail est extrait des *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, collection in-8º, t. XLVII.

2ᵉ série, t. IV, 1893.

Jamet (*V.*). — Sur le théorème de d'Alembert. (5-14).

Il s'agit du théorème classique : « Toute équation algébrique, à coefficients réels ou imaginaires, a une racine réelle ou imaginaire. » L'auteur s'est inspiré de la méthode suivie par Briot et Bouquet pour démontrer l'existence de l'intégrale d'une équation différentielle du premier ordre et pour en déduire l'existence des fonctions implicites. Soit

$$(1) \qquad f(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1} z = a$$

l'équation donnée. M. Jamet admet que le théorème est vrai pour toute équation algébrique de degré $m-1$ et que par conséquent une telle équation a $m-1$ racines, distinctes ou non; en particulier, on peut supposer que l'équation dérivée $f'(z) = 0$ a $m-1$ racines. L'auteur prépare l'équation (1) en montrant que, si ρ désigne le module d'une quelconque des racines de l'équation dérivée, on peut toujours faire les deux hypothèses suivantes : 1° module $a < \rho^m$; 2° a_{m-1} différent de 0, de telle sorte que l'équation $f'(z) = 0$ n'a pas

[redacted]

Mangeot (*S.*). — Sur deux classes de surfaces qui se correspondent. (34-36).

Mansion (*P.*). — Ernest-Édouard Kummer. (40-42).

Cesaró (*E.*). — Sur une proposition fondamendale du calcul asymptotique. (57-62).

L'intégrale de $f(x, t)\,dt$, prise entre les limites a et b, est une fonction de x que nous représenterons par $[a, b]$. Si cette fonction croît à l'infini, lorsque x tend vers x_0, on peut construire une infinité de fonctions $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ... indéfiniment croissantes pour $x = x_0$, et telles que, pour n infini, a_n et b_n tendent vers une limite t_0. Il peut se faire qu'il y ait plusieurs nombres tels que t_0, il peut même arriver qu'il y en ait une infinité; mais lorsqu'il est possible d'en isoler un, t_0, on peut affirmer que toute partie $[\alpha, \beta]$ de l'intégrale $[a, b]$, prise autour de t_0, jouit de la propriété de devenir infinie pour $x = x_0$.

Cela étant, supposons que pour les intégrales

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)\,dt, \qquad G(x) = \int_a^b g(x, t)\,dt$$

aux éléments positifs, il n'existe qu'un seul et même nombre t_0; *en admettant* que le rapport de $f(x, t)$ à $g(x, t)$ tende uniformément vers une limite $k(x)$ quand t tend vers t_0, on a $\lim_{x=x_0}[F(x) : G(x)] = \lim k(x) = k$. Applications aux séries. Valeur asymptotique de la série $a_1^{-x} + a_2^{-x} + \ldots$ aux environs de $x = 1$, où elle devient divergente en supposant que $a_1, a_2, \ldots$ soient des entiers positifs dont on connaît la *fréquence*. Expression asymptotique de la série elliptique $1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots$, de la fonction de Catalan :

$$q + q^2 + q^4 + q^8 + q^{16} + \ldots$$

de la série de Lambert. En terminant, l'auteur montre que le cas de plusieurs nombres $t_0, t_1, t_2, \ldots$, en nombre fini, se ramène au cas d'un seul nombre.

Balitrand. — Applications d'un théorème de Chasles. (62-67, 81-84).

Dauge (*F.*). — Conditions pour qu'un système de trois axes soit trirectangle. (85-87).

Cette question a fait l'objet d'une Note de M. Appell (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, février 1894). M. Dauge en présente ici une solution plus élémentaire et aussi simple.

Bricard (*R.*). — Quelques systèmes de tiges articulées. (111-114).

Gob (*A.*). — Rayon de courbure d'une conique. (133-134).

Longchamps (*G. de*). — Sur les strophoïdales. (138-141).

Lemoine (*E.*). — Notes sur la Géométrie du triangle. (153-158).

Balitrand. — Un problème sur les courbes gauches. (159-161).

Neuberg (*J.*). — Sur les wronskiens. (165).

Si $W(y, z, u, v)$ désigne le wronskien de quatre fonctions de x, on a $W(\alpha y, \alpha z, \alpha u, \alpha v) = \alpha^4 W(y, z, u, v)$, α désignant une fonction quelconque de x. Si l'on fait $\alpha = \frac{1}{y}$, on retrouve une propriété signalée par M. A. Demoulin (*Mathesis*, t. IX, p. 136). Soient Y, Z, U, V ce que deviennent y, z, u, v par la substitution $x = \varphi(t)$, on a

$$W(Y, Z, U, V) = \varphi'^{6}(t) W(y, z, u, v).$$

Cesaró (*E.*). — Sur l'évaluation approchée d'une série elliptique. (177-180).

Calcul, par une méthode purement algébrique, de la valeur asymptotique de la série $1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots$, pour des valeurs de q très voisines de l'unité.

Mansion (*P.*). — Sur le principe fondamental de la Géométrie riemannienne. (180-183).

Verbessem (*L.*). — Quelques propriétés des coniques se rattachant à la théorie des transformations. (184-190).

Gelin (*E.*). — Note sur la relation

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

(220-222).

[redacted]

Neuberg (*J.*). — Sur quelques quadrilatères spéciaux. (268-271).

2e Série, t. V; 1895 (t. XV de la collection).

Tarry (*G.*). — Sur l'axe d'homologie du triangle fondamental et du triangle de Brocard. (5-7).

Desaint. — Sur une certaine enveloppe. (8-11).

Hermite (*Ch.*). — Sur l'équation bicarrée. (11-12).

A l'expression classique des racines de l'équation $x^4 + px^2 + q = 0$ il semble nécessaire de joindre la suivante

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{-p+2\sqrt{q}} + \sqrt{-p-2\sqrt{q}}\right),$$

afin d'avoir, lorsque q est un carré, deux radicaux séparés au lieu de deux radicaux superposés.

Neuberg (*J.*). — Sur un théorème de Poncelet. (13-15).

Élégante démonstration du théorème de Poncelet concernant le système de deux coniques telles qu'il existe une infinité de triangles inscrits à l'une et circonscrits à l'autre. Relations entre les coordonnées d'un sommet d'un de ces triangles et les coordonnées du point de contact du côté opposé.

Nauticus et *Meurice*. — Sur un théorème d'Arithmétique. (37-42, 64-68).

Démonstrations du théorème suivant, dont la première partie avait été énoncée hypothétiquement, par M. Laisant, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (question n° 400).

Soient $n+1$ la base d'un système de numération, et $N = 123\ldots n$ le nombre formé par les chiffres significatifs, écrits dans leur ordre naturel. Le produit λN de N par l'un quelconque de ces chiffres : 1° les contient tous une seule fois chacun, si λ est premier avec n; 2° il n'en contient que quelques-uns avec le zéro en sus, qui s'y répète périodiquement, si λ n'est pas premier avec n; le zéro fait alors partie de la période.

Barisien (*E.-N.*), *Déprez*, *Tzitzeica*. — Résumé des propriétés concernant les triangles d'aire maximum inscrits dans l'ellipse. (42-45, 81-83).

Neuberg (*J.*). — Sur quelques coniques du plan d'un triangle. (60-63).

Droz-Farny. — Note sur un article de *Mathesis*. (226-227).

Contributions à la nouvelle Géométrie du triangle.

Mansion (*P.*). — Sur les premiers principes de la Métagéométrie et de la Géométrie riemannienne. (63-64).

Spijker (*Ch.*). — Sur un groupe de coniques inscrites ou circonscrites à un triangle. (105-111).

Cette Note reprend par l'analyse un grand nombre de théorèmes démontrés par MM. Neuberg et Schoute dans le Mémoire présenté au Congrès de Marseille en 1891 : *Généralisation d'un problème connu.* Elle contient également beaucoup de résultats propres à l'auteur.

Barbette (*E.*). — Sur la sommation des puissances semblables des n premiers nombres triangulaires. (111-112).

Barisien (*E.-N.*). — Propriétés des cercles de Chasles. (129-134, 158-163, 241-249).

Mandart (*H.*). — Sur les centres isogones. (153-155).

De Tilly. — Sur les valeurs principales des radicaux. (177-183, 217-223).

Gob (*A.*). — Sur les courbes algébriques. (183-184).

Longchamps (*G. de*). — Sur un cas remarquable des transformations centrales. (186-191).

Meurice (*L.*). — Sur une transformation centrale. (191-193).

Neuberg (*J.*). — Solution de la question de Mathématiques élémentaires posée, en 1895, au concours de l'Agrégation des



Supplément II.

Hermite (*Ch.*). — Sur les nombres de Bernoulli. (Extrait du *Congrès scientifique international des catholiques*, t. VII, p. 5-11). (1-7).

Dans cette courte Note, l'éminent géomètre démontre d'une manière simple, par l'emploi de certaines notations symboliques, diverses relations entre les nombres de Bernoulli et, en particulier, deux formules obtenues autrefois par Malmsten, au moyen du Calcul intégral.

Voici un aperçu de la méthode suivie par M. Hermite. On peut écrire

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}S,$$

$$S = \lambda_0 + \frac{\lambda_1 x}{1} + \frac{\lambda_2 x^2}{1.2} + \ldots,$$

où l'on suppose

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = -B_1, \quad \ldots, \quad \lambda_{2i} = 0, \quad i\lambda_{2i-1} = (-1)^{i-1}B_i,$$

B_1, B_2, ... désignant les nombres de Bernoulli. On déduit de là

$$1 = \frac{e^x-1}{x} - \frac{1}{2}(e^x-1)S.$$

En exprimant que le coefficient de x^n est nul dans le second membre, on trouve la relation symbolique

$$(\lambda+1)^n - \lambda^n = \frac{2}{n+1},$$

équivalente, quand n est impair, à l'une des formules de Malmsten. On établit l'autre formule du géomètre suédois en partant de la relation

$$e^{(2\lambda+1)x} - e^{\lambda x} + e^{2\lambda x} = \frac{e^x-1}{x}$$

facile à établir et d'où l'on conclut

$$(2\lambda+1)^n + (2^n-1)\lambda^n = \frac{2}{n+1}.$$

M. Hermite fait ensuite connaître des relations plus générales qui contiennent $(m-1)$ ou m nombres de Bernoulli à partir du $m^{\text{ième}}$.

Mansion (*P.*). — Essai d'exposition élémentaire des principes fondamentaux de la Géométrie non euclidienne de Riemann. (Extrait du *Congrès scientifique international des catholiques*, t. VII, p. 11-25). (8-21).

L'auteur admet comme point de départ les deux propositions : 1° Dans l'espace riemannien, deux droites se rencontrent deux fois, en deux points dont la distance est toujours la même, quel que soit le couple de droites considéré;

2° Dans un triangle riemannien, la somme des trois angles est supérieure à deux droits. Il déduit de là, par des raisonnements élémentaires, la formule fondamentale de la Géométrie riemannienne, savoir :

$$\cos\left(\frac{a}{r}\right) = \cos\left(\frac{b}{r}\right)\cos\left(\frac{c}{r}\right)$$

a, b, c étant respectivement l'hypoténuse et les côtés d'un triangle rectangle, r la constante riemannienne. Les démonstrations, sauf sur un point, sont calquées sur celles de Gérard relatives à la Géométrie lobatchefskienne (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* février 1893).

Poulain (A.). — Quelques propriétés angulaires des cercles. (Extrait du *Congrès scientifique international des catholiques*, t. VII, p. 26-34). (22-20).

Dans cette Note, l'auteur, d'une manière simple et naturelle, établit le théorème suivant, dû à M. Darboux, dans sa partie essentielle : Étant donnés trois cercles (A, a), (B, b), (C, c) ayant respectivement pour centres les points A, B, C, pour rayons les longueurs a, b, c, soient S leur centre radical, p^2 la puissance commune de S par rapport aux trois cercles : 1° A tout cercle (ω, ς) qui coupe les trois premiers sous les angles α, β, γ en correspond un second (ω', ς') jouissant de la même propriété et réciproque du premier, par rapport à S, la puissance d'inversion étant p^2; 2° Leur axe radical leur est commun avec le cercle (S, p) orthogonal aux trois premiers; 3° Cet axe est l'un des quatre axes de similitude de trois cercles auxiliaires concentriques aux premiers et de rayon $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $c\cos\gamma$. Ce théorème, avec sa réciproque et ses conséquences, permet de résoudre le problème : Construire un cercle qui coupe trois cercles donnés suivant des angles donnés. Les cas limites où les cercles se réduisent à des points ou à des droites sont examinés avec soin.

Supplément III.

Mansion (P.). — Notice sur les recherches de M. de Tilly en Métagéométrie. (Extrait de la *Revue des questions scienti-*

[redacted]

matik von J.-G. Hagen, Band II. (Extrait de la *Revue des questions scientifiques*, t. XXXVII, p. 596-603). (1-8).

Supplément V.

Ocagne (*d'*). — Sur la courbure du contour apparent d'une surface. (Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1895, t. XXX, première Partie, p. 99-101). (1-2).

Démonstration très simple de la formule connue.

Mansion (*P.*). — Sur l'enseignement élémentaire de l'Algèbre en 1676, d'après l'Euclide de Henrion. (Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XIX, première Partie, p. 101-105; 1895). (3-6).

L'auteur n'emploie que les signes $+$, $-$, $\sqrt{}$, puis une notation spéciale pour les exposants; cependant au fond son Algèbre est identique à la nôtre.

Vallée-Poussin (*Ch.-J. de la*). — Sur la Géométrie non euclidienne. *De Tilly*, rapport sur cette Note. (Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XIX, deuxième Partie, p. 17-26; 1895; première Partie, p. 7, 45-46). (6-15; 16).

L'auteur établit les formules fondamentales des trois Géométries, euclidienne, lobatchefskienne, riemannienne, en partant de ce postulat : les triangles infiniment petits tendent indéfiniment à devenir euclidiens.

2ᵉ série, t. VI; 1896 (t. XVI de la collection).

De Tilly. — Sur les valeurs principales des radicaux. (5-7).

Si $a + bi = re^{\varphi i}$, $r = +\sqrt{a^2+b^2}$, on a

$$\sqrt[m]{a+bi} = \sqrt[m]{r}\cos\frac{\varphi+2k\pi}{m} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{m}.$$

Aucune des m valeurs de $\sqrt[m]{(a+bi)}$ n'est fonction continue de a et b, si a et b varient de $-\infty$ à $+\infty$. Si on laisse k constant, on a le maximum de simplicité pour la variation de chaque racine quand a et b varient; on appellera ***racine principale*** celle qui correspondra à $k = 0$ et sera telle que

$$\sqrt[pq]{} = \sqrt[p]{\sqrt[q]{}} = \sqrt[q]{\sqrt[p]{}},$$

si $m = pq$. Si l'on veut avoir le maximum de continuité, il faudra donner à k diverses valeurs suivant que m sera de la forme $2p+1$, $2p$ ou $4p$. Quand a

Supplément I.

Mansion (*P.*). — La Géométrie non euclidienne avant Lobatchefsky.

Demoulin (*A.*). — Compte rendu de l'Ouvrage intitulé : *La Géométrie réglée et ses applications;* par G. Kœnigs. (15 p.).

Supplément II.

Gelin (*E.*). — 450 questions d'Arithmologie (32 p.).

Supplément III.

Vigarié (*E.*). — La bibliographie de la Géométrie du triangle. (14 p.).

Extrait du Congrès de Bordeaux (1895) de l'Association française pour l'avancement des Sciences. Il comprend des additions aux Notices analogues publiées en 1885 par Lemoine, en 1889 par Vigarié; puis la bibliographie aussi complète que possible de 1889 à 1895, année par année. Depuis le début de la Géométrie du triangle, M. Vigarié compte 603 Notes, Articles ou Mémoires, 94 avant 1873, 114 de 1873 à 1885, 176 de 1885 à 1889, 219 de 1889 à 1895.

Supplément IV.

Mansion (*P.*). — Premiers principes de la Métagéométrie ou Géométrie générale (47 p.) (*Revue Néoscolastique,* t. III, p. 143-170, 242-259; 1896).

[redacted]

trie idéale possible, ce qui est absurde, puisqu'il y en a une infinité divisées en trois classes. — *Appendice*. La Géométrie comme Physique mathématique des distances. Aperçu de la méthode de M. De Tilly. Compatibilité des postulats avec les définitions.

PUBLICATIONS DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE. 63e année, 3e série (1).

Tome XXV; janvier à juin 1893.

Mansion (*P.*). — Sur la loi des grands nombres de Poisson. (11-13).

L'auteur déduit du Théorème de Bernoulli une proposition pratiquement équivalente à la loi des grands nombres de Poisson.

De Tilly et *de la Vallée-Poussin*. — Rapport sur un Mémoire de M. G. Cesàro intitulé : *Des polyèdres qui peuvent occuper plusieurs positions identiques en apparence*. (75-79).

Simplification de la théorie des axes de symétrie des polyèdres et contributions nouvelles à cette théorie.

Le Paige (*C.*) et *Neuberg* (*J.*). — Rapport sur un Théorème de M. Cl. Servais intitulé : *Sur les imaginaires en Géométrie*. (223-229).

On sait que Von Staudt est parvenu à une représentation purement géométrique des imaginaires. M. Servais s'est proposé, en adoptant les définitions du géomètre allemand, d'effectuer les constructions dans lesquelles entrent de pareils éléments, et de démontrer les Théorèmes où ils figurent. Les recherches de M. Servais se divisent en deux Parties bien distinctes : dans la première Partie l'auteur s'occupe de la Géométrie plane; la seconde Partie est consacrée à la Géométrie de l'espace et à une étude de cubiques gauches.

Après avoir rappelé la définition donnée par Von Staudt des éléments imaginaires isolés, l'auteur résout le problème suivant : *Construire une droite passant par deux points imaginaires non conjugués*. M. Servais définit ensuite les éléments imaginaires correspondants dans les formes projectives, les éléments imaginaires d'une section conique. Il étudie ensuite l'involution d'une conique comme cas particulier des séries projectives.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXIII, p. 1?7.

L'auteur ayant ainsi établi, pour des éléments imaginaires, les propriétés connues des involutions et des homographies, et ayant en même temps fait connaître les constructions des éléments représentatifs correspondants, il lui est facile de faire voir que l'on retrouve pour les quadrilatères quelconques, à sommets réels ou imaginaires, les propriétés involutives connues : les Théorèmes de Desargues, Lamé, Sturm sont démontrés dans toute leur généralité ainsi que les conséquences qui en découlent.

Dans la seconde Partie du Mémoire, l'auteur définit les droites imaginaires de l'espace par la considération du système involutif gauche. Il termine en reprenant une à une les propriétés connues de la cubique gauche et en démontrant qu'elles subsistent lorsque les éléments cessent d'être réels.

Le Paige (*C.*). — Démonstration d'un Théorème de M. Tchébychef. (235-238).

Catalan (*E.*). — Une conséquence du problème des Partis. (238-239, 430-432).

Neuberg (*J.*). — Rayon de courbure de certaines courbes planes. (374-386).

En se basant sur la cinématique de la droite, l'auteur établit plusieurs formules élégantes relatives à la courbure dans les coniques, les courbes de Lamé, les courbes triangulaires et les courbes anharmoniques.

Deruyts (*J.*). — Sur les équations caractéristiques invariantes réduites. (450-463).

Servais (*Cl.*). — Quelques propriétés des surfaces du second degré. (772-789).

Le Paige (*C.*) et *Neuberg* (*J.*). — Rapport. (424-426).

Tome XXVI; juillet à décembre 1893.

Servais (*Cl.*). — Sur les sphères bitangentes à une surface du second degré. (91-102).

Le Paige et *Neuberg*. — Rapport. (18-22).

Par la considération des sphères bitangentes à une quadrique, l'auteur généralise les Théorèmes de Mac Cullagh et de Salmon, concernant les deux classes de foyers d'une quadrique. La généralisation du Théorème de Mac Cullagh le conduit aisément au mode de génération des quadriques, donné par Jacobi et à d'autres modes de génération où l'on peut faire intervenir, comme sommets du premier triangle fondamental, des points quelconques d'un plan de symétrie, non perpendiculaire aux sections circulaires.

Deruyts (*Fr.*). — Note sur les groupes d'éléments neutres communs à deux involutions quelconques. (232-235).

Le Paige. — Rapport. (182).

Nombre de couples, de ternes, de quaternes neutres communs à deux involutions.

Catalan, *Mansion* et *Le Paige*. — Rapport sur un Mémoire de M. Beaupain intitulé : *Sur quelques produits indéfinis*. (249-255).

Deruyts (*J.*). — Sur une propriété des fonctions invariantes. (258-267).

Le Paige et *Neuberg*. — Rapport sur un Mémoire de M. Servais, intitulé : *Sur les cubiques gauches*. (456-457).

Examen des différentes conséquences d'un Théorème sur les cubiques gauches établi par M. Servais dans son Mémoire : *Sur les imaginaires en Géométrie*, analysé plus haut.

Tome XXVII; 1894.

Catalan (*E.*). — Problèmes et théorèmes d'Arithmétique. (10-15).

Catalan (*E.*). — Sur les lignes de courbure. (240-242).

Mouchamp (*G.*). — Les correspondants belges du grand Huygens. (225-308).

Renseignements divers sur les mathématiciens belges : Grégoire de Saint-Vincent, de Sarasa, Aynscon, Hesius, Tacquet, G. van Gutschoven.

Deruyts (*Fr.*). — Sur les groupes d'éléments neutres communs à un nombre quelconque d'involutions. (495-517).

Le Paige (*C.*). — Rapport. (445-447).

Détermination par une formule de récurrence et le théorème de correspondance, ou par voie directe, de ces éléments.

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Remarques sur la constitution de la couche superficielle des corps solides. (877-884).

Servais (*Cl.*). — Quelques formules sur la courbure des surfaces. (896-904).

Le Paige (*C.*) et *Neuberg* (*J.*). — Rapport. (866-867).

Le point de départ de ce travail est la loi de Chasles qui donne la relation entre les plans tangents à une surface réglée aux différents points d'une génératrice. En appliquant cette loi à la normalie qui a pour directrice, soit une courbe quelconque tracée sur une surface, soit une asymptotique ou une géodésique de cette surface, l'auteur retrouve des formules curieuses, dues à Enneper, et d'autres qui lui sont propres.

Tome XXVIII; juillet à décembre 1894.

Gob (*A.*). — Extension et application du Théorème de Newton. (57-87).

Le Paige (*C.*) et *Neuberg* (*J.*). — Rapport. (6-10).

[redacted]

ment tangentes aux plans et aux systèmes dérivés. Systèmes cycliques de Ribaucour; généralisation (inédite) due à Darboux. — 4. Systèmes orthogonaux à trajectoires sphériques. Notes diverses.

Tome XXIX; 1895.

Deruyts (*J.*). — Rapport sur le Mémoire intitulé : *Sur les fonctions hypergéométriques de seconde espèce et d'ordre supérieur;* par J. Beaupain. (214-215).

Le Paige (*C.*) et *Neuberg* (*J.*). — Rapport sur le Mémoire intitulé : *Sur le système focal;* par Cl. Servais. (216-217).

Lagrange (*Ch.*). — Sur les équations du champ physique. Première Note. (353-362).

Le Paige (*C.*) et *Neuberg* (*J.*). — Rapport sur le Mémoire intitulé : *La projectivité imaginaire;* par Cl. Servais. (471-476).

Mansion (*P.*). — Sur la Métagéométrie et ses trois subdivisions. (495-498).

Lagrange (*Ch.*). — Rapport sur le Mémoire intitulé : *Sur les déformations permanentes de l'hystérésis;* par P. Duhem. (805-820).

Tome XXX; 1895.

Demoulin (*A.*). — Note sur une déformation des surfaces de révolution. (61-66).

Deruyts (*J.*). — Rapport. (6-7).

Dans ce Travail, l'auteur montre que, parmi les surfaces admettant un élément linéaire de révolution donné, il existe toujours une surface non comprise dans celles que donne l'application du Théorème de Bour, et dont l'équation est de la forme $x^2+y^2+z^2=f(x+y\sqrt{-1})$. Cette Note renferme, en outre, une forme nouvelle des expressions des coordonnées de la surface minima la plus générale.

Mansion (*P.*). — Rapport sur le Mémoire intitulé : *Recherches arithmétiques sur la composition des formes binaires quadratiques;* par Ch.-J. de la Vallée-Poussin.

Lagrange (*Ch.*). — Sur les équations du champ physique. Deuxième Note. (603-619).

Dans la première Note, l'auteur montre comment on peut tenir compte de la forme des éléments dans un milieu continu de points rigides; dans la seconde, comment on peut introduire dans les équations d'un milieu continu, en outre de l'influence de la forme des points, celle de leur orientation relative dans un milieu.

Tome XXXI; 1896.

Mansion (*P.*). — Rapport sur un Mémoire de M. Ch.-J. de la Vallée-Poussin intitulé : *Démonstration simplifiée du Théorème de Dirichlet, sur la progression arithmétique.* (19-24).

Lagrange (*Ch.*). — Sur les équations du champ physique. Troisième Note. Introduction de la pression interne dans les équations du milieu. (111-136). Quatrième Note. Équations du mouvement de deux milieux continus qui occupent un même espace. Mélange des corps. (338-379).

Lagrange (*Ch.*). — Démonstration du Théorème de Bernoulli par la formule sommatoire d'Euler. (439-457).

L'auteur examine seulement le cas où l'écart absolu et le produit du nombre total des cas par les probabilités des événements considérés sont des nombres entiers.

Deruyts (*F.*). — Sur certains groupes d'éléments communs à deux involutions. (664-674).

Le Paige (*C.*) et *Neuberg*. — Rapport. (636-638).

Il est presque impossible d'analyser ce Travail sans le reproduire. Voici une des applications des Théorèmes trouvés par l'auteur : Par 7 points donnés, on [redacted]

intitulé : *Des polyèdres superposables à leur image*. (226-231).

Dans ce Mémoire et trois autres publiés antérieurement, M. G. Cesàro résout complètement les trois problèmes suivants :

« Trouver tous les systèmes P de points invariablement liés qui puissent coïncider : 1° de plus d'une manière avec eux-mêmes; 2° avec un système P_1 symétrique de P par rapport à un point; 3° étant donné un système P de cette seconde catégorie, trouver un axe tel qu'après une rotation autour de cette droite, P soit le symétrique de sa première position par rapport à un plan.

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Note sur les nombreux effets de l'élasticité des liquides. (418-423).

Deruyts (*F.*). — Quelques propriétés du déterminant d'un système transformable. (433-445).

Deruyts (*F.*). — Rapport sur un Mémoire de M. Beaupain intitulé : *Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur*. (669-670).

MÉMOIRES couronnés et Mémoires des Savants étrangers publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.

Tome LII.

De Longchamps (*G.*). — Les fonctions pseudo- et hyperbernoulliennes et leurs premières applications. — Contribution élémentaire à l'intégration des équations différentielles. (1-42).

Deruyts (*J.*). — Détermination des fonctions invariantes de formes à plusieurs séries de variables. (1-28).

Beaupain (*J.*). — Sur quelques formules de Calcul intégral. (1-62).

Deruyts (*Fr.*). — Sur la correspondance homographique entre les éléments de deux espaces linéaires quelconques. (1-40).

Caspary (*F.*). — Sur l'application des fonctions sphériques aux nombres de Segner (extraits d'une lettre à M. E. Catalan). (1-15).

MÉMOIRES couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Bruxelles, Hayez.

Tome LIV : juin 1896.

Duhem (*P.*). — Sur les déformations permanentes et l'hystérésis (Trois Mémoires de 62, 86, 56 p. in-8°).

I. Si $\mathcal{F}(x, \mathrm{T})$ est le potentiel thermodynamique interne d'un système, défini par la température absolue T et une variable x, et soumis à une action extérieure X, l'énergie interne $\mathrm{U}(x, \mathrm{T})$ du système est donnée par l'égalité

$$(1) \qquad \mathrm{EU}(x, \mathrm{T}) = \mathcal{F}(x, \mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{F}(x, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{T}},$$

tandis que l'équation d'équilibre du système est donnée par

$$(2) \qquad \mathrm{X} = \frac{\partial \mathcal{F}(x, \mathrm{T})}{\partial x}.$$

Cette équation (2) repose sur certaines hypothèses qui excluent la possibilité des modifications permanentes. Pour rendre compte de ces modifications, l'auteur propose de conserver l'équation (1), mais de remplacer l'équation (2) par la relation suivante entre les valeurs de $d\mathrm{X}$, dx, $d\mathrm{T}$, qui correspondent à une modification élémentaire

$$(3) \qquad d\mathrm{X} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x\,\partial \mathrm{T}}\,d\mathrm{T} + f(x, \mathrm{T}, \mathrm{X})\,|dx|,$$

$|dx|$ désignant la valeur absolue de dx.

L'équation

$$f(x, \mathrm{T}, \mathrm{X}) = 0$$

définit la *surface des états naturels;* au voisinage d'un état naturel, une va-

[redacted]

II. L'auteur développe, pour les modifications accomplies à température variable, sous une action extérieure constante, des considérations analogues à celles qu'il a développées au Mémoire précédent pour les modifications isothermes.

Il compare ensuite les résultats de la théorie aux observations faites sur les modifications permanentes du soufre, en faisant entrer en ligne de compte *toutes* les données expérimentales recueillies par M. D. Gernez.

III. L'auteur étend sa théorie des modifications permanentes à un système dépendant d'un nombre quelconque de variables.

Il généralise, en particulier, la notion d'*état naturel* et étudie les propriétés d'un tel état. Il arrive à définir une *entropie apparente* Σ et un *potentiel thermodynamique apparent* F, tels que toutes les propositions de la Thermodynamique classique concernant les systèmes dépourvus de modifications permanentes peuvent s'étendre aux systèmes pourvus de telles modifications, à condition de substituer à l'entropie, au potentiel thermodynamique et aux états d'équilibre, l'entropie apparente, le potentiel thermodynamique apparent et les états naturels.

Beaupain (J.). — Sur les fonctions hypergéométriques de seconde espèce et d'ordre supérieur. (Deux Mémoires de 46 et 47 p. in-4°).

Ces Mémoires seront analysés ultérieurement, l'auteur ayant publié un troisième Mémoire sur la question.

Lévy (L.). — Sur les systèmes de surfaces triplement orthogonaux. (Mémoire couronné; 92 p. in-4°).

Ce Mémoire, qui a été couronné par l'Académie royale de Belgique, comprend une partie historique dans laquelle sont analysés les Travaux parus sur la question dans ces trente dernières années, ainsi que plusieurs résultats nouveaux obtenus par l'auteur. Il est divisé en cinq Chapitres suivis de six Notes complémentaires.

Dans le Chap. I (p. 5-15), l'auteur expose les premières recherches de M. Darboux sur les systèmes triples orthogonaux et tout d'abord la formation de l'équation du troisième ordre dont dépend le paramètre d'une famille de Lamé. Cette équation est vérifiée par les solutions d'une équation du premier ordre que M. Darboux a intégrée complètement et dont un cas particulier donne les systèmes cycliques de Ribaucour.

M. Lucien Lévy s'occupe ensuite du problème de la détermination de la surface la plus générale qui, en se déplaçant sans changer de forme, engendre une famille de Lamé, et il rappelle à ce sujet les Travaux de MM. Darboux, Petot et les siens.

On trouve encore dans ce Chapitre la solution, due à M. Darboux, de la question suivante : Trouver les surfaces qui coupent à angle droit deux familles de surfaces parallèles.

Le Chap. II (p. 16-20) est consacré à l'exposition des travaux de M. Maurice Lévy.

Dans le Chap. III (p. 20-47) se trouvent établies les formules fondamentales

de Lamé. M. Lucien Lévy les applique à la recherche des systèmes triplement orthogonaux, tels que le déterminant des cosinus des normales aux surfaces qui se croisent en un point soit symétrique par rapport à la diagonale principale. Voici le résultat obtenu : *le système est formé ou de plans parallèles aux plans coordonnées, ou de sphères tangentes à l'origine aux trois plans coordonnés, ou enfin des surfaces qui ont même représentation sphérique que les précédentes.*

Dans le même Chapitre, M. Lévy indique un système de trois équations simultanées analogues à l'équation d'Euler et de Poisson.

Le Chap. IV (p. 47-57) débute par un exposé rapide de la théorie des systèmes cycliques. L'importance de ces systèmes ressort, on le voit, du Théorème suivant : *Étant donné un système triplement orthogonal de surfaces, si l'on considère les cercles osculateurs des trajectoires d'une famille, tout le long d'une surface normale à ces courbes, tous ces cercles donnent naissance à un système cyclique, c'est-à-dire qu'ils sont eux-mêmes normaux à une infinité de surfaces.*

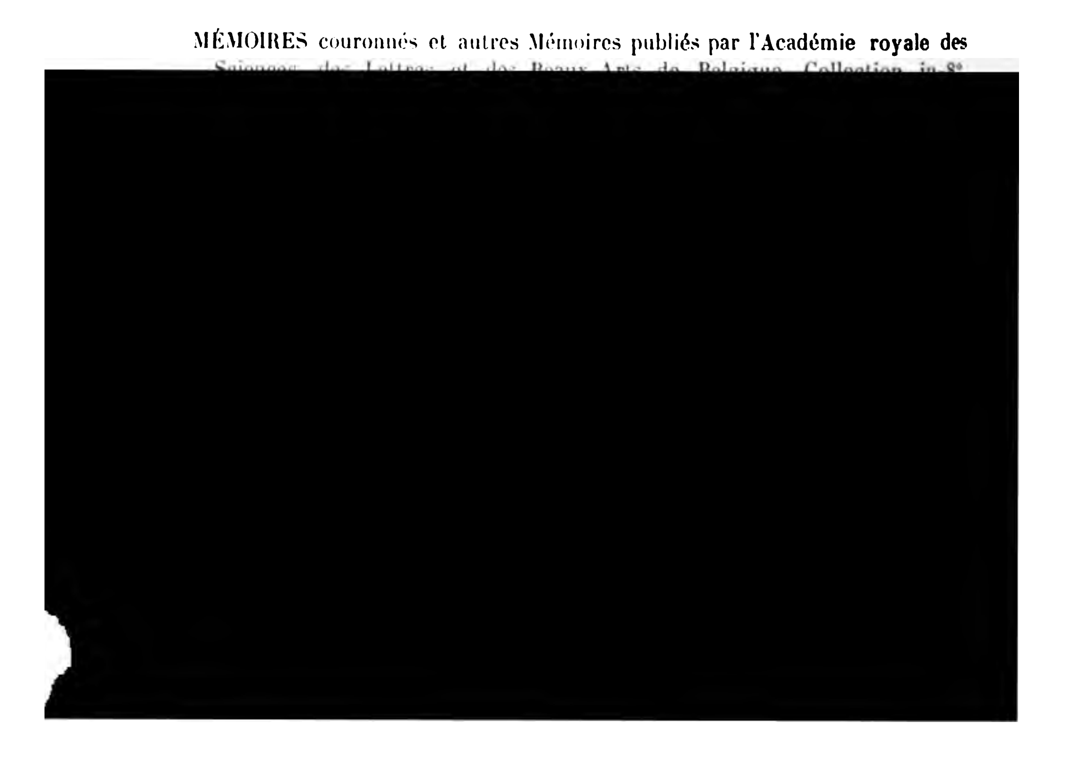
M. Lévy démontre par l'analyse ce Théorème ainsi que sa réciproque, énoncée et démontrée géométriquement par M. Darboux.

Le Chapitre se termine par la détermination, d'après M. Darboux, des systèmes triplement orthogonaux admettant une famille de trajectoires planes.

Enfin, dans le Chap. V (p. 58-63) se trouvent exposées différentes recherches sur les surfaces à lignes de courbure sphériques dans un système.

Parmi les Notes complémentaires (p. 63-89) nous citerons particulièrement : la Note V qui renferme l'analyse de deux Mémoires de M. Bianchi, relatifs aux systèmes orthogonaux admettant une famille de trajectoires planes, ainsi qu'une propriété générale, due à l'auteur, des systèmes orthogonaux à trajectoires sphériques dans une famille; et la Note VI qui résume les Travaux de M. Darboux sur le même sujet.

MÉMOIRES couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale des



[redacted]

des deux premiers rangs et des formes du second ordre, lorsque l'on fait intervenir les éléments imaginaires.

L'auteur étudie à fond le rapport anharmonique et ses propriétés, qu'il soit réel, complexe ou purement imaginaire; l'involution de deux formes projectives; les coniques et les quadriques réglées imaginaires; enfin, il complète ses recherches antérieures sur les cubiques gauches, en considérant aussi des éléments imaginaires.

Ce Mémoire, avec les précédents du même auteur sur des sujets voisins, constitue une contribution importante à la théorie des imaginaires dans le sens de Von Staudt.

Tome LIII : septembre 1895 à octobre 1896.

De la Vallée-Poussin (*Ch.-J.*). — Recherches arithmétiques sur la composition des formes binaires quadratiques. (59 p.).

Mansion (*P.*). — Rapport. [*Bull. de Belg.* (3), XXX]. (189-193).

Dans ce Mémoire remarquable, l'auteur donne une démonstration puisée dans les principes mêmes de la théorie des formes binaires de ce théorème de Gauss : *Toutes les formes quadratiques binaires proprement primitives du genre principal peuvent se former par duplication.* Le Mémoire contient quatre Chapitres et un Appendice. Celui-ci contient quelques théorèmes sur la représentation d'un nombre inférieur à D par une forme proprement primitive de déterminant D. Le Chap. I contient un exposé sommaire des principes de la composition des formes de l'ordre proprement primitif. Le Chap. II est consacré à divers théorèmes sur les propriétés des formes capables de représenter les mêmes nombres. Le Chap. III contient les principes de la division des classes en genres et de la composition des genres. Le théorème principal de ce Chapitre (n° 33) s'appuie sur le théorème suivant : *Toute classe du genre principal peut se former par duplication*, qu'il déduit dans le Chap. IV de cet autre théorème : « Soit (a, b, c) une forme de l'ordre proprement primitif du déterminant D et m un nombre quelconque premier à 2D. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $(a, b, c) = mz^2$ soit résoluble est que m soit représentable par une forme de déterminant D et de même genre que (a, b, c). » Incidemment, l'auteur rencontre diverses propriétés des nombres qu'il déduit de ses Théorèmes principaux; ainsi, à la fin du Chap. III, il donne, de la loi de réciprocité des résidus quadratiques, une démonstration dont le principe d'ailleurs est dû à Gauss.

De la Vallée-Poussin (*Ch.-J.*). — Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique. (32 p.).

Mansion (*P.*). — Rapport. [*Bull. de Belg.* (3), XXXI]. (19-24).

Dans les §§ 1, 2, 3, l'auteur définit les éléments qui lui servent dans la suite, et qui sont ceux de Dirichlet, mais en mettant la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, sous une forme telle qu'elle a un sens même pour s imaginaire, pourvu que la

partie réelle de s soit positive. Le caractère $\chi(n)$ d'un nombre est défini au § 4; dans le § 5, il exprime au moyen de $\xi(s)$ la somme des expressions de la forme $[\chi(n):n^s]$ même si s est imaginaire. Dans le § 6, il introduit la dérivée logarithmique des séries de Dirichlet, au lieu du logarithme et parvient ainsi, avec une simplicité inespérée, dans le § 7, au théorème de Dirichlet, à moins qu'une exception ne se présente; l'auteur prouve en s'aidant de toutes les ressources de l'Analyse que cette exception est impossible, dans le § 8. Deux propriétés nouvelles sont établies par l'auteur, comme conséquences de sa démonstration : 1° On a

$$\lim_{s=1}(s-1)\sum\frac{\log q_\kappa}{q_\kappa}=\frac{1}{\varphi(M)},$$

q_κ désignant les nombres premiers qui appartiennent à la progression arithmétique $Mx+N$; 2° Si le rapport

$$\frac{1}{t}\sum_{q \leqq t}\log q$$

qui a pour numérateur la somme des logarithmes naturels des nombres premiers q non supérieurs à t et de la forme $Mx+N$, tend pour $t=\infty$ vers une limite déterminée, cette limite ne peut être différente de $[1:\varphi(M)]$. Dans tout le Mémoire, l'auteur suppose M impair.

Dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XX et XXI, il a ultérieurement étendu considérablement et précisé les résultats obtenus ici.

MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE. In-4°.

Tome XLIX; octobre 1890 à juillet 1893.



Tome LI; mai à septembre 1893.

Catalan (*E.*). — Recherches sur quelques produits infinis et sur la constante G. Complément. (28 p.).

Ce travail, impossible à analyser, est le complément de deux des plus beaux Mémoires de l'auteur. Il y établit 39 nouvelles formules relatives aux quatre quantités

$$\alpha = \prod_{1}^{\infty}(1 - q^{2n-1}), \quad \alpha' = \prod(1 - q^{2n}),$$

$$\beta = \prod_{1}^{\infty}(1 + q^{2n-1}), \quad \beta' = \prod(1 + q^{2n}),$$

avec diverses conséquences arithmétiques et analytiques.

La fin du Mémoire se rapporte à la théorie des eulériennes et, en particulier, à leurs développements en produits infinis.

Tome LII; septembre 1893 à juillet 1894.

Catalan (*E.*). — Remarques sur la théorie des nombres et sur les fractions continues (28 p.).

Beaupain (***J.***). — **Sur l'intégrale eulérienne de première espèce. (18 p.).**

L'auteur prouve directement que la première intégrale eulérienne et l'inverse de cette fonction sont développables en séries convergentes assez compliquées dont les termes contiennent un angle θ compris entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$.

Cesaró (*G.*). — Des polyèdres qui peuvent occuper dans l'espace plusieurs positions identiques en apparence. (34 p.).

Beaupain (*J.*). — Sur quelques produits indéfinis. (8 p.).

Rectifications et additions à un Mémoire de l'auteur intitulé : *Sur quelques formules de Calcul intégral.*

MÉMOIRES couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Collection in-8°. Bruxelles, F. Hayez.

Tome XLVII, 1892-1893.

De Tilly (J.). — Essai de Géométrie analytique générale (publié aussi en appendice, *Mathesis*, 1893). (80 p.).

Voici le sommaire de cet important travail sur les principes fondamentaux de la Géométrie. **1.** L'objet principal de la Géométrie est la recherche des relations entre les intervalles des couples de points situés dans l'espace. Toutes les propositions de la Géométrie se ramènent à des relations de ce genre. Les nombres qui caractérisent les intervalles doivent être choisis de manière qu'il existe entre ces nombres des relations générales, applicables à l'espace tout entier. **2.** La Géométrie à trois dimensions est caractérisée par une seule relation (12345) = 0, entre les intervalles de cinq points. **3.** *Condition des six points :* « Si, dans un système de six points, trois des six conditions, (12345) = 0, (12346) = 0, (12356) = 0 sont vérifiées, les trois autres (23456) = 0, (13456) = 0, (12456) = 0 doivent l'être aussi. » Cette condition est suffisante. **4.** Les relations de Lagrange et de Schering entre les distances de cinq points vérifient la condition des six points. Ces relations sont :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 12 & 0 & 23 & 24 & 25 \\ 1 & 13 & 23 & 0 & 34 & 35 \\ 1 & 14 & 24 & 34 & 0 & 45 \\ 1 & 15 & 25 & 35 & 45 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 12 & 1 & 23 & 24 & 25 \\ 13 & 23 & 1 & 34 & 35 \\ 14 & 24 & 34 & 1 & 45 \\ 15 & 25 & 35 & 45 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

où (pq) signifie une fonction de l'intervalle des points p et q. **5.** On déduit [redacted]

l'espace qui ne déterminent pas une droite. 10. Il est impossible de [illegible] non les postulats de la Géométrie ordinaire. 11. Il n'y a pas d'autre système de Géométrie correspondant à la réalité que ceux qui sont caractérisés par les relations du n° 4. Ce point est exposé, dans la Note IV, à peu près comme dans les deux autres Mémoires de l'auteur sur la Métagéométrie (*Études de Mécanique abstraite*, 1868-1870; *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique*, 1878).

Vallée-Poussin (*Ch.-J. de la*). — Mémoire sur l'intégration des équations différentielles. (82 p. in-8°).

1. Soient $f(x, y)$ une fonction toujours finie dans une certaine aire T, A la limite supérieure, $-a$ la limite inférieure de f; toutefois, si la limite supérieure est négative, on prend $A = 0$; si la limite inférieure est positive, on fait $a = 0$. Prenons, à l'intérieur de T, le rectangle limité par les droites $x = x_0$, $x = X$, $y - y_0 - a(X = x_0)$, $y = y_0 + A(X - x_0)$. Partageons $X - x_0$ en n parties par les abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. A chaque abscisse x_k faisons correspondre deux ordonnées Y_k et y_k déterminées par les deux sommes :

$$Y_k = y_0 + M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + \ldots + M_k\delta_k = Y_{k-1} + M_k\delta_k,$$
$$y_k = y_0 + m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + \ldots + m_k\delta_k = y_{k-1} + m_k\delta_k,$$

où $\delta_k = x_k - x_{k-1}$; M_k et m_k sont respectivement les limites supérieures et inférieures de $f(x, y)$ dans la région R_k limitée par les droites $x = x_{k-1}$, $x = x_k$, $y = y_{k-1} - a_k\delta_k$, $y = Y_{k-1} + A_k\delta_k$, A_k et a_k étant des fonctions de k, finies, mais respectivement supérieures à A et a. Le théorème fondamental de l'auteur consiste en ce que Y_n, y_n ont des limites bien déterminées, quand les intervalles δ_k tendent vers zéro d'une manière quelconque, même si A_k et a_k varient.

2. L'intégrale de $y' = f(x, y)$ étant définie une fonction telle que

$$Fx - Fx_0 = \int_{x_0}^{x} f(x, Fx)\,dx,$$

il prouve, au moyen du théorème fondamental, l'existence d'une intégrale, même si $f(x, y)$ est *une fonction discontinue*, mais intégrable par rapport à x. Ainsi, par exemple, $y' = \varphi(x)\chi(y)$ a pour intégrale $y = y_0$, si $\varphi(x)$ est une fonction intégrable de x qui s'annule dans tout intervalle et si $\chi(y)$ est une fonction limitée.

3. Ce théorème s'étend à un système d'équations simultanées. En voici une conséquence particulière : « Une équation linéaire est intégrable dans tout intervalle où ses coefficients sont intégrables. »

4. Dans l'Appendice, l'auteur compare sa démonstration à celles de Cauchy, de Picard et de Peano.

ANNUAIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE. Bruxelles, Hayez.

59e année, 1893.

Terby (*F.*). — Notice sur Nicolas-Édouard Mailly. (377-404).

N.-É. Mailly, né à Bruxelles le 17 juin 1810, mort à Saint-Josse-ten-Noode, le 8 octobre 1891, est l'auteur de nombreux écrits sur l'histoire des Sciences en Belgique au XVIIIe et au XIXe siècle, et sur l'histoire de l'Astronomie au XIXe siècle, tous écrits avec une exactitude minutieuse.

ANNUAIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE. Bruxelles, F. Hayez.

62e année, t. MDCCXCVI; 1896.

Mansion (*P.*). — Notice sur les travaux mathématiques de E.-Ch. Catalan.

Reproduction avec quelques additions et modifications de la Notice publiée en 1885, dans les *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*, avec un Chapitre supplémentaire sur l'activité scientifique de Catalan pendant la période du 30 mai 1884 au 14 février 1894, date de sa mort. Pendant cette dernière période, il a trouvé sur les polynomes de Legendre de nouveaux théorèmes qui méritent d'être signalés. Il a réuni en trois Volumes de *Mélanges mathématiques* la plupart de ses petits Mémoires publiés depuis soixante ans dans divers recueils.



Lavernède, Tedenat, Bidone, Lehmus, Crelle, Scheffler, Steiner, Zornow, Adams, Cayley, Clebsch, Plücker, Quidde, Mendthal, Hardt, Desboves, Binder, Schröder, Affolter, Schellbach, Catalan, Pelletereau, Lebon.)

M. Derousseau prend comme point de départ la solution de Lehmus (*Annales de Gergonne*, t. X, p. 89), étendue et simplifiée par M. Catalan (*Nouvelles Annales*, t. V; *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, octobre 1874), et examine successivement tous les cas non résolus. Il obtient pour chacun d'eux une solution aussi simple et plus symétrique que celle de Malfatti.

***Rudski* (*P.*).** — Note sur la situation des racines des équations transcendantes $J_{n+\frac{1}{2}}(x)=0$, où J désigne une fonction de Bessel, $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ (1-29).

Ces racines, pour $n=0$, sont multiples de π; pour $n>0$, elles sont intermédiaires entre $\frac{(n+2p+1)\pi}{2}$ et $\frac{(n+2p+2)\pi}{2}$, p étant égal à $0, 1, 2, \ldots$.

***Catalan* (*E.*).** — Lettres à quelques mathématiciens. (1-36).

***Petit-Bois* (*G.*).** — Sur les courbes simpsoniennes. Formules approchées pour le calcul des aires planes. (1-19).

***Retali* (*V.*).** — Sur le double contact et le contact quadriponctuel de deux coniques. (1-35).

ATTI DEL REALE ISTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI (¹). 7ᵉ série, In-8°. Venezia, tip. G. Antonelli.

Tome II; 1890-1891.

***Chicchi* (*P.*).** — [V9]. Commémoration du Membre émérite sénateur Gustave Bucchia. (99-131).

***Favaro* (*A.*).** — [V7]. Sur quelques nouvelles études galiléiennes. (133-140).

***Favaro* (*A.*).** — [V9]. Sur la *Bibliotheca mathematica* de Gustave Eneström. Sixième Communication. (205-214).

(¹) Voir *Bulletin*, t. XV_2, p. 134-136.

Abetti (*A.*). — [U]. Observations astronomiques faites à Padoue en 1890. (425-445).

Castelnuovo (*G.*). — [Q2, *ref.* N_1]. Recherches sur la géométrie de la droite dans l'espace de quatre dimensions. (855-901).

Géométrie des complexes dans l'espace S_4. Parmi les résultats de cette étude nous citerons ceux que l'auteur obtient en considérant la représentation sur l'espace ordinaire d'une certaine variété cubique V avec dix points doubles, déjà étudiée par M. Segre (*Atti de Turin*, 1887 : *Sulla varietà cubica*, etc.); et *Mémoires de Turin*, 1888, et par l'auteur (*Atti del R. Istituto Veneto*, 1888 : *Sulle congruenze*, etc.), qui est la variété singulière d'un système linéaire ∞^3 de complexes. Cette variété est représentée dans l'espace ordinaire par le système ∞^4 des quadriques circonscrites à un pentagone gauche. Il y a six quadriques de ce système qui sont aussi inscrites au pentaèdre polaire du pentagone, et qui sont les images de six espaces à trois dimensions de S_4, par rapport auxquels l'équation de V est $x_1^3 + \ldots + x_6^3 = 0$ (avec $x_1 + \ldots + x_6 = 0$). Il y a sur V six certains systèmes de droites, et six de ces droites (une pour chaque système) passent par tout point de V et appartiennent à un cône quadrique; la recherche des coordonnées du point, étant donnée la sextique binaire représentant les droites, conduit à déterminer une fonction cubique de six variables qui prend seulement six valeurs distinctes par la permutation des variables, et, par suite, à remarquer d'étroites relations entre la variété V et la théorie des substitutions de cinq ou six lettres.

Lorenzoni (*G.*). — [U]. Le mouvement et le ciel de Vénus suivant Dante. Remarques (avec une planche et une appendice sur les formules pour calculer la splendeur de Vénus. (1061-1088, 1 pl.).

Tome III; 1891-92.

[redacted]

Padova (*E.*). — [R8cα]. Démonstration d'un th... é ... Jacobi. (847-855).

C'est le théorème relatif à l'équivalence du mouvement d'un corps de ré... lution pesant et homogène autour d'un point de l'axe, avec le mouvement de deux surfaces du second degré, chacune desquelles se meut autour de son centre en s'appuyant sans glisser sur un plan fixe, les composantes de la vitesse angulaire autour des axes étant p, q, r pour l'une et $-p$, $-q$, $-r$ pour l'autre. L'auteur en donne une démonstration fondée principalement sur la considération des équations différentielles du mouvement. Autres démonstrations en avaient été données par l'auteur même (*Atti de Turin*, t. XIX, 1884 : *Sulle rotazione*, etc.), par Halphen (*Traité des fonctions elliptiques*, 2e vol.) et par Darboux (*Comptes rendus*, t. CI, p. 11, 115 et *Journal de Math. pures et appliquées*, 4e série, t. I, p. 403 ; 1885).

Caprilli (*A.*). — [S2eα]. La transformation de l'énergie dans le mouvement d'un globe aérostatique et en général d'un corps quelconque plongé dans un fluide. (857-880).

Ciscato (*G.*). — [R8fα, *ref.* U10). Sur les formules fondamentales de la Trigonométrie sphéroïdique données par G.-H. Halphen. (1087-1109). Suite. (1333-1371).

Les formules d'Halphen sont peu utiles en pratique. L'auteur en donne d'autres pour la détermination des coordonnées géographiques.

Tome IV ; 1892-1893. Venezia, tip. C. Ferrari.

Padova (*E.*). — [R6b]. Quelques observations sur l'usage du principe d'Hamilton. (21-23).

Le principe d'Hamilton reste applicable même quand les variables que l'on introduit sont telles que l'on ne puisse exprimer par celles-ci toutes les coordonnées des points du système. Il suffit que l'on puisse exprimer par les seules q, q', δq, $\delta q'$ les quantités U', δT et $\Sigma m_i(x'_i\,\delta x_i + y'_i\,\delta y_i + z'_i\,\delta z_i)$.

Ricci (*G.*). — [I1]. Essai d'une théorie des nombres réels au point de vue de Dedekind. (233-281).

Fabri (*C^e*). — [D]. Sur les fonctions d'hyperespaces. (283-295).

Extensions aux cas de fonctions d'hyperespaces des propriétés trouvées par l'auteur même pour les *fonctions de lignes* (*Atti de Turin*, t. XXV ; 1889-90).

Favaro (*A.*). — [V9]. Sur la *Bibliotheca mathematica* de Gustave Eneström. Huitième Communication. (403-409)

Padova (*E.*). — [V9]. Commémoration de H. Betti. (609-621).

Abetti (*A.*). — [U]. Sur le nouveau micromètre à lamines appliqué à l'équatorial Dembowski. (623-641).

Abetti (*A.*). — [U]. Formules et tables pour calculer la réfraction différentielle dans les observations micrométriques. (643-659).

Loperfido (*A.*). — [U10]. Compensation des réseaux géodésiques à contour obligé. (661-676).

Favaro (*A.*). — [V7]. Sur un Chapitre attribué à Galilée. (725-730).

Le Chapitre publié dans le t. III de ces *Atti* n'est pas de Galilée, mais de J. Soldani.

Favaro (*A.*). — [V7]. Les opposileurs de Galilée. (731-745).

Libert Froidemont.

Padova (*E.*). — [R8f]. Sur un problème de Dynamique. (757-760).

Un théorème de M. Staekel : *Sur une classe de problèmes de Dynamique* (*Comptes rendus*, 6 mars 1893) est un cas particulier d'un théorème que M. Padova avait donné dans sa Note : *Sugli integrali comuni a più problemi di Dinamica* (*Atti del R. Istituto Veneto*, 1883).

Favaro (*A.*). — [V9]. Sur une nouvelle éphéméride de bibliographie mathématique, publiée sous les auspices de la Société [redacted]

quadratiques binaires et des systèmes à deux variables. (1336-1364).

Application des méthodes remarquables que l'auteur a données dans d'autres Travaux et appelées de *dérivation covariante* et de *dérivation contrevariante*, et dont un résumé a été fait par lui-même dans ce *Bulletin* (juin 1892). Ces applications se rapportent principalement aux systèmes de lignes tracées sur une surface. Certaines notions comme celle de courbure géodésique se présentent d'elles-mêmes sous forme analytique comme des invariants absolus communs à la forme fondamentale et à des formes covariantes. Les équations différentielles dont dépend la détermination des systèmes de lignes sur une surface sont données sous une forme canonique. Le dernier paragraphe contient une exposition sommaire d'une théorie des transformations des formes différentielles quadratiques binaires

$$\varphi = \Sigma_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$
$$\psi = \Sigma_{pq} (a_{pq})\, dy_p\, dy_q,$$

l'une dans l'autre, cette question étant traitée indépendamment du choix d'un système particulier de coordonnées, et en s'appuyant sur la théorie générale des formes, et sur celle des systèmes intégrables inconditionnellement.

Lorenzoni (*G.*). — [U10]. Détermination relative de la gravité terrestre dans les observations de Vienne, de Paris et de Padoue, avec les appareils et la coopération de MM. le colonel de Sterneck et le commandant Desforges. (1373-1441).

Abetti (*A.*). — [U]. Éléments de l'orbite et éphéméride de la planète 1893 A et comparaison avec les observations. (1547-1555).

Antoniazzi (*A.-M.*). — [U]. Sur quelques expressions des rapports n_1 et n_3 proposées pour la seconde approximation dans le calcul d'une orbite elliptique d'après trois observations. (1556-1567).

Enriques (*F.*). — [$M^2$9]. Les surfaces avec un nombre infini de transformations projectives en elles-mêmes. (1590-1635).

Les homographies sont supposées sans points unis multiples. Cela posé, les homographies d'un groupe ∞^1

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 : \rho x_2 : \rho^\mu x_3 : \rho^\nu x_4$$

ne transforment, en général, en eux-mêmes que les quatre plans unis.

L'existence de surfaces algébriques transformées en elles-mêmes dépend de la rationalité des deux invariants absolus μ, ν, ou de l'un d'eux, ou bien de celle

des coefficients d'une relation qui ait lieu entre μ et ν. Une surface algébrique ayant un groupe continu transitif de transformations projectives en elle-même, est rationnelle, et si le groupe est intransitif, elle est une surface réglée ou transformable en une surface réglée.

Après avoir déterminé les groupes ∞^2 d'homographies de l'espace, qui sont de treize espèces, l'auteur étudie les surfaces ayant ∞^2 transformations projectives en elles-mêmes (mais pas plus que ∞^2); ce sont :

a. Les surfaces de première espèce (de Klein et Lie);
b. Les surfaces réglées de troisième espèce;
c. Les surfaces avec un faisceau de coniques de la quatrième espèce;
d. Les surfaces algébriques du sixième ordre de cinquième espèce.

Enfin les surfaces ayant plus de ∞^2 transformations projectives en elles-mêmes sont :

a. Le plan;
b. La quadrique;
c. Le cône;
d. La développable cubique.

[A ces surfaces il faut ajouter les surfaces réglées cubiques (de Cayley) ayant la directrice infiniment rapprochée de la droite double. *Voir* t. V, p. 638.]

Cassani (*P.*). — [T4*a*]. Sur la dilatation des corps par l'action de la chaleur. (1655-1669).

Possibilité théorique de la détermination simultanée des coefficients de dilatation absolue du mercure et du verre par la méthode de Dulong et Petit, d'après deux observations.

Levi-Civita (*T.*). — [J5]. Sur les infinis et les infiniment petits actuels comme éléments analytiques. (1765-1815).

Le symbole a_ν, a étant un nombre réel quelconque et ν un indice réel, représente ce que l'auteur appelle un *monosème* du continu numérique de seconde

[redacted]

séries. Lorsque dans une succession elliptique $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$, on [illegible] ur toute valeur de n suffisamment grande

$$l - y^{(n)} < \sigma_\nu,$$

σ_ν étant un nombre arbitraire, *mais d'indice déterminé*, l est appelée la *limite* de la succession *par rapport à l'indice* ν.

Les considérations relatives aux limites sont ensuite employées pour définir la division. Après cela, l'auteur montre la permanence des propriétés connues pour les séries qui donnent respectivement e^x, $\cos x$, $\sin x$, lorsque x est un nombre elliptique (hyperbolique), et l'existence du logarithme. En considérant une fonction $f(x)$ d'une variable dans le champ elliptique il définit la continuité et la dérivation, et au sujet de cette dernière il est particulièrement intéressant de distinguer la dérivée ordinaire (relative à l'indice o) de la dérivée que l'auteur appelle *de seconde espèce*, qui est la limite l de

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dans l'hypothèse que l'on puisse rendre

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - l < \sigma_\nu,$$

σ_ν étant arbitrairement petit, c'est-à-dire avec l'indice ν arbitrairement grand en valeur absolue et négatif.

Suit une application géométrique, en particulier, la démonstration que dans le système de Riemann ainsi que dans celui de Lobatschewski, les angles d'un triangle dont les côtés sont infiniment petits par rapport au rayon de courbure, satisfont à la relation euclidienne.

Levi (*G.*). — [13*b*, réf. 19]. Recherches sur les nombres premiers. (1816-1842).

Théorème de Wilson, et deux autres théorèmes. Méthode de recherche des nombres premiers.

Tome V; 1893-94.

Lorenzoni (*G.*). — [U10]. Nouvel examen des conditions du support dans les expériences faites à Padoue en 1885-1886 pour déterminer la longueur du pendule à secondes, et moyen pratique pour déterminer les axes géométriques de rotation dans les deux positions réciproques du pendule convertible. (9-31).

Gloria (*A.*). — [V7]. Sur le lieu où Galilée habitait en Padoue et où il fit ses découvertes immortelles. (180-254, 1 pl.).

Lorenzoni (*G.*). — [U10]. Détermination relative de la gravité

terrestre à Padoue, à Milan et à Rome, faite en automne 1893 avec l'appareil pendulaire de Sterneck. (255-293).

Favaro (*A.*). — [V7]. Matériaux pour un catalogue des manuscrits et documents galiléiens non possédés par la Bibliothèque nationale de Florence. (331-457).

Favaro (*A.*). — [V9]. Sur la *Bibliotheca mathematica* de Gustave Eneström. Neuvième Communication. (545-551).

Favaro (*A.*). — [V7]. Amis et correspondants de G. Galilei. (552-580).

Marguerite Sarrocchi. Suivent, comme documents, des lettres de Luca Valerio, Guido Bettoli, Fra Innocenzo Perugino, Marguerite Sarrocchi.

Enriques (*F.*). — [M²9]. Sur le Mémoire : *Les surfaces avec un nombre infini de transformations projectives en elles-mêmes*. (638-642).

L'auteur apporte ici une correction au Mémoire mentionné, publié dans le t. IV. Cette correction a été introduite dans le compte rendu que nous en avons donné (*voir* ci-dessus).

Ricci (*G.*). — [C4, *ref.* O5*l*]. Sur la théorie des lignes géodésiques et des systèmes isothermes de Liouville. (643-681).

Mémoire faisant suite à celui du t. IV, p. 1336 (*Sur quelques applications*, etc.; *voir* ci-dessus). Il s'agit principalement de la recherche des intégrales premières quadratiques homogènes pour l'équation des géodésiques; mais l'auteur établit d'abord les principes fondamentaux de la théorie des [redacted]

U étant une fonction de u, et V de v (systèmes de Liouville). Par cela on découvre un nouveau lien entre le problème de la réduction de l'expression de l'élément linéaire à la forme de Liouville, et la recherche des intégrales premières quadratiques pour l'équation des géodésiques.

L'existence des systèmes de Liouville dépend de la possibilité de satisfaire à un certain système S d'équations simultanées; l'auteur étudie ce système pour déterminer les valeurs que peut avoir le nombre de ses constantes arbitraires et établir pour chacune de ces valeurs les équations de condition pour la forme fondamentale. Il retrouve les résultats connus pour les surfaces à courbure constante et les surfaces applicables sur les surfaces de rotation; et il donne le moyen de reconnaître entre ces surfaces celles qui admettent pour l'équation des géodésiques deux intégrales quadratiques indépendantes entre elles et de l'intégrale connue du premier degré. Puis il traite le cas des surfaces non applicables à des surfaces de rotation et démontre le théorème, déjà démontré par M. Darboux, que sur ces surfaces, lorsqu'il y a des systèmes de Liouville, il y en a un seul ou un nombre infini. Ces propriétés se simplifient pour deux classes de surfaces que l'auteur étudie ensuite. Ce sont les surfaces à courbure G variable, sur lesquelles les lignes G sont isothermes, et les surfaces applicables sur des surfaces à courbure moyenne constante.

Cassani (*P.*). — [Q2]. Sur la Géométrie pure euclidienne à n dimensions. (820-844).

Parallélisme, orthogonalité, angle de deux plans dans l'espace de quatre dimensions. Formules analytiques : distance d'un point à un plan, à une droite; angle de deux droites, etc. Extension de la tractation synthétique des questions précédentes à l'espace de n dimensions.

Chini (*M.*). — [H5g]. Sur une classe de polynomes différentiels. (872-876).

Étant y une fonction de x, soit

$$f(y) = \sum_0^n {}_r \alpha_r y^{(r)}$$

un polynome différentiel, les α_r étant des fonctions données de x. Le polynome

$$F(y) = \sum_0^n {}_r \beta_r y^{(r)},$$

étant $\beta_n = (-1)^n \alpha_n$, est appelé *polynome adjoint* de $f(y)$. Ces deux polynomes ont la propriété réciproque que toute solution y_i de $f(y) = 0$ rend le produit $y_i F(y)$ égal à la dérivée d'un polynome différentiel en y de l'ordre $n-1$; et toute solution Y_i de $F(y) = 0$ a une propriété semblable par rapport au produit $Y_i f(y)$.

Étant $f(y)$ un polynome tel que toute solution y_i de $f(y) = 0$ rende $y_i f(y)$ égal à la dérivée d'un polynome de l'ordre $n-1$, on doit avoir

$$(-1)^n F(y) = f(y).$$

Alors, en posant yz au lieu de y en f, on obtient un autre polynome dont les coefficients sont des polynomes différentiels en z, dont chacun a une propriété analogue à celle de f.

Padova (*E.*). — [U6*d*]. Une observation relative à la théorie de Maxwell pour l'anneau de Saturne. (1012-1014).

Éclaircissement sur un point du Chap. XII de la *Mécanique céleste* de Tisserand.

Favaro (*A.*). — [V3*b*, *ref.* V4*c*]. Sur les mécaniques de Héron Alexandrin, publiées pour la première fois d'après la version arabe de Costa ben Luca par le baron Carra de Vaux. (1117-1132).

Favaro (*A.*). — [S3]. En présentant quelques études de l'ingénieur G. Colle pour l'agrandissement de l'aqueduc de Padoue. (1133-1136).

Favaro (*A.*). — [V7]. Notices sur les catalogues originaux des académiciens Lincei, tirées de l'histoire inédite de F. Cancellieri. (1321-1339).

Abetti (*A.*). — [U]. Suite et fin des observations astronomiques faites en 1893 à l'observatoire royal de Padoue. Appendice : *Sur l'orbite de la planète* 1893 A = (354).... (1365-1397).

Fambri (*P.*). — [V9]. Joseph Battaglini. Notice nécrologique. (1419-1420).

[redacted]

gènes. L'auteur établit ces équations et donne des propriétés de leurs
Puis, en appliquant les résultats obtenus, il donne une extension de
d'invariant, en étudiant la question suivante :

Étant donné un système S, déterminer toutes les expressions ψ des variables, des fonctions du système et de leurs dérivées jusqu'à μ, telles que les intégrales du type

$$J = \int_C^{(n)} \psi \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$$

soient des invariants, C étant un champ arbitraire, indépendant du système des variables d'intégration. Les ψ sont appelés par l'auteur *hypofonctions* d'ordre μ.

Bordiga (*G.*). — [Q2, *ref.* N²1*g*]. Congruence du quatrième ordre et de la seconde classe dans l'espace de quatre dimensions. (1605-1620).

Soient C_0, C_1 les centres de deux faisceaux projectifs (non perspectifs) de rayons situés respectivement sur deux plans de R_4, qui ne soient pas renfermés dans un même espace ordinaire. Les rayons qui rencontrent deux rayons correspondants forment un complexe Ω. Les rayons d'Ω rencontrant un plan arbitraire forment la congruence étudiée par l'auteur.

Padova (*E.*). — [R6]. Sur les équations de la Dynamique. (1641-1669).

L'auteur reprend ici avec plus de détails l'exposition de ses vues sur les fondements de la Dynamique (Voir *Atti della R. Acc. dei Lincei Rendiconti*, t. VII, 1891, 1er semestre, p. 197, et ce *Bulletin*, t. XVIII_2, p. 110), particulièrement sur la manière qu'il propose de suivre pour établir les équations du mouvement et de l'équilibre des systèmes sans y mêler la notion ordinaire de *force*, et en les déduisant du principe de l'énergie.

Étant $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les coordonnées du système donné, soit

$$T = \frac{1}{2} \Sigma a_{rs} q'_r q'_s$$

l'énergie cynétique du système, que l'on suppose non soumis à des actions extérieures; alors T est constant et l'on peut se proposer de déterminer les accroissements $\chi_i \, dt$ des vitesses q'_i pour que l'on ait $dT = 0$. Ces χ_i sont déterminées par les équations

$$\Sigma_h a_{hi} \chi_h + \Sigma_{hk} a_{hk,i} q'_h q'_k = 0,$$

$a_{hk,i}$ étant les symboles de Christoffel, et l'auteur appelle ces χ_i les composantes de l'*accélération spontanée*. Maintenant, si, dans un mouvement donné quelconque, les accélérations du système sont représentées par des quantités q''_i, et que l'on pose $q'_i + (q''_i - \chi_i) \, dt$ au lieu de q'_i dans l'expression de T, l'accroissement de T sera donné par

$$dT = \Sigma_i \, dq_i \, \Sigma_h a_{hi} (q''_h - \chi_h).$$

et représentera ce que l'on appelle ordinairement le *travail des forces extérieures*, et l'on pourra appeler *force suivant la coordonnée* q_i, le coefficient de dq_i dans cette expression. De cette manière, si l'on a ce coefficient exprimé en fonction Q_i des q_i, des q'_i et de t, les équations du mouvement seront

$$Q_i = \Sigma_h a_{ih}(q''_h - \chi_h).$$

Suivent les applications de cette méthode au cas des fils et des surfaces flexibles et inextensibles, à celui des fluides incompressibles, puis aux corps élastiques et enfin à la théorie de la capillarité.

Tome VI, 1894-1895.

Favaro (*A.*). — [V7]. Nouvelles contributions à l'histoire du procès de Galilée. (88-97).

Cassani (*P.*). — [Q2]. Sur les angles des espaces linéaires dans un espace de plusieurs dimensions. (388-393).

Veronese (*G.*). — [K1]. Démonstration de la proposition fondamentale de l'équivalence des figures. (421-437).

Une figure ne peut être équivalente à l'une de ses parties. L'auteur admet ce *postulatum* pour les segments, et en donne la démonstration pour toute autre espèce de grandeur.

Ricci (*G.*). — [C1, *ref.* O5, 6]. Sur la théorie intrinsèque des surfaces et particulièrement de celles du deuxième degré. (445-495).

Étant

$$\varphi = \Sigma_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

[redacted]

qui sont les *équations intrinsèques* de la surface. Les a_{rs}, b_{rs} satisfont aux deux équations

$$b_{rst} = b_{rts},$$

$$\frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{a} = G,$$

que l'auteur appelle *équations fondamentales*, b_{rst} étant les éléments du système dérivé de celui des b_{rs} suivant la forme φ, et G l'invariant de Gauss. En employant deux systèmes orthogonaux quelconques de lignes tracées sur la surface, et en exprimant les b_{rs} par les éléments des systèmes covariants de ces systèmes de lignes, l'auteur transforme les équations fondamentales et les équations intrinsèques en réduisant ces dernières à une forme plus avantageuse pour l'intégration. Puis il donne l'interprétation géométrique de la forme différentielle cubique

$$\Sigma_{rst} b_{rst}\, dx_r\, dx_s\, dx_t$$

qui est la suivante :

Pour toute ligne tracée sur la surface, le rapport de cette forme changée de signe au carré de l'élément d'arc de la ligne, représente en chaque point l'accroissement que prend la flexion de la géodésique tangente à la ligne, en passant de ce point au point consécutif.

Ensuite il détermine les directions de la normale et de la binormale à une ligne de la surface en fonction de celles de la normale à la surface et des tangentes à deux systèmes de lignes orthogonales, en en déduisant les formules de Frenet; donne sous une forme nouvelle les équations des lignes de courbure, des systèmes conjugués et des lignes asymptotiques, et retrouve les formules de Gauss et de Codazzi, celles de Raffy et le théorème d'Enneper. Ainsi se termine le premier Chapitre.

Dans le second, il résout deux problèmes relatifs à l'applicabilité des surfaces; l'un :

a. Étant donnée une forme fondamentale binaire φ, déterminer les surfaces dont la courbure moyenne soit *c* (constante) et dont l'élément linéaire soit $\sqrt{\varphi}$; l'autre :

b. Trouver les surfaces gauches dont l'élément linéaire soit $\sqrt{\varphi}$.

Le troisième Chapitre commence par l'indication de la méthode à suivre pour traiter le problème suivant de la théorie des surfaces :

« Étant donnée une fonction fondamentale binaire

$$\varphi = \Sigma_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

et l'équation d'une surface

$$f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

en coordonnées cartésiennes orthogonales, reconnaître si $\sqrt{\varphi}$ peut en être une expression de l'élément linéaire. » La méthode indiquée par l'auteur est aussi appliquée par lui aux surfaces du deuxième ordre non développables, dont il trouve des nouvelles propriétés relatives aux courbures normales et tangen-

tielles des lignes de courbure. Puis il fait la détermination des lignes de courbure et de courbures principales, pour une expression quelconque de l'élément linéaire; trouve les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme fondamentale puisse représenter le carré de l'élément linéaire d'une surface du deuxième ordre; et enfin, il détermine la forme d'une telle surface lorsque l'on en connaît l'élément linéaire.

Ce Travail fait suite à d'autres Mémoires du même auteur, en particulier à celui qui a été publié dans ces *Atti*, t. IV, p. 1336 (*voir* ci-dessus), et il est une nouvelle preuve de la fécondité et de l'utilité des méthodes de dérivation covariante.

Padova (*E.*). [R8*c*γ]. Mouvement d'un disque circulaire pesant qui tourne en s'appuyant sur un plan horizontal. (489-495).

Le point d'appui est supposé ne pas glisser sur le plan. La résolution complète du problème dépend d'intégrales hyperelliptiques, mais on peut établir certaines propriétés du mouvement. Par exemple, si la vitesse du point d'appui est uniforme, sa trajectoire est une circonférence, et réciproquement.

Favaro (*A.*). — [V9]. Baldassarre Boncompagni et l'histoire des Sciences mathématiques et physiques. Notice. (509-521).

Favaro (*A.*). — [V9]. Sur la *Bibliotheca mathematica* de Gustave Eneström. Dixième Communication. (522-526).

Palatini (*F.*). — [K7]. Contribution à la théorie des faisceaux de rayons et à la théorie de l'égalité des figures planes. (710-729).

Propriété relatives particulièrement à l'*ordre* et à la *position* des éléments d'un faisceau.

Banal (*L.*). — [C4, *ref.* O6*g*, *ref.* Q2]. Sur une classe de sur-

[redacted]

Ciscato (*G.*). — [U]. Observations de planètes et de [illegible], faites à l'observatoire de Padoue en 1894, et calculs rel[illegible]s à l'orbite de (354).... (1161-1184).

Tome VII, 1895-1896.

Favaro (*A.*). — [V7]. Nouvelles contributions à l'histoire des Sciences dans le dix-septième siècle. Tite-Live Burattini. (110-116).

Picciatti (*G.*). — [R8*g*]. Sur la transformation des équations de la Dynamique dans quelques cas particuliers. (175-189).

Antoniazzi (*A.*). — [U]. Équations de condition pour les occultations observées à Padoue en 1894 et 1895. (327-384).

Favaro (*A.*). — [V7]. Amis et correspondants de Galilée. Études et recherches. II. Octave Pisani. (411-440).

Favaro (*A.*). — [V7]. Amis et correspondants de Galilée. Études et recherches. III. Jérôme Magagnati. (441-465).

Lerenzoni (*G.*). — [R8*d*, réf. T2]. Sur l'influence de la flexion du pendule sur la durée de son oscillation. (466-474).

Ciscato (*G.*). — [U]. Observations de planètes et de comètes, faites à l'observatoire de Padoue en 1895. (737-752).

Del Lungo (*C.*). — [R5]. Sur le mécanisme des forces à distance. (997-1003).

Levi-Civita (*T.*). — [R9*c*]. Sur le mouvement d'un système de points matériels éprouvant des résistances proportionnelles aux vitesses. (1004-1008).

Les équations différentielles du mouvement d'un système matériel S dont les points éprouvent des résistances proportionnelles aux vitesses, peuvent se déduire des équations relatives au mouvement libre de S par le changement

$$dt_1 = e^{-\lambda t}\,dt$$

de variable indépendante.

Fano (*G.*). — [Q2, *réf.* $M_2 8$]. Sur les variétés algébriques de

l'espace à quatre dimensions avec un groupe continu intégrable de transformations projectives en elles-mêmes. (1069-1103).

Ce sont les suivantes :

1. Variété du quatrième ordre, composée de ∞^1 plans et ayant un plan triple (double comme directeur et simple comme générateur).

2. Variété cubique avec deux coniques doubles.

3. Variété cubique (particulière) avec deux droites doubles incidentes, l'une de première et l'autre de deuxième espèce.

4. Variété du quatrième ordre avec un plan double et une droite triple située dans ce plan et contenant un point où les deux espaces qui constituent le cône tangent sont coïncidants.

5. Variétes diverses du type

$$(a) \qquad x_1^{k-2} f = x_2^n,$$

k étant un nombre rationnel et f une forme quadratique telle que les espaces du faisceau

$$x_1 + \lambda x_2 = 0$$

coupent la variété (a) suivant des quadriques ou des cônes du second degré, tangents au plan $x_1 = x_2 = 0$.

Tome VIII; 1896-1897.

Cassani (*P.*). — [I2]. La définition géométrique de nombre premier. (103-108).

Bordiga (*G.*). — [Q2, *ref.* M²7*b*δ]. Cas particuliers de surfaces réglées rationnelles du quatrième ordre. (420-432).

Ciscato (*G.*). — [U]. Observations astronomiques faites à l'obser-

[redacted]

Weingarten a réduit la détermination de toutes les surfaces applicables sur une surface donnée, à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre. L'auteur, en employant les méthodes du calcul différentiel absolu, déduit le théorème de Weingarten des formules fondamentales de *Géométrie intrinsèque* (*voir* ces *Atti*, t. VI).

Levi-Civita (*T.*). — [R8]. Sur la stabilité de l'équilibre pour les systèmes à liaisons complètes. (1247-1250).

L'auteur suppose que le système soit à liaisons indépendantes du temps et doué d'un seul degré de liberté; les forces sont supposées ne dépendre que de la position du système. Soit x la coordonnée du système ($x = 0$ étant la position d'équilibre) et $X(x)$ la force. On sait que si le développement de $X(x)$ commence par une puissance impaire cx^n, l'équilibre est stable ou instable suivant que l'on a $c > 0$ ou $c < 0$.

L'auteur démontre que l'équilibre est toujours instable, excepté le cas de n impair et $c < 0$.

Ricci (*G.*). — Sur le théorème de Stokes dans un espace quelconque à trois dimensions et en coordonnées générales. (1536-1539).

Le théorème de Stokes a lieu dans un espace de nature quelconque (non euclidien).

Palatini (*F.*). — [I19, *ref.* P4c]. Sur les solutions, satisfaisant au problème géométrique, des équations de condition pour les transformations Cremona des figures planes. (1555-1568).

Tome IX; 1897-1898.

Cassani (*P.*). — [P4b]. Sur la correspondance quadratique. (30-34).

Correspondance quadratique particulière, non involutive, entre deux plans superposés.

Lorenzoni (*G.*). — [R8d, *ref.* T2]. Sur l'influence de la flexion du pendule sur la durée de son oscillation. (61-68).

Veronese (*G.*). — [V9]. Notice nécrologique sur le prof. sénateur F. Brioschi. (144-145).

Cassani (*P.*). — [V9]. Commémoration de P. Fambri. (319-333).

Gradenigo (*P.*). — [V7]. Sur la maladie qui produisit la cécité de Galilée. (421-430).

D'Arcais (*F.*). — [D3*f*]. Sur les fonctions d'une variable complexe. (1048-1050).

Expression analytique d'une fonction monogène uniforme autour d'un point singulier, point limite isolé d'un ensemble de points singuliers.

Tome X; 1898 (octobre-décembre).

Cassani (*P.*). — [V1]. Sur les fondements de la Géométrie. (42-60).

Palatini (*F.*). — [$M^2$1*c*]. Quelques propriétés sur le système de surfaces d'ordre r passant par les arêtes d'un $(r+1)^{\text{èdre}}$ complet, et quelques théorèmes sur les surfaces algébriques relativement à la théorie des polaires. (187-200).

Volterra (*V.*). — [H9*f*]. Sur les fonctions polyharmoniques. (233-235).

Ce sont les fonctions (à un nombre quelconque de variables) qui satisfont à l'équation

$$\Delta^2\Delta^2\ldots\Delta^2 = 0.$$

On peut y appliquer l'inversion par rayons vecteurs réciproques.

Lauricella (*G.*). — Intégration de la double équation de Laplace dans un champ en forme de couronne circulaire. (236-250).

Intégration de l'équation $\Delta^2\Delta^2 = 0$.



L'auteur donne une nouvelle solution de ce problème (posé p… en 1820) en supposant la fonction f holomorphe et nulle à l'origin…

Lémeray. — Sur quelques algorithmes généraux et sur l… ération. (10-15).

Soit $f(x_0)$ une fonction de x_0; désignons par $F(x)$ sa $x^{\text{ième}}$ itérée $f^x(x_0)$; à la fonction $f(x)$ correspond une fonction $F(x)$ son itérée; inversement on peut dire que $f(x)$ est la *désitérée* de $F(x)$; on peut à son tour itérer $F(x)$ et ainsi de suite.

L'auteur établit un certain nombre de théorèmes généraux sur les fonctions itérées et désitérées des divers ordres d'une fonction donnée.

D'Ocagne (M.). — Application de la méthode nomographique la plus générale, résultant de la superposition de deux plans, aux équations à trois et à quatre variables. (16-43).

Delaunay (N.). — Sur les surfaces n'ayant qu'un côté et sur les points singuliers des courbes planes. (43-52).

Après avoir indiqué des moyens de réaliser des surfaces *à un seul côté* (surfaces pour lesquelles le sens de la normale se trouve changé quand on revient au point de départ après un parcours convenable) et signalé quelques propriétés singulières de ces surfaces, l'auteur établit les équations générales de celles qui sont réglées. Il trouve

$$(1)\qquad \frac{x-f(t)}{f(t+k)-f(t)}=\frac{y-F(t)}{F(t+k)-F(t)}=\frac{z-\varphi(t)}{\varphi(t+k)-\varphi(t)},$$

les fonctions f, F, φ étant des fonctions périodiques, de même période $2k$ liées par la relation

$$[f(t+k)-f(t)]^2+[F(t+k)-F(t)]^2+[\varphi(t+k)-\varphi(t)]^2=\text{const}.$$

Si l'on prend

$$\frac{f(t)}{\sin t}=\frac{F(t)}{\cos t}=2\cos t+1,\qquad \varphi(t)=\sin^2 t,$$

on obtient la surface bien connue dont l'équation est

$$x^2(1-z^2)=zy^2.$$

Le cylindroïde de Plücker correspond aux fonctions

$$f(t)=\cos t,\qquad F(t)=\sin t,\qquad \varphi(t)=\sin 2t.$$

L'auteur se propose ensuite de caractériser géométriquement les *développables à un seul côté*; à cet effet il démontre le théorème suivant :

Le lieu géométrique des tangentes à une courbe fermée gauche, ayant un nombre impair de points singuliers, qui sont des points de rebroussement

ou des points doubles à tangente double, est une surface développable n'ayant qu'un côté.

Pour ces développables les lignes $u =$ const., u étant la valeur commune des rapports (1), sont des trajectoires orthogonales des génératrices, ainsi qu'il résulte du calcul de l'élément linéaire, que l'auteur donne en terminant.

D'Ocagne (*M.*). — Résumé d'un Mémoire sur les équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés. (53-55).

Ce Mémoire est publié dans les *Acta mathematica*, t. XXI, p. 301.

Le Roux. — Sur l'intégrabilité des équations linéaires aux dérivées du second ordre par la méthode de Laplace. (55-56).

Considérant l'équation du second ordre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

et ses deux invariants

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c, \qquad k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c,$$

on suppose que ces deux fonctions admettent une ligne de pôles d'ordre $n+1$, représentée par une équation analytique $y = \theta(x)$. En regardant h et k comme des fonctions de y, on pourra écrire

$$h = \frac{H_0\theta'(x)}{(y-\theta)^{n+1}} + \ldots, \qquad k = \frac{K_0\theta'(x)}{(y-\theta)^{n+1}} + \ldots,$$

H_0 et K_0 désignant des fonctions de x.

Pour que l'équation soit intégrable par la méthode de Laplace, ***il faut***, si [redacted]

Delannoy (H.). — Sur la probabilité des événements composés. (64-70).

L'auteur discute trois problèmes de probabilité dont la solution avait paru à M. Simmons contradictoire avec la règle de Laplace : *Si les événements sont indépendants les uns des autres, la probabilité de leur ensemble est le produit de leurs probabilités particulières.* Si la règle de Laplace paraît en défaut, c'est que les événements *ne sont pas indépendants*, comme le prouve M. Delannoy. Il mentionne ensuite pour les événements dits *indépendants* une définition due à M. Simmons et qui est bien préférable à celle de Moivre. On dira que *deux événements sont indépendants quand l'arrivée de l'un n'augmente ni ne diminue la probabilité de l'arrivée de l'autre.*

Zaremba (S.). — **Sur les équations aux dérivées partielles $\Delta u + \xi u + f = 0$. (70-77).**

Soient (S) une surface fermée limitant un domaine (D);

f une fonction donnée des coordonnées x, y, z, admettant des dérivées premières dans le domaine (D);

ξ une constante réelle ou imaginaire;

u une fonction satisfaisant à l'intérieur du domaine (D) à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \xi u + f = 0$$

et prenant la valeur zéro sur la surface (S).

M. Zaremba fait connaître une expression nouvelle de fonction u.

Il suppose que la surface (S) admet un plan tangent déterminé en chacun de ses points et que le domaine (D) est simplement connexe.

Il désigne par μ la détermination de $\sqrt{-\xi}$ dont la partie réelle est positive, par r la distance des deux points (x, y, z) et (x', y', z'); par $d\tau$ un élément de volume du domaine (D) autour du point (x', y', z') et pose

$$v_1 = \frac{1}{4\pi} \int_D f(x', y', z') \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau,$$

l'indice D exprimant que l'intégration doit être étendue à tout le domaine (D). Soit ensuite v_2 la fonction satisfaisant à l'intérieur du domaine (D) à l'équation $\Delta v_2 = 0$ et vérifiant *sur la surface* (S) l'équation $v_1 + v_2 = 0$.

De même, on pose en général

$$v_{2n+1} = \frac{1}{4\pi} \int_D v_{2n} \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau$$

et l'on désigne par v_{2n+2} la fonction qui, vérifiant à l'intérieur du domaine (D) l'équation $\Delta v_{2n+2} = 0$, prend sur la surface (S) les valeurs déterminées par l'équation $v_{2n+1} + v_{2n+2} = 0$.

Cela posé, l'auteur démontre que la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} v_i = v_1 + v_2 + \ldots + v_i + \ldots$$

est convergente et qu'elle représente la fonction u dans le cas, entre autres, où le module de ξ est assez grand, l'argument étant compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

L'expression ainsi obtenue pour u permet d'établir très aisément un théorème de M. Poincaré : *Lorsque le module de ξ croît indéfiniment, l'argument conservant une valeur fixe comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, l'intégrale u a pour valeur asymptotique* $-\frac{f}{\xi}$.

Beudon (*J.*). — Sur les singularités des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (77-80).

Étant donnée une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$f(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

on sait qu'elle admet des caractéristiques linéaires définies par les équations suivantes :

$$\frac{dx_i}{\frac{\partial f}{\partial p_i}} = \frac{dz}{p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \ldots + p_n \frac{\partial f}{\partial p_n}} = -\frac{dp_i}{\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Pour engendrer une intégrale quelconque, on choisit arbitrairement une multiplicité M'_{n-1} vérifiant l'équation proposée, et par chaque élément du premier ordre de cette multiplicité on fait passer une caractéristique.

Mais si cette multiplicité initiale M'_{n-1} est elle-même engendrée par des caractéristiques, le procédé précédent ne s'applique plus. L'auteur démontre que, dans ce cas, il y a *une infinité* de surfaces intégrales qui contiennent cette multiplicité.

Duporcq (*E.*). — Sur un théorème de M. Humbert. (81-82).

Démonstration géométrique de cet énoncé, rattaché incidemment par [redacted]

Lecornu. — Sur les développantes d'une développante (85-86).

Parmi toutes les développantes d'une même développante de cercle, il y en a une dont le rayon de courbure est partout égal au rayon polaire issu du centre du cercle.

Touche. — Sur la résistance des fluides à une sphère. (86-89).

Borel (Ém.). — Sur les caractéristiques des fonctions θ. (89-90).

Détermination *directe* du nombre des caractéristiques *paires* d'une fonction θ à p variables.

Bricard (R.). — Note sur une propriété des fonctions elliptiques du second ordre. (91-98).

L'auteur commence par établir ce théorème :

Soit $f(z)$ une fonction elliptique du second ordre, dont l'une des périodes est 2ω. Considérons les expressions

$$t_0 = f(z), \quad t_1 = f\left(z + \frac{2\omega}{n}\right), \quad \ldots, \quad t_{n-1} = f\left(z + \frac{n-1}{n}2\omega\right).$$

L'équation qui a pour racines $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ est de la forme

$$P(\theta) + \lambda Q(\theta) = 0,$$

$P(\theta)$ *et* $Q(\theta)$ *désignant deux polynomes du degré n à coefficients constants.*

Cette proposition est susceptible d'applications géométriques, dont voici l'une. Considérons deux coniques C et C' telles qu'il existe un polygone de n côtés inscrit à la première et circonscrit à la seconde. On sait, d'après le théorème de Poncelet, qu'il existe alors une infinité de polygones de n côtés jouissant de la même propriété. *Le lieu des centres des moyennes distances des sommets de ces polynomes est une conique homothétique à la conique circonscrite* C, *quelle que soit la conique* C'.

Appell (P.). — Interprétation de la période imaginaire dans un mouvement à la Poinsot. (98-102).

Dans la solution analytique donnée par Jacobi pour le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe quand il n'y a pas de forces accélératrices, les composantes de la rotation instantanée et les neuf cosinus s'expriment par des fonctions doublement périodiques du temps, de première ou de seconde espèce.

L'auteur montre que l'on peut, par un choix convenable des conditions initiales, associer les mouvements du solide deux à deux, de telle façon que la période réelle de l'un soit égale à la période imaginaire de l'autre, divisée par i.

De Montcheuil. — **Étude des surfaces définies par l'équation**

$$R + R' = F(u) + F_1(u_1).$$

(103-114).

L'auteur considère les surfaces telles que, les cosinus directeurs c, c', c'' de leur normale étant représentés par les formules

$$(1) \qquad c = \frac{u + u_1}{uu_1 + 1}, \qquad c' = i\,\frac{u_1 - u}{uu_1 + 1}, \qquad c'' = \frac{uu_1 - 1}{uu_1 + 1},$$

leurs rayons principaux de courbure R et R' satisfassent à l'équation

$$(2) \qquad R + R' = F(u) + F_1(u_1)$$

où F et F_1 sont des fonctions quelconques de leurs arguments respectifs.

Ces surfaces comprennent comme cas très particulier les surfaces minima et il y a lieu d'en rechercher un mode de génération analogue à celui que S. Lie a fait connaître pour la surface minima.

M. de Montcheuil commence par remarquer que les surfaces intégrales de de l'équation (2) sont les enveloppes du plan

$$(u + u_1)x + i(u_1 - u)y + (uu_1 - 1)z + \xi = 0,$$

la fonction ξ satisfaisant à l'équation

$$(2)' \qquad \frac{\partial^4 \xi}{\partial^2 u\, \partial^2 u_1} = 0,$$

ce qui revient à dire qu'elle est de la forme

$$\xi = A u_1 + A_1 u + B + B_1,$$

où A, B représentent des fonctions arbitraires de u, A_1 et B_1 des fonctions arbitraires de u_1.

Il résout ensuite le problème proposé en établissant les deux théorèmes que

[redacted]

Si l'on égale ces constantes à zéro, on obtient des surfaces lieux du milieu d'un segment rectiligne dont les extrémités décrivent les arêtes de rebroussement de deux développables isotropes, c'est-à-dire deux courbes minima : c'est le mode de génération indiqué par S. Lie pour les surfaces minima.

A propos d'un autre cas particulier, celui où les deux courbes sont les intersections de deux développables isotropes par deux plans isotropes, l'auteur rencontre l'équation

$$R + R' = \frac{2z}{1 - c^2},$$

dont l'intégrale générale ressort de son analyse, ainsi que des propriétés remarquables des surfaces correspondantes.

Le Mémoire se termine par une propriété générale des surfaces considérées :

Si l'on appelle développée moyenne *la surface lieu du milieu du segment focal d'une congruence normale à une famille de surfaces, les surfaces, lieux du milieu d'un segment, dont les extrémités décrivent deux courbes quelconques, sont celles que l'on obtient quand on cherche à déterminer les développées moyennes des surfaces définies par l'équation* (2)'.

Issaly (*l'abbé*). — Sur une formule d'Enneper et sa corrélative. (114-124).

Dumont (*F.*). — Sur deux formes particulières de l'équation réduite des surfaces du troisième degré générales. (124-129).

Goursat. — Sur l'existence des fonctions intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles. (129-134).

L'auteur substitue à la démonstration de M[me] Kowalewsky une analyse qui permet d'arriver plus vite au but, grâce à l'emploi d'un artifice dont il s'est déjà servi pour l'étude des propriétés des caractéristiques.

Pour une équation du second ordre à deux variables indépendantes, la démonstration du théorème de Cauchy se ramène par quelques transformations simples à ceci :

L'équation

$$r = a + bx + cy + dz + ep + fq + gs + ht + \ldots$$

admet une intégrale holomorphe dans le domaine du point $x = y = 0$, *s'annulant, ainsi que sa dérivée première* p, *pour* $x = 0$.

Après avoir développé la démonstration de cet énoncé particulier, M. Goursat indique plus sommairement le moyen d'établir la proposition générale, qu'il fait dépendre de celle-ci :

Pour une valeur convenablement choisie de la constante réelle $\alpha < 1$ *le système*

$$\frac{\partial^n Z_1}{\partial x^n} = \frac{\partial^n Z_2}{\partial x^n} = \ldots = \frac{\partial^n Z_q}{\partial x^n} = \frac{M}{\left(1 - \frac{U}{R}\right)\left(1 - \frac{V}{\rho}\right)} - M,$$

où V est la somme des dérivées partielles d'ordre n des fonctions inconnues, sauf les dérivées $\frac{\partial^n Z_i}{\partial x^n}$, *et où l'on a*

$$U = \frac{x}{a} + x_1 + x_2 + \ldots + x_r + Z_1 + \ldots + Z_q + \frac{\partial Z_n}{\partial x} + \ldots,$$

les termes non écrits comprenant toutes les dérivées d'ordre inférieur à n, admet un système d'intégrales holomorphes dans le voisinage du point $x = x_1 = \ldots = x_n = 0$, *tel que tous les coefficients des développements en série de ces intégrales soient des nombres réels et positifs.*

Appell (*P.*). — Sur les lignes qui se conservent dans la déformation d'un milieu continu. (135-136).

Dumont (*F.*). — Sur les surfaces réglées du troisième ordre à un seul côté. (137-138).

Les surfaces réglées du troisième ordre, à deux directrices rectilignes, sont connues pour être les surfaces algébriques les plus simples qui n'aient qu'un côté. L'auteur montre que cette propriété constitue un nouveau caractère distinctif entre ces surfaces et la surface de Cayley (surface réglée du troisième ordre à directrice rectiligne simple) qui n'est pas une surface à un seul côté.

Pellet (*A.*). — Sur la théorie des surfaces. (138-159).

Introduction. — Ce Mémoire fait suite à celui qui a paru dans les *Annales de l'École Normale* en septembre 1897. La méthode que j'expose permet de simplifier la théorie des surfaces ayant même représentation sphérique, en particulier celle des surfaces de Weingarten, le théorème de Christoffel et celui de Lamé sur les systèmes triples, orthogonaux et isothermes. J'y donne aussi un résultat complètement nouveau, l'expression générale de l'élément linéaire des surfaces applicables sur une surface de révolution, lorsque les coefficients de cet élément sont des fonctions de la courbure de la surface.

[redacted]

M. Lecornu se propose de prouver que la même chose peut a[illegible] pour l'équilibre statique d'un point sollicité par des forces qui n'ont pas de potentiel.

Il commence par étudier les conditions de stabilité d'un point [illegible]ment libre, sollicité par des forces sans potentiel, en se plaçant dans un c[illegible]coup moins particulier en réalité qu'en apparence, celui où la force a pour composantes

$$X = m\,x + n\,y + p\,z,$$
$$Y = m'x + n'y + p'z,$$
$$Z = m''x + n''y + p''z,$$

les neuf coefficients m, n, p étant des constantes. On arrive d'abord à ce théorème :

L'équilibre est stable quand il existe à partir de la position d'équilibre O ($x = y = z = 0$) *trois directions réelles telles que, pour chacune d'elles, la force soit dirigée vers le point* O (lignes centrales). *Quand cette condition nécessaire et suffisante est remplie, le mouvement le plus général résulte de la composition de trois vibrations pendulaires exécutées suivant les lignes centrales sous l'action des forces correspondantes.*

Le lieu des points pour lesquels la force est perpendiculaire au rayon vecteur issu de l'origine est un cône du second degré

$$(mx + ny + pz)x + (m'x + n'y + p'z)y + (m''x + n''y + p''z)z = 0.$$

Faisant alors coïncider les axes coordonnés avec les axes de symétrie de ce cône, on a pour nouvelles expressions des composantes de la force

$$X = -Ax + (\gamma y - \beta z),$$
$$Y = -By + (\alpha z - \gamma x),$$
$$Z = -Cz + (\beta x - \alpha y).$$

Les termes renfermant A, B, C correspondent à une force dérivant du potentiel

$$\tfrac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2),$$

l'auteur appelle cette force la *force potentielle*. Les termes entre parenthèses représentent les composantes d'une force perpendiculaire au vecteur de composantes α, β, γ et égale à la vitesse que ce vecteur, considéré comme une rotation, imprimerait au point considéré. Ce sera la *force tourbillonnaire*, le *tourbillon* étant le vecteur (α, β, γ). Cela posé, on a les théorèmes suivants :

Quand les constantes A, B, C *sont positives, c'est-à-dire quand les surfaces de niveau de la force potentielle sont des ellipsoïdes, la stabilité est compatible avec une direction quelconque du tourbillon; il suffit que la grandeur de ce tourbillon soit inférieure à une limite déterminée, facile à calculer.*

Quand l'une des constantes A, B, C *est négative, la stabilité peut encore subsister, bien que la force potentielle et la force tourbillonnaire produisent séparément un équilibre instable; il faut, dans ce cas, que la direction de la force tourbillonnaire soit convenablement choisie et que sa grandeur soit comprise entre deux limites déterminées.*

[illegible] sont négatives. [illegible] et des lignes [illegible]

[illegible] introduction de [illegible] est [illegible] à la matériali- [illegible] par la position [illegible]

[illegible] à partir [illegible] ne laisse [illegible] potentielle [illegible] hyperboloïdes, la [illegible] grande attraction [illegible]

[illegible] introduction [illegible] des sur- [illegible] toutefois. [illegible]

[illegible]

[illegible] — [illegible] à l'infini et [illegible] ordre. 165- [illegible]

[illegible] — [illegible] qui admettent [illegible]

[illegible] quadriques qui [illegible] avant cette [illegible] surface du troisième [illegible] M. [illegible] a été conduit [illegible] entre les points



La conjuguée d'une droite Δ par rapport à une cubique gauche Γ, *qu'elle ne rencontre pas, est une cubique gauche coupant* Γ *aux quatre points de contact des tangentes qui rencontrent* Δ, *et touchant en chacun de ces points le plan osculateur de* Γ. Cette conjuguée se réduit à une conique si Δ rencontre Γ, à une droite si Δ rencontre Γ en un point et appartient au plan osculateur en ce point. Si Δ est une corde de Γ, elle est sa propre conjuguée.

Si une ligne L d'ordre m coupe Γ en k points et touche son plan osculateur en h points, sa conjuguée est une ligne d'ordre

$$m' = 3m - (k + h).$$

Si une surface S d'ordre m contient Γ comme ligne multiple d'ordre k et si h des nappes passant par Γ y sont tangentes aux plans osculateurs, la surface Σ conjuguée de S est d'ordre

$$m' = 3m - 4(k + h),$$

qui passe k' fois par la cubique Γ et dont h' nappes sont tangentes aux plans osculateurs de Γ sur cette courbe elle-même. On a

$$k' = m - (k + 2h), \qquad h' = m - (2k + h)$$

et par suite

$$m' - m = 2(k' - k) = 2(h' - h),$$

de sorte que si deux nombres corrélatifs sont égaux, les autres le sont aussi.

II. *Équation des surfaces ayant pour ligne asymptotique une cubique gauche.* — Des formules précédentes, il résulte immédiatement que *toute surface du troisième ordre qui admet pour ligne asymptotique une cubique gauche peut être considérée comme le lieu des pôles d'un plan par rapport aux quadriques passant par la cubique.*

Si trois quadriques passent par une cubique et n'ont que celle-ci en commun, le lieu des pôles d'un plan P ayant pour équation

$$AX + BY + CZ + DT = 0$$

est une surface du troisième ordre qui constitue, avec le plan P, le jacobien du système formé par ces trois quadriques et le plan P compté deux fois. L'équation de cette surface est de la forme

$$AS_1 + BS_2 + CS_3 + DS_4 = 0,$$

les surfaces $S_i = 0$ étant les conjuguées des faces du tétraèdre de référence.

Si, au lieu de prendre pour A, B, C, D des constantes, on prend des polynomes d'ordre $m - 3$, on a *l'équation générale des surfaces d'ordre m admettant* Γ *comme ligne asymptotique.*

III. *Propriétés des surfaces ayant une cubique asymptotique.* — Les surfaces d'ordre m qui admettent pour asymptotique une cubique Γ ont sur cette cubique $3(m - 2)$ points doubles. Mais ce ne sont pas les surfaces les plus générales d'ordre m qui contiennent Γ et ont sur cette courbe $3(m - 2)$ points doubles.

Les surfaces qui sont leurs propres conjuguées sont des quadriques conte-

nant Γ et des surfaces du quatrième ordre admettant Γ comme asymptotique; chacune de ces dernières peut être considérée comme la jacobienne correspondant à un système de quadriques ayant *six* points communs. Parmi elles, il convient de signaler une surface remarquable qui correspond au cas où la cubique a deux contacts du second ordre avec une quadrique du système ne passant pas par Γ (les *six* points de base se confondant *trois par trois*); cette surface est réglée, ses asymptotiques non rectilignes sont toutes des cubiques, transformées homographiques de Γ, et la surface divise harmoniquement les cordes de l'une quelconque de ses asymptotiques. Elle jouit d'une propriété caractéristique : *c'est, parmi les surfaces du quatrième ordre ayant une droite triple et une droite simple, la seule qui puisse se transformer homographiquement en elle-même de façon que les points homologues ne soient pas situés sur une même génératrice.*

Le Mémoire se termine par quelques indications sur la surface formée des cordes d'une cubique et par la détermination des surfaces réglées dont toutes les asymptotiques sont des cubiques gauches. *Toute surface telle est le lieu des droites qui joignent chaque point d'une cubique aux points où le plan osculateur correspondant coupe une droite.* De cette propriété résulte la génération de ces surfaces et leur répartition en six types : deux fournis par des surfaces du sixième ordre, un par une surface du cinquième, deux par des surfaces du quatrième, le dernier par la surface du troisième ordre à directrice unique (surface de Cayley).

Humbert (*G.*). — Sur une interprétation géométrique de l'équation modulaire pour la transformation de troisième ordre. (233-236).

Voici cette interprétation : *Soit une cubique plane unicursale quelconque; les quatre tangentes qu'on peut lui mener par un point arbitraire la coupent de nouveau en quatre points; le rapport anharmonique des droites qui joignent à ces quatre points le point double de la cubique et le rapport anharmonique des quatre tangentes primitives sont liés par l'équation modulaire du cas* $n = 3$. L'auteur indique quelques conséquences de ce théorème.

[redacted]

Partant de là, M. Goursat démontre en quelques lignes que, si
de l'aire donnée est une circonférence de cercle, la détermination de
se ramène au problème classique de Dirichlet, relatif à l'équation
thode s'étend sans modification au cas d'un nombre quelconque de

Borel (Ém.). — Sur les singularités des séries de Tayl

M. Hadamard a prouvé que, si l'on considère les trois séries ent

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$
$$\psi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots,$$
$$f(z) = a_0 b_0 + a_1 b_1 z + a_2 b_2 z^2 + \ldots,$$

dont les deux premières ont un rayon de convergence fini et
si α est un point singulier quelconque de la fonction $\varphi(z)$ et
gulier quelconque de $\psi(z)$, la fonction $f(z)$ ne peut avoir
singuliers que les points $\alpha\beta$.

M. Borel donne de ce théorème une démonstration qu'il a trouvée indépendamment de celle de l'auteur, et qui, bien fondée sur le même principe, permet de compléter le théorème.

Ainsi, il établit que *la nature du point singulier $\alpha\beta$ ne dépend que de la nature des points singuliers α et β*; que, dans des cas assez étendus, *le point $\alpha\beta$ est effectivement un point singulier de la fonction $f(z)$*; que *si deux singularités $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ se superposent ($\alpha\beta = \alpha'\beta'$), elles peuvent se détruire;* enfin que, *si les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont respectivement uniformes au voisinage des points α et β, la fonction $f(z)$ est uniforme au voisinage du point $\alpha\beta$.*

A la fin du Mémoire est énoncée une généralisation des résultats précédents. On considère un nombre quelconque de séries de Taylor

$$\varphi(z) = \sum a_n z^n, \quad \psi(z) = \sum b_n z^n, \quad \ldots, \quad \omega(z) = \sum l_n z^n,$$

qui sont censées représenter toutes des fonctions méromorphes et un polynome *quelconque* P $(a, b, \ldots, l)$. *La série*

$$f(z) = \sum \mathrm{P}(a_n, b_n, \ldots, l_n) z^n$$

représente une fonction méromorphe.

Cette généralisation a été suggérée par une Communication de M. Leau, qu'on trouvera développée ci-après (même Recueil, p. 267-270).

Maillet. — Des groupes transitifs de substitution de degré N et de classe N — 1. (249-259).

Suite des recherches publiées par l'auteur sur ces groupes, dans sa Thèse de Doctorat et dans le *Bulletin de la Société mathématique* (t. XXV, p. 16 et suiv.; 1897).

Combebiac. — Sur l'application du calcul des biquaternions à la Géométrie plane. (259-263)

Hadamard. — **Sur la généralisation du théorème de Guldin. (264-265).**

Il s'agit de la proposition de M. Kœnigs, d'après laquelle le volume engendré par une portion de surface quelconque, dans un déplacement quelconque, peut se représenter par le moment mutuel de deux systèmes de segments dont l'un, S, ne dépend que de la forme de la surface mobile, tandis que l'autre, Σ, ne dépend que de la loi du déplacement.

L'auteur rend cette proposition intuitive en rapprochant l'expression connue du travail élémentaire d'un système de forces sur un solide invariable, et l'expression $p\,dv$ du travail accompli par une pression uniforme p normale à une surface qui, en se déplaçant, décrit un élément de volume dv. En même temps, il met en évidence la nature du système S qui est le *système résultant de segments normaux à la surface mobile en ses différents points et égaux aux éléments de surface correspondants.*

Appell (P.). — Sur les équations de Lagrange et le principe d'Hamilton. (265-267).

On sait que certaines liaisons ne peuvent être exprimées en termes finis. Les équations de Lagrange ne peuvent, en général, être appliquées aux systèmes qui comportent de telles liaisons. L'auteur indique à quel point de la démonstration on est arrêté par l'existence de ces liaisons, quand on cherche à déduire les équations de Lagrange du principe d'Hamilton.

Leau. — Extension d'un théorème de M. Hadamard à l'étude des séries de Taylor. (267-270).

Il s'agit du théorème que nous avons rappelé à propos du travail de M. Borel, analysé ci-dessus. On généralise cette proposition en considérant plusieurs séries dont les coefficients soient pour l'une a_i, pour les autres b_i, ..., pour la dernière l_i ($i = 0, 1, 2, \dots$), et formant la série


[redacted]

Laisant. — Coordonnées polaires symétriques. (271-

L'auteur recommande, pour rendre les coordonnées polaires de [illegible] s pratiques, d'en employer quatre, savoir : le rayon vecteur et ses trois [illegible] directeurs α, β, γ, liés par la relation $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES. Journal des candidats aux Écoles spéciales, à la Licence et à l'Agrégation, dirigé par MM. C.-A. LAISANT et X ANTOMARI (1). — 3e série.

Tome XVII; 1898.

Petersen (*I.*). — Démonstration d'un théorème relatif à l'intégration d'expressions différentielles algébriques et d'équations différentielles algébriques sous forme finie. (6-23).

Étude de la question suivante :

« Quelle forme une expression différentielle algébrique doit-elle avoir pour qu'il soit possible de représenter son intégrale au moyen de fonctions algébriques et logarithmiques, sous forme finie? »

Abel a résolu cette question dans des cas particuliers, et l'auteur montre qu'elle est, elle-même, un cas particulier d'une question plus générale.

Cet Article est la traduction, par M. L. Laugel, d'un Travail paru en 1878.

Michel (*C.*). — Sur la règle des analogies de M. Lemoine. (24-43).

Sous le nom de *transformation continue*, M. E. Lemoine a signalé la découverte d'un remarquable principe général concernant les analogies que présentent entre elles les relations métriques entre les segments et les angles qu'on peut déduire géométriquement d'un triangle.

L'auteur se propose de donner, de ce principe, un énoncé précis et une démonstration entièrement satisfaisante. Il reproduit, en la complétant, la démonstration qu'il avait publiée en 1893, et, abordant ensuite la question par une voie différente, il est conduit à une transformation des angles et des côtés qui n'est pas celle de M. Lemoine, mais qui en a toutes les propriétés.

d'Ocagne (*M.*). — Construction de la perspective conique d'une sphère. (44-46).

Duporcq (*E.*). — Deuxième Concours des *Nouvelles Annales* pour 1897. (53-64).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XVII$_2$, p. 204; t. XIX$_2$, p. 117; t. XX$_2$, p. 47 et 209; t. XXIII$_2$, p. 37.

Propriétés diverses de la cubique équilatère (cubique gauche dont les trois asymptotes sont deux à deux rectangulaires) et du tétraèdre orthocentrique (tétraèdre dont les arêtes opposées sont orthogonales).

Hurwitz (*A*.). — Sur les formes arithmétiques linéaires à coefficients réels quelconques. (64-74). (Traduct. Laugel).

Nouvelle démonstration d'un théorème énoncé et démontré par M. Minkowski :

Dans n formes linéaires homogènes entières à n variables, à coefficients réels quelconques et de déterminant Δ différent de zéro, on peut toujours donner aux variables des valeurs numériques entières qui ne soient pas toutes nulles et telles que chacune des formes ait une valeur absolue inférieure ou égale à $\sqrt[n]{\text{abs.}\,\Delta}$.

Gallucci (*G*.). — Sur une propriété focale des coniques. (74-75).

Deux tangentes quelconques d'une conique et les perpendiculaires abaissées des foyers sur ces tangentes touchent une autre conique.

Lémeray (*E.-M*.). — Sur la convergence des substitutions uniformes. (75-80).

Suite à l'article sur le même sujet inséré dans le précédent Volume.

Gravé (*D*.). — Sur les expressions dites *surpuissances*. (80-91).

Dans le Mémoire intitulé *De formulis exponentialibus replicatis* (*Acta Petrop.*, 1777), Euler traite le problème suivant :

« Soient les relations $\omega_1(x) = a^x$, $\omega_2(x) = a^{a^x}$, $\omega_3(x) = a^{a^{a^x}}$, ..., où $a > 0$, trouver la limite $\Omega(x)$ vers laquelle tend $\omega_n(x)$. »

Comme Euler ne démontre pas sa solution, d'ailleurs complète, l'auteur s'est donné pour but d'exposer les résultats d'Euler avec les démonstrations néces- [redacted]

d'Ocagne (*M.*). — Sur la détermination des courb équation entre les distances tangentielles de leurs p courbes données. (115-118).

Les courbes ici étudiées ont pour équation

$$F(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0,$$

$l_1, l_2, \ldots, l_n$ désignant les distances tangentielles du point A aux courbes (M_1), (M_2), ..., (M_n).

Ravut (*L.*). — Remarques sur une matrice. (118-120).

Soit une matrice S dont la si ... que l'on a, pour équation identiqu ... cette ... — 1)

Weill (*E.*). — Quelques remarques sur le théorème cernant les polyèdres. (120-128).

Théorème d'Euler. — Polyèdres eulériens (c'est-à-dire auxquels le théorème d'Euler est applicable. — Généralisation du théorème d'Euler.

Malo (*E.*). — Remarque au sujet de la question de Concours des *Nouvelles Annales* en 1896. (128-129).

Interprétation géométrique des racines d'un polynome $R(x)$ du quatrième degré.

Grossetête. — Agrégation des Sciences mathématiques; Concours de 1896. Solution de la question de Mathématiques élémentaires (130-137).

Propriétés de sphères orthogonales.

Lagoutinsky (*M.*). — Sur une intégrale d'un problème sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible (149-153).

Nouvelle exposition de résultats déjà obtenus par M. C. Bourlet et par M. N. Saltykoff.

Haton de la Goupillière. — Notes bibliographiques. (153-155).

Additions aux Notes bibliographiques publiées par le même auteur, sur les spirales sinusoïdes ($r^n = \sin n\theta$), et sur l'astroïde $\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1\right)$.

École centrale des Arts et Manufactures. — Concours de 1897 (première Session). (177-179).

Deuxième Concours des « Nouvelles Annales » pour 1898. (197-201).

Énoncé de diverses propriétés de six points doubles, situés dans un même plan singulier, appartenant à la surface appelée *tétraédroïde* (transformée homographique générale de la surface de l'onde).

Dedekind (*R.*). — Sur les équations à coefficients rationnels. (201-204). (Traduct. Laugel).

Godefroy. — Sur les intégrales de Fresnel. (205-206).

Détermination de ces intégrales en évitant l'introduction du nombre *i*.

Piccioli (*H.*). — Note sur les géodésiques du cône. (207-209).

Nouvelle démonstration de deux propriétés de ces lignes : le long d'une géodésique du cône, le rapport des deux rayons de première et deuxième courbure est exprimé par une fonction linéaire de l'arc de la même ligne (Enneper); ces géodésiques ont les plans osculateurs à la même distance du sommet (G. Pirondini).

Kuscow. — Sur la généralisation des Théorèmes de Guldin. (209-215).

Application à la cubature de la vis à filet carré et de la vis à filet triangulaire.

Mangeot (*S.*). — Sur une nouvelle méthode de recherche des centres dans les courbes et surfaces algébriques. (215-218).

Fouyé (*E.*). — Agrégation des Sciences mathématiques (1896). Solution du problème de Mécanique rationnelle. (237-244).



Définition de quatre paramètres spéciaux qui peuvent servir de co
pour un point de l'ellipsoïde.

Candido (*G.*). — Conséquence d'un théorème sur les congru
pseudosphériques. (275-277).

Laurent (*H.*). — A propos de la définition du nombre. (277-280).

Réponse à une critique de la définition du nombre, formulée par M. J. Tannery dans le *Bulletin*, 1898 (p. 92), au cours du compte rendu de l'Ouvrage de M. Laisant, intitulé *La Mathématique*.

Moreau (*C.*). — Sur quelques théorèmes d')3-307).

Propriétés de l'indicateur et de l'indicateur réduit, avec les no es c pondant aux diverses valeurs de ce dernier de 1 à 100, pour les nomb moins jusqu'à 1000.

de Saint-Germain (*A.*). — Sur le mouvement d'une barre qui s'appuie sur deux droites dépolies (307-312).

La discussion complète du mouvement d'une barre pesante dont les extrémités sont assujetties à glisser respectivement sur deux droites fixes, rectangulaires, est extrêmement compliquée; mais, si l'on suppose la barre homogène, non pesante, et le coefficient de frottement identique sur les deux droites, la discussion devient facile.

Padé (*H.*). — Note sur la formule $\sin x = x \prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$. (312-314).

Simplification de la démonstration habituelle de la formule qui donne le développement en produit infini de $\sin x$ pour les valeurs réelles de x.

d'Ocagne (*M.*). — Sur les raccordements par arcs de cercle. (314-317).

Publication de résultats obtenus par l'auteur en 1884 et que M. Mannheim a rencontrés d'une autre façon, à propos de la construction de l'anse de panier (*Nouvelles Annales*, p. 404; 1897).

Fontené (*G.*). — Sur un système remarquable de n relations entre deux systèmes de n quantités. (317-328).

Ripert (*L.*). — Sur la discussion de l'équation des coniques. (329-331).

Tableau nouveau donnant l'espèce d'une conique et sa situation, tant par rapport à la droite de l'infini qu'à l'origine.

Concours général de 1898. (331).

Concours d'admission a l'École Polytechnique en 1898. (332-333).

Lacour (*E.*). — Représentation géométrique de l'invariant absolu et des covariants d'une forme biquadratique. (341-351).

Timerding (*H.-E.*). — Sur une certaine famille de courbes algébriques. (351-367).

Ces courbes, dites *courbes-puissances*, ont deux propriétés caractéristiques :
Elles sont transformées en elles-mêmes par le groupe de n^2 homographies particulières.
Leur hessienne se décompose en trois droites, les côtés du triangle de référence Δ comptés ($n-2$) fois.

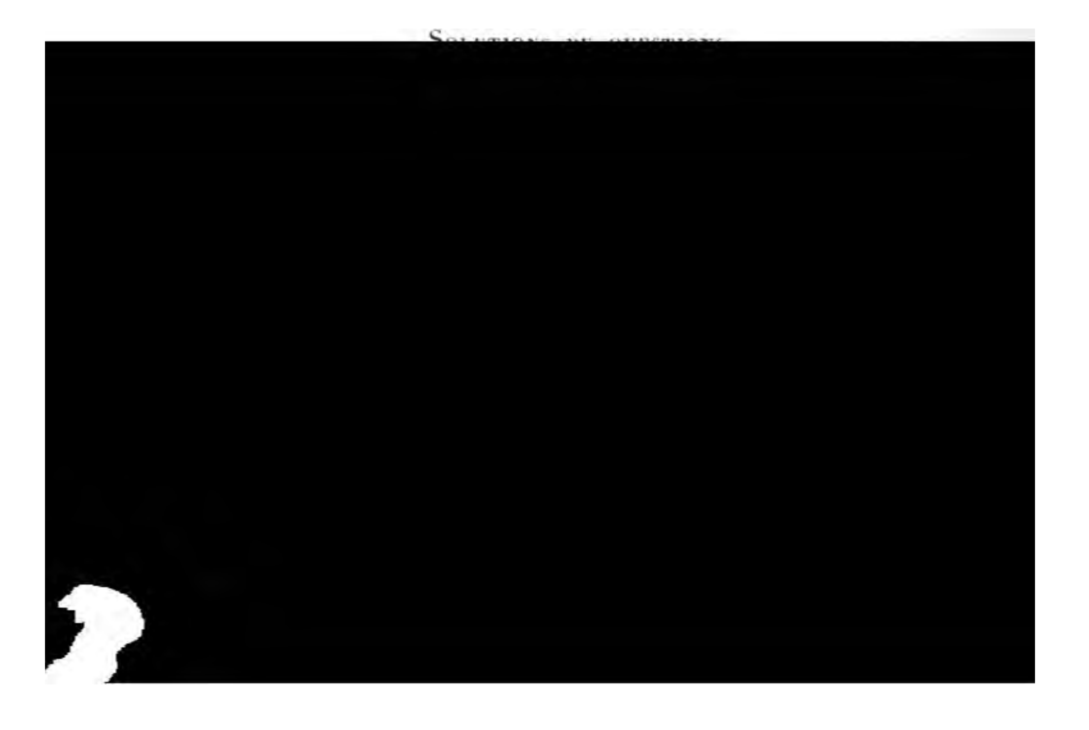
Iaggi (*E.*). — Sur les fonctions elliptiques de première espèce. (367-385).

Cette Note a pour but de montrer qu'on pourrait choisir, comme éléments de la théorie des fonctions elliptiques, deux fonctions présentant, par leurs propriétés analytiques, une analogie complète avec les fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$, en sorte que cette analogie pourra servir d'indication pour les recherches et les applications ultérieures.

Caspary (*F.*). — Application des méthodes de Grassmann. Centre de gravité d'un quadrilatère et d'un pentagone. (389-411).

L'auteur fait connaître, pour chacun de ces polygones, cinq constructions du centre de gravité.

[redacted]


[redacted]

2° Sur la propriété des nombres consécutifs 8 et 9
puissances exactes; 3° Sur une propriété des coniqu
une propriété de l'ellipse de Cassini; 5° Sur la défi
tétraèdres semblablement situés; 6° Sur une propri
cines d'une certaine équation; 7° Sur une propositi
tique.

Donon. — Ligne orthoptique de deux coniques confocales.

Sondat (P.). — Relation entre les racines d'une équation du cinquième degré.

Dulimbert. — Propriété du parallélogramme.

Un abonné. — Inégalités algébriques.

Retali (V.) et *Mannheim (A.).* — Étude d'une certaine transformation quadratique rationnelle involutive.

Lez (H.). — Propriété du triangle formé par les perpendiculaires aux côtés d'un triangle donné aux points où il sont rencontrés par une transversale quelconque.

Buhl (A.) et ***Franel (J.).*** — Propriété de deux séries, d'être simultanément divergentes.

Destoux (J.). — Sur une certaine relation homographique entre deux variables imaginaires.

Lez (H.). — Lieu géométrique relatif à une ellipse et à des cercles.

Gardès. — Sur l'astronomie des Sélénites.

Lez (H.). — Mode de génération de la strophoïde droite.

Droz-Farny (A.). — Notes : 1° Sur une propriété des coniques; 2° Sur les cercles de Joachimsthal; 3° Sur les centres et foyers de certaines coniques osculatrices à une circonférence donnée en un point donné.

Barisien (*E.-N.*) et *Servais* (*C.*). — Enveloppe de certaines coniques.

En résumé, une trentaine de solutions, quinze questions anciennes réimprimées, vingt-six questions nouvelles proposées, et une liste des numéros des questions restées sans solution au 31 décembre 1898, donnent la mesure de l'importance que la Rédaction des *Nouvelles Annales* a fort justement continué d'attribuer à cette partie du programme de ses travaux.

La publication de ce choix des plus variés de questions, s'ajoutant à celles du certificat d'études supérieures, témoigne de la haute valeur des études mathématiques en France et ne peut manquer d'exercer la plus heureuse influence sur le développement et le succès de leur enseignement.

H. B.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXIII.



TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXIII; 1899. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles; de 1890 à 1894. — 132-136, 144-148. — 186-194.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. 3e série, t. XIV, 1897. — 48-75.

Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; 1892, 1893, 1896; t. MDCCXCVII. — 140, 222.

Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. T. II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X; de 1890 à 1898. — 223-240.

Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres, et des Beaux-Arts de Belgique. 3e série, t. XXI, XXII, XXIII, XXIV, XXV, XXVI, XXVII, XXVIII, XXIX, XXX, XXXI, XXXII; de 1891 à 1896. — 127-130, 140-154, 207-213.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. XXVI, 1896. — 240-255.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. CXXV, 1897. — 75-87.

Mathesis. 2e et 3e série, t. I, II, III, IV, V, VI; de 1891 à 1896. — 137-139, 140-144, 194-207.

Mémoires couronnés et autres mémoires, publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. XLIV, LV, LII, LIII, XLVIII; de 1891 à 1896. — 131-132, 216-218, 220-221.

Mémoires couronnés et Mémoires des Savants étrangers, publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. LII, LIV, 1896. — 213-216.

Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége. 2e série, t. XVII, XVIII. 1892. — 155-156, 222-223.

Messenger (the) of Mathematics. T. XX, XXI, XXII, XXIII, XXIV, XXV, XXVI, XXVII; de 1893 à 1898. — 87-126.

Mémoires de l'Académie royale des Sciences, des Lettres, et des Beaux-Arts de Belgique. T. XLVIII, XLIX, LII; 1890-1894. — 154-155, 218-219.

Nouvelles Annales de Mathématiques. 3e série, t. XVI, XVII, 1897-98. — 37-48. 255-264.

Quarterly (the) Journal of pure and applied Mathematics. T. XXVII, XXVIII, XXIX; de 1895 à 1898. — 156-172.

Revue des questions scientifiques, 1re série, t. XXIX, XXX; 2e série, t. I, II, III IV, V, VI, 1891 à 1894. — 136, 148-149, 184-186.

Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 2e semestre 1896. — 5-36.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. 38e et 39e années 1893, 1894. — 173-184.



TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTE

TOME XXIII; 1899. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles; de 1890 à 1894. — 132-136, 144-148. — 186-194.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. 3e série, t. XIV, 1897. — 48-75.

Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; 1892, 1893, 1896; t. MDCCXCVII. — 140, 222.

Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. T. II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X; de 1890 à 1898. — 223-240.

Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres, et des Beaux-Arts de Belgique. 3e série, t. XXI, XXII, XXIII, XXIV, XXV, XXVI, XXVII, XXVIII, XXIX, XXX, XXXI, XXXII; de 1891 à 1896. — 127-130, 149-154, 207-213.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. XXVI, 1896. — 240-255.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. CXXV, 1897. — 75-87.

Mathesis. 2e et 3e série, t. I, II, III, IV, V, VI; de 1891 à 1896. — 137-139, 140-144, 194-207.

Mémoires couronnés et autres mémoires, publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. XLIV, LV, LII, LIII, XLVIII; de 1891 à 1896. — 131-132, 216-218, 220-221.

Mémoires couronnés et Mémoires des Savants étrangers, publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. LII, LIV, 1896. — 213-216.

26723 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD,
BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KOENIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE,
MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXIII. — JANVIER 1899.

(TOME XXXIV DE LA COLLECTION.)



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

La Rédaction du *Bulletin*, dans l'intérêt de la régularité de la publication et d'une bonne correction des épreuves, et, plus encore, en vue d'épargner à l'imprimerie des frais considérables autant qu'inutiles de remaniements, prie instamment ses collaborateurs d'apporter toujours le plus grand soin possible dans l'exécution matérielle de leurs manuscrits, surtout en ce qui concerne les formules mathématiques et la transcription des noms propres. Il est à désirer que la disposition des articles soit conforme à celle qui a été adoptée une fois pour toutes dans les livraisons déjà publiées dans la 2e Série du Recueil. Par exemple, dans les articles de *Comptes rendus et Analyses des Ouvrages et Mémoires*, le titre de chaque travail analysé devra être donné dans la langue originale, avec les indications bibliographiques nécessaires. La traduction française de ce titre ne sera indispensable que pour les Ouvrages écrits dans une langue peu répandue dans l'Europe occidentale, et alors sera mise au bas de la page.

in-8 de vi-168 pages, avec un portrait d'Abel ; 1885 ....

ANDOYER (H.), Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de
Leçons élémentaires sur la Théorie des formes et ses appli
géométriques, à l'usage des candidats à l'Agrégation des Sciences
matiques. Un vol. in-4° autographié de vi-184 pages ; 1898 ....

AOUST (l'Abbé), Professeur à la Faculté des Sciences de Marseill

Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface
conque. In-8, avec figures ; 1869...................

Analyse infinitésimale des courbes planes, contenant la ré
d'un grand nombre de Problèmes choisis, à l'usage des Candidats
cence ès sciences. In-8, avec 80 figures ; 1873............ 8 fr

Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace. Un fort volum
avec 40 figures ; 1876.........................

APPELL (Paul), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sc
et **GOURSAT (Édouard)**, Maître de Conférences à l'École Normale
rieure. — **Théorie des Fonctions algébriques et de leurs intég**
Étude des fonctions analytiques sur une surface de Riemann. Av
Préface de M. Ch. Hermite. Grand in-8, avec figures ; 1895. ......

APPELL (Paul), Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de
et **LACOUR (Émile)**, Maître de Conférences à l'Université de Nan
Principes de la Théorie des Fonctions elliptiques et applica
Grand in-8, avec figures ; 1896..........................

ARGAND (R.). — **Essai sur une manière de représenter les qua**
imaginaires dans les constructions géométriques. 2ᵉ édition, pr
[illegible]
(Laisant) ; 1874..

BOUCHARLAT (J.-L.). — **Éléments de Calcul différentiel et de**
intégral. [illegible]

TABLE DES NOMS D'AUTEURS.

Mélanges.

Revue des publications mathématiques

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXIII.

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, avec le concours de M...
Collet et *Borel*, docteurs ès Sciences. 27 volumes in-4.

Iʳᵉ Série : MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES EXTRAITS DES RECU...
L'ACADÉMIE DES SCIENCES. 12 vol. in-4.

IIᵉ Série : MÉMOIRES EXTRAITS DE DIVERS RECUEILS, OUVRAG...
SIQUES, MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE, MÉMOIRES...
SÉPAREMENT. 15 vol. in-4.

NOTA. — Les volumes ne seront pas publiés d'après leur classeme...
rique; on suivra l'ordre qui intéressera le plus les souscripteurs.

Liste des Volumes.

Iʳᵉ Série. — TOME I. Mémoires extraits des *Mémoires présentés pa...*
savants à l'Académie des Sciences. — TOMES II et III. Mémoires ex...
Mémoires de l'Académie des Sciences. — TOMES IV à XII. Notes et...
extraits des *Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Acad...*
Sciences.

IIᵉ Série. — TOME I. Mémoires extraits du *Journal de l'École P...*
nique. — TOME II. Mémoires extraits de divers Recueils : *Journal ...*
ville, Bulletin de Férussac, Bulletin de la Société philomathique,...
de Gergonne, Correspondance de l'École Polytechnique. — TOME II...
d'Analyse de l'École Polytechnique. — TOME IV. *Résumé des leç...*
nées à l'École Polytechnique sur le Calcul infinitésimal. — *Leço...*
Calcul différentiel. — TOME V. *Leçons sur les applications du Cal...*
nitésimal à la Géométrie. — TOMES VI à IX. *Anciens Exercices de...*
matiques. — TOME X. *Résumés analytiques de Turin.* — *Nouveaux...*
cices de Mathématiques, de Prague. — TOMES XI à XIV. *Nouveaux E...*
d'Analyse et de Physique. — TOME XV. *Mémoires séparés.* — *Table g...*

VOLUMES PARUS :

Iʳᵉ Série. — TOME I. *Théorie de la propagation des ondes à la...*
d'un fluide pesant, d'une profondeur indéfinie. — *Mémoire sur...*
grales définies; 188...

TOME IV, 1884; TOME V, 1885; TOME VI, 1888; TOME VII, 1891; T...
189.; TOME IX, 189.; TOME X, 189.; TOME XI, 189. *Extraits des...*
rendus de l'Académie des Sciences. Chaque volume...

IIᵉ Série. — TOME III, 1897. *Cours d'Analyse de l'École Poly...*
technique. TOME VI, 1887; TOME VII, 1889; TOME VIII, 1890; TOME I...
Anciens Exercices de Mathématiques (1ʳᵉ, 2ᵉ, 3ᵉ, 4ᵉ et 5ᵉ années)...

TOME X : *Résumés analytiques de Turin. Nouveaux exercices...*
(Mémoire sur la dispersion de la lumière). 189...
Chaque volume...

SOUSCRIPTION.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD,
BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KOENIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE,
MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXIII. — JANVIER 1899.

(TOME XXXIV DE LA COLLECTION.)



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

La Rédaction du *Bulletin*, dans l'intérêt de la régularité de la publication et d'une bonne correction des épreuves, et, plus encore, en vue d'épargner à l'Imprimerie des frais considérables autant qu'inutiles de remaniements, prie instamment ses collaborateurs d'apporter toujours le plus grand soin possible dans l'exécution matérielle de leurs manuscrits, surtout en ce qui concerne les formules mathématiques et la transcription des noms propres. Il est à désirer que la disposition des articles soit conforme à celle qui a été adoptée une fois pour toutes dans les livraisons déjà publiées dans la 2e Série du Recueil. Par exemple, dans les articles de *Comptes rendus et Analyses des Ouvrages et Mémoires*, le titre de chaque travail analysé devra être donné dans la langue originale, avec les indications bibliographiques nécessaires. La traduction française de ce titre ne sera indispensable que pour les Ouvrages écrits dans une langue peu répandue dans l'Europe occidentale, et alors sera mise au bas de la page.

ANDOYER (H.), Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de
— **Leçons élémentaires sur la Théorie des formes et ses applica**
géométriques, à l'usage des candidats à l'Agrégation des Sciences m
matiques. Un vol. in-4° autographié de VI-184 pages; 1898......

AOUST (l'Abbé), Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille

Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface
conque. In-8, avec figures; 1869.........................

Analyse infinitésimale des courbes planes, contenant la ré
d'un grand nombre de Problèmes choisis, à l'usage des Candidats à
cence ès sciences. In-8, avec 80 figures; 1873............ 8 fr.

Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace. Un fort volum
avec 40 figures; 1876...

APPELL (Paul), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sci
et **GOURSAT (Édouard)**, Maître de Conférences à l'École Normale
rieure. — **Théorie des Fonctions algébriques et de leurs intégr**
Études des fonctions analytiques sur une surface de Riemann. Ave
Préface de M. Ch. Hermite. Grand in-8, avec figures; 1895......

APPELL (Paul), Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de
et **LACOUR (Émile)**, Maître de Conférences à l'Université de Nanc
Principes de la Théorie des Fonctions elliptiques et applicat
Grand in-8, avec figures; 1896.................................

ARGAND (R.). — **Essai sur une manière de représenter les quan**
imaginaires dans les constructions géométriques. 2e édition, pré
d'une *Préface* par Hoüel, et suivie d'un *Appendice* contenant
Extraits des *Annales de Gergonne* relatifs à la question des i
naires. 1 volume petit in-8, avec figures; contenant la reprodu
photolithographique du titre de l'édition originale et d'un autograp
l'Auteur; 1874...

BOUCHARLAT (J.-L.). — **Éléments de Calcul différentiel et de C**
intégral. 8e édition, revue et annotée par M. *Laurent*, Répétiteur à l
Polytechnique. In-8, avec planches; 1881........................

Mélanges.

Revue des publications mathématiques.

LIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
LIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

IENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD,
BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KOENIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT,
MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
NTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXIII. — FÉVRIER 1899.

(TOME XXXIV DE LA COLLECTION.)



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
REAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

La Rédaction du *Bulletin*, dans l'intérêt de la régularité de la publication et d'une bonne correction des épreuves, et, plus encore, en vue d'épargner à l'imprimerie des frais considérables autant qu'inutiles de remaniements, prie instamment ses collaborateurs d'apporter toujours le plus grand soin possible dans l'exécution matérielle de leurs manuscrits, surtout en ce qui concerne les formules mathématiques et la transcription des noms propres. Il est à désirer que la disposition des articles soit conforme à celle qui a été adoptée une fois pour toutes dans les livraisons déjà publiées dans la 2e Série du *Bulletin*. Par exemple, dans les articles de *Comptes rendus et Analyses des Ouvrages et Mémoires*, le titre de chaque travail analysé devra être donné dans la langue originale, avec les indications bibliographiques nécessaires. La traduction française de ce titre ne sera indispensable que pour les Ouvrages écrits dans une langue peu répandue dans l'Europe occidentale, et alors sera mise au bas de la page.

Cauchy et Borel, docteurs ès Sciences. 27 volumes in-4.

Ire Série : MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES EXTRAITS DES RECUEIL
L'ACADÉMIE DES SCIENCES. 12 vol. in-4.

IIe Série : MÉMOIRES EXTRAITS DE DIVERS RECUEILS, OUVRAGES
SIQUES, MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE, MÉMOIRES PU
SÉPARÉMENT. 15 vol. in-4.

NOTA. — Les volumes ne seront pas publiés d'après leur classement c
rique; on suivra l'ordre qui intéressera le plus les souscripteurs.

Liste des Volumes.

Ire Série. — TOME I. Mémoires extraits des *Mémoires présentés par*
savants à l'Académie des Sciences. — TOMES II et III. Mémoires extrait
Mémoires de l'Académie des Sciences. — TOMES IV à XII. Notes et A
extraits des *Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académi*
Sciences.

IIe Série. — TOME I. Mémoires extraits du *Journal de l'École Poly*
nique. — TOME II. Mémoires extraits de divers Recueils : *Journal de*
ville, Bulletin de Férussac, Bulletin de la Société philomathique, An
de Gergonne, Correspondance de l'École Polytechnique. — TOME III. C
d'Analyse de l'École Polytechnique. — TOME IV. *Résumé des leçons*
nées à l'École Polytechnique sur le Calcul infinitésimal. — *Leçons s*
Calcul différentiel. — TOME V. *Leçons sur les applications du Calcul*
nitésimal à la Géométrie. — TOMES VI à IX. *Anciens Exercices de M*
matiques. — TOME X. *Résumés analytiques de Turin.* — *Nouveaux E*
cices de Mathématiques, de Prague. — TOMES XI à XIV. *Nouveaux E*
d'Analyse et de Physique. — TOME XV. *Mémoires séparés.* — *Table gén*

VOLUMES PARUS.

Ire Série. — TOME I : *Théorie de la propagation des ondes à la su*
d'un fluide pesant, d'une profondeur indéfinie. — *Mémoire sur les*
grales définies; 1882..

TOME IV, 1884; TOME V, 1885; TOME VI, 1888; TOME VII, 1892; TOME
1893; TOME IX, 1896; TOME X, 1897; TOME XI, 1899 : *Extraits des Co*
rendus de l'Académie des Sciences. Chaque volume..............

IIe Série. — TOME III, 1897. *Cours d'Analyse de l'École royale*
technique. TOME VI, 1887; TOME VII, 1889; TOME VIII, 1890; TOME IX,
Anciens Exercices de Mathématiques (1re, 2e, 3e, 4e et 5e années).

TOME X : *Résumés analytiques de Turin. Nouveaux exercices de Pr*
(Mémoire sur la dispersion de la lumière). 1895..................
Chaque volume..

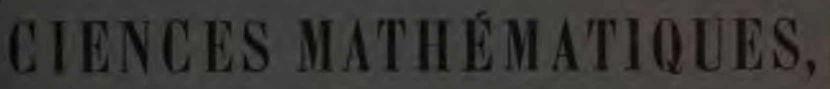
SOUSCRIPTION.

IIe Série. — TOME IV : *Résumé des Leçons données à l'École Poly*

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES



SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD,
BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KOENIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT,
MANSION, A. MARRE, MOLK, POKROVSKY, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXIII. — MARS 1899.

(TOME XXXIV DE LA COLLECTION.)



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

La Rédaction du *Bulletin*, dans l'intérêt de la régularité de la publication et d'une bonne correction des épreuves, et, plus encore, en vue d'épargner à l'Imprimerie des frais considérables autant qu'inutiles de remaniements, prie instamment ses collaborateurs d'apporter toujours le plus grand soin possible dans l'exécution matérielle de leurs manuscrits, surtout en ce qui concerne les formules mathématiques et la transcription des noms propres. Il est à désirer que la disposition des articles soit conforme à celle qui a été adoptée une fois pour toutes dans les livraisons déjà publiées dans la 2e Série du Recueil. Par exemple, dans les articles de *Comptes rendus et Analyses des Ouvrages et Mémoires*, le titre de chaque travail analysé devra être donné dans la langue originale, avec les indications bibliographiques nécessaires. La traduction française de ce titre ne sera indispensable que pour les Ouvrages écrits dans une langue peu répandue dans l'Europe occidentale, et alors sera mise au bas de la page.

Extrait de l'Avertissement.

« L'Académie, sur le Rapport de la Section d'Astronomie et de la Com
sion administrative, après avoir pris connaissance des conditions dan
quelles devait s'accomplir le travail et des soins dont il était entouré, a d
dans sa séance du 16 juillet 1877, que la nouvelle édition serait publiée
les auspices et sous sa responsabilité. »

Les éditions précédentes, qui sont devenues très rares, ne contenaien
7 Volumes, savoir : *Traité de Mécanique céleste* (5 volumes), *Expo
du système du Monde* et *Théorie analytique des probabilités*. La nou
édition comprendra de plus 6 Volumes, renfermant tous les autres Mém
de Laplace, dont la dissémination dans de nombreux Recueils académ
et périodiques en rendait jusqu'à ce jour l'étude si difficile.

Traité de Mécanique céleste. Tomes I à V (1878-1882).

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace; 5 vol. in-4.....
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace (à petit nombre);
5 vol. in-4..

Les Tomes II, III et V, papier vergé, se vendent séparément
Les Tomes II à V, papier hollande, se vendent séparément ......

Exposition du système du monde. Tome VI (1884).

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace.. ....
Tirage sur papier de Hollande au chiffre de Laplace ....

Théorie des probabilités. Tome VII (1886).

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace..........
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace...........

Ce Volume, qui comprend 832 pages sur papier fort, est d'un mani
peu facile pour les lecteurs qui veulent faire une longue étude de la *Th
des probabilités*; aussi nous avons divisé un certain nombre d'exemp
en deux fascicules. Pour permettre de relier ultérieurement ces deux
cules en un volume unique, nous avons joint au premier fascicule un ti
l'Ouvrage complet. — Les fascicules se vendent séparément :

Premier fascicule.

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace.. ..
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace ..

Second fascicule.

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace ..
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace.. ..

Mémoires divers. Tomes VIII à XIII.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

LAGRANGE. — Œuvres complètes de Lagrange, publiées par les soins de *J.-A. Serret* et *G. Darboux*, Membres de l'Institut, sous les auspices du MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE. In-4, avec un beau portrait de Lagrange, gravé sur cuivre par Ach. Martinet.

La Ire **Série** comprend tous les *Mémoires* imprimés dans les *Recueils des Académies de Turin, de Berlin et de Paris*, ainsi que les *Pièces diverses* publiées séparément. Cette série forme 7 volumes (Tomes I à VII; 1867-1877), qui se vendent séparément .... 30 fr.

La IIe **Série** se compose de 7 volumes, qui renferment les Ouvrages didactiques, la Correspondance et les Mémoires inédits; savoir :

Tome VIII : *Résolution des équations numériques*; 1879 .... 18 fr.

Tome IX : *Théorie des fonctions analytiques*; 1881 .... 18 fr.

Tome X : *Leçons sur le calcul des fonctions*; 1884 .... 18 fr.

Tome XI : *Mécanique analytique*, avec Notes de J. BERTRAND et G. DARBOUX (1re PARTIE : *Statique*); 1888 .... 20 fr.

Tome XII : *Mécanique analytique*, avec Notes de J. BERTRAND et G. DARBOUX (2e PARTIE : *Dynamique*); 1889 .... 20 fr.

Tome XIII : *Correspondance inédite de Lagrange et d'Alembert*, publiée d'après les manuscrits autographes et annotée par LUDOVIC LALANNE. In-4; 1882 .... 15 fr.

Tome XIV et dernier : *Correspondance de Lagrange avec Condorcet, Laplace, Euler et divers savants*, publiée et annotée par LUDOVIC LALANNE, avec deux fac-similés; 1892 .... 15 fr.

LAMÉ (G.), Membre de l'Institut. — **Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes.** In-8, avec figures; 1857 .... 5 fr.

LAMÉ (G.). — **Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications.** In-8, avec figures; 1859 .... 5 fr.

LAMÉ (G.). — **Leçons sur la théorie analytique de la chaleur.** In-8, avec figures; 1861 .... 6 fr. 50 c.

LAURENT (H.), Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — **Traité d'Analyse.** 7 volumes in-8, avec figures .... 73 fr.

TOME I. — **Calcul différentiel.** *Applications analytiques*; 1885. 10 fr.

TOME II. — *Applications géométriques*; 1887 .... 12 fr.

TOME III. — **Calcul intégral.** *Intégrales définies et indéfinies*, 1888 .... 12 fr.

TOME IV. — *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*; 1889 .... 12 fr.

TOME V. — *Équations différentielles ordinaires*; 1890 .... 10 fr.

TOME VI. — *Équations aux dérivées partielles*; 1890 .... 8 fr. 50 c.

TOME VII ET DERNIER. — *Applications géométriques de la théorie des équations différentielles*; 1891 .... 8 fr. 50 c.

TABLE DES MATIÈRES.

MARS 1899.

Comptes rendus et Analyses.

Mélanges.

Revue des publications mathématiques.

26728 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAÏEFF, BROCARD,
BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KOENIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT,
MANSION, A. MARRE, MOLK, POKROVSKI, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXIII. — AVRIL 1899.

(TOME XXXIV DE LA COLLECTION.)



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

La Rédaction du *Bulletin*, dans l'intérêt de la régularité de la publication et d'une bonne correction des épreuves, et, plus encore, en vue d'épargner à l'Imprimerie des frais considérables autant qu'inutiles de remaniements, prie instamment ses collaborateurs d'apporter toujours le plus grand soin possible dans l'exécution matérielle de leurs manuscrits, surtout en ce qui concerne les formules mathématiques et la transcription des noms propres. Il est à désirer que la disposition des articles soit conforme à celle qui a été adoptée une fois pour toutes dans les livraisons déjà publiées dans la 2e Série du Recueil. Par exemple, dans les articles de *Comptes rendus et Analyses des Ouvrages et Mémoires*, le titre de chaque travail analysé devra être donné dans la langue originale, avec les indications bibliographiques nécessaires. La traduction française de ce titre ne sera indispensable que pour les Ouvrages écrits dans une langue peu répandue dans l'Europe occidentale, et alors sera mise au bas de la page.

SÉPARÉMENT. 15 vol. in-4.

VOLUMES PARUS :

Iʳᵉ Série. — Tome I, 1882 (*Théorie de la propagation des ondes à la* *d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie. — Mémoire* *intégrales définies*). — Tome IV, 1884. Tome V, 1885. To 1888. Tome VII, 1891. Tome VIII, 1893. Tome IX, 1896. T 1897. Tome XI, 1898 (*Extraits des Comptes rendus de l'A* *des Sciences*). Chaque volume. ....

IIᵉ Série. — Tome III, 1897 (*Cours d'Analyse de l'École royale Polytechn* — Tome IV, 1899 (*Résumé des Leçons données à l'École P* *nique sur le Calcul infinitésimal. Leçons sur le Calcul différ* — Tome VI, 1887. Tome VII, 1889. Tome VIII, 1890. To 1891 (*Anciens Exercices de Mathématiques*, 1ʳᵉ, 2ᵉ, 3ᵉ, 4ᵉ, née). — Tome X, 1895. *Résumés analytiques de Turin. No* *Exercices de Prague* (*Mémoire sur la dispersion de la lu* Chaque volume. ....

SOUSCRIPTION.

Iʳᵉ Série. — Tome XII. *Extraits des Comptes rendus de l'Académ* *Sciences*. ....

Ce volume, qui paraîtra dans le cours de 1900, est mis en souscr La prix en est réduit, pour les souscripteurs qui feront leur versem l'avance, à. ....

DARBOUX (G.), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sci — **Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applic géométriques du Calcul infinitésimal.** 4 volumes grand in-8 figures, se vendant séparément (OUVRAGE COMPLET) :

Iʳᵉ PARTIE : *Généralités. — Coordonnées curvilignes. Surfaces mi* 1887. ....

IIᵉ PARTIE : *Les congruences et les équations linéaires aux dé* *partielles. — Des lignes tracées sur les surfaces*; 1889. ....

IIIᵉ PARTIE : *Lignes géodésiques et courbure géodésique. Inv* *différentiels. Déformation des surfaces*; 1894. ....

IVᵉ PARTIE : *Déformation infiniment petite et représentation* *rique*; 1896. ....

DARBOUX (**Gaston**), Membre de l'Institut, Doyen de la Facul Sciences et Professeur de Géométrie supérieure à l'Université de — Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées

Mélanges.

Revue des publications mathématiques.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD,
BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT,
MANSION, A. MARRE, MOLK, POKROVSKY, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL

CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXIII. — MAI 1899.

(TOME XXXIV DE LA COLLECTION.)



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

La Rédaction du *Bulletin*, dans l'intérêt de la régularité de la publication et d'une bonne correction des épreuves, et, plus encore, en vue d'épargner à l'imprimerie des frais considérables autant qu'inutiles de remaniements, prie instamment ses collaborateurs d'apporter toujours le plus grand soin possible dans l'exécution matérielle de leurs manuscrits, surtout en ce qui concerne les formules mathématiques et la transcription des noms propres. Il est à désirer que la disposition des articles soit conforme à celle qui a été adoptée une fois pour toutes dans les livraisons déjà publiées dans la 2e Série du Recueil. Par exemple, dans les articles de *Comptes rendus et Analyses des Ouvrages et Mémoires*, le titre de chaque travail analysé devra être donné dans la langue originale, avec les indications bibliographiques nécessaires. La traduction française de ce titre ne sera indispensable que pour les Ouvrages écrits dans une langue peu répandue dans l'Europe occidentale, et alors sera mise au bas de la page.

IQUES, MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE, MÉMOIRES PUB
SÉPARÉMENT. 15 vol. in-4.

VOLUMES PARUS :

Ire **Série**. — Tome I, 1882 (*Théorie de la propagation des ondes à la sur d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie. — Mémoire su intégrales définies*). — Tome IV, 1884. Tome V, [illegible]. Tome 1888. Tome VII, 1891. Tome VIII, 1893. Tome IX, [illegible]. Tom 1897. Tome XI, 1898 (*Extraits des Comptes rendus de l'Acad des Sciences*). Chaque volume.......................

IIe **Série**. — Tome III, 1897 (*Cours d'Analyse de l'École royale Polytechniq* — Tome IV, 1899 (*Résumé des Leçons données à l'École Poly nique sur le Calcul infinitésimal. Leçons sur le Calcul différent* — Tome VI, 1887. Tome VII, 1889. Tome VIII, 1890. Tome 1891. (*Anciens Exercices de Mathématiques*, 1re, 2e, 3e, 4e, 5e née). — Tome X, 1895. *Résumés analytiques de Turin. Nouv Exercices de Prague* (*Mémoire sur la dispersion de la lum* Chaque volume.......................

SOUSCRIPTION.

Ire **Série**. — Tome XII, *Extraits des Comptes rendus de l'Académie Sciences*.......................

Ce volume, qui paraîtra dans le cours de 1900, est mis en souscrip Le prix en est réduit, pour les souscripteurs qui feront leur versem l'avance, à.......................

DARBOUX (G.), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Scien — **Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applicat géométriques du Calcul infinitésimal**. 4 volumes grand in-8, figures, se vendant séparément (OUVRAGE COMPLET) :

Ire PARTIE : *Généralités. — Coordonnées curvilignes. Surfaces mini* 1887.......................

IIe PARTIE : *Les congruences et les équations linéaires aux dér partielles. — Des lignes tracées sur les surfaces*; 1889.......................

IIIe PARTIE : *Lignes géodésiques et courbure géodésique. Invari différentiels. Déformation des surfaces*; 1894.......................

IVe PARTIE : *Déformation infiniment petite et représentation rique*; 1896.......................

DARBOUX (**Gaston**). Membre de l'Institut, Doyen de la Facult

… à la Faculté des Sciences de Paris.

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche, pubbli-
cato per cura di Gino Loria.

Mélanges.

HATZIDAKIS (N.-J.). — Trois formules très générales relatives a…
courbes dans l'espace.

Revue des publications mathématiques.

The Messenger of Mathematics.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD,
BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KOENIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT,
S. MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME XXIII. — JUIN 1899.
(TOME XXXIV DE LA COLLECTION.)



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

La Rédaction du *Bulletin*, dans l'intérêt de la régularité de la publication et d'une bonne correction des épreuves, et, plus encore, en vue d'épargner à l'Imprimerie des frais considérables autant qu'inutiles de remaniements, prie instamment ses collaborateurs d'apporter toujours le plus grand soin possible dans l'exécution matérielle de leurs manuscrits, surtout en ce qui concerne les formules mathématiques et la transcription des noms propres. Il est à désirer que la disposition des articles soit conforme à celle qui a été adoptée une fois pour toutes dans les livraisons déjà publiées dans la 2e Série du Recueil. Par exemple, dans les articles de *Comptes rendus et Analyses des Ouvrages et Mémoires*, le titre de chaque travail analysé devra être donné dans la langue originale, avec les indications bibliographiques nécessaires. La traduction française de ce titre ne sera indispensable que pour les Ouvrages écrits dans une langue peu répandue dans l'Europe occidentale; et alors sera mise au bas de la page.

… Grand in-8, avec … figures; 189…

APPELL (Paul), Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de P… LACOUR (Émile), Maître de Conférences à l'Université de Nancy. — …cipes de la théorie des Fonctions elliptiques et applications. — Un … grand in-8, avec figures; 1897 ……

AUTONNE (Léon), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Docteur ès s… mathématiques, chargé des Conférences à la Faculté des Sciences d… — Sur la théorie des équations différentielles du premier ordre … premier degré; 1891 ……

AUTONNE (Léon), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Maître de Conf… à la Faculté des Sciences de Lyon, Lauréat de l'Institut. — Sur la rep…tation des courbes gauches algébriques et sur le nombre des con… qui expriment qu'une courbe algébrique est située sur une surfac…brique; 1890 ……

BERTRAND (J.), de l'Académie française, Secrétaire perpétuel de l'Aca…démie des Sciences. — Traité de Calcul différentiel et de Calcul in…

Calcul différentiel. In-4 de 816 pages, avec 108 figures; 1864 ……

Calcul intégral (*Intégrales définies et indéfinies*). In-4 de 720 pag… 88 figures; 1870 ……

BERTRAND (J.). — Calcul des probabilités. Grand in-8; 1889 … —

Dans ce Livre, on a cherché à faire reposer les résultats les plus … les plus célèbres du Calcul des probabilités sur les démonstrations l… simples. Bien peu de pages pourront embarrasser un lecteur familier … éléments de la Science mathématique. Si le signe ∫ s'introduit quelqu… suffit presque toujours d'en connaître la signification. — L'Auteur s'es… à l'occasion de chaque question, de marquer avec précision le degré d… tude des résultats et les limites nécessaires de la Science. La plupart … flexions suggérées par l'étude approfondie des questions souvent con… sées avaient été proposées dans un Travail antérieur, dégagé de toute … vention des signes algébriques; ce Travail est reproduit en tête de l'… et sert d'Introduction à l'examen complet des théories.

BLUTEL (E.), Professeur de Mathématiques spéciales au Prytanée m… Recherches sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coni… enveloppes de cônes du second degré (*Thèse d'Analyse*). In-4; 189…

BOREL (Émile), Maître de Conférences à l'École Normale supérie… Leçons sur la théorie des fonctions. Grand in-8; 1898 ……

Exposé des éléments de la théorie des ensembles avec des applicati…

TABLE DES MATIÈRES.

JUIN 1899.

Comptes rendus et Analyses.

Mélanges.

Revue des publications mathématiques.

26721 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, [illegible]

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD,
BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT,
MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXIII. — JUILLET 1899.

(TOME XXXIV DE LA COLLECTION.)



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

La Rédaction du *Bulletin*, dans l'intérêt de la régularité de la publication et d'une bonne correction des épreuves, et, plus encore, en vue d'épargner à l'Imprimerie des frais considérables autant qu'inutiles de remaniements, prie instamment ses collaborateurs d'apporter toujours le plus grand soin possible dans l'exécution matérielle de leurs manuscrits, surtout en ce qui concerne les formules mathématiques et la transcription des noms propres. Il est à désirer que la disposition des articles soit conforme à celle qui a été adoptée une fois pour toutes dans les livraisons déjà publiées dans la 2e Série du Recueil. Par exemple, dans les articles de *Comptes rendus et Analyses des Ouvrages et Mémoires*, le titre de chaque travail analysé devra être donné dans la langue originale, avec les indications bibliographiques nécessaires. La traduction française de ce titre ne sera indispensable que pour les Ouvrages écrits dans une …

Ire Série. — Tome I : *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un
fluide pesant, d'une profondeur indéfinie.* — *Mémoire sur les intégrales défin*
1882.. 25

Tome IV, 1884; Tome V, 1885; Tome VI, 1888; Tome VII, 1892; Tome V
1893; Tome IX, 1896; Tome X, 1897; Tome XI, 1899 : *Extraits*
Comptes rendus de l'Académie des Sciences. Chaque volume.... 25

IIe Série. — Tome III, 1897 : *Cours d'Analyse de l'École royale Polyte*
nique; Tome IV : *Résumé des Leçons données à l'École Polytechnique*
le Calcul infinitésimal. Leçons sur le Calcul différentiel; Tome VI, 18
Tome VII, 1889; Tome VIII, 1890; Tome IX, 1891 : *Anciens Exercices*
Mathématiques (1re, 2e, 3e, 4e et 5e années).

Tome X : *Résumés analytiques de Turin. Nouveaux exercices de Pra*
(Mémoire sur la dispersion de la lumière); 1895. Chaque volume. 25

SOUSCRIPTION.

Ire Série. — Tome XII : *Extraits des Comptes rendus de l'Académie*
Sciences...

Ce volume, qui paraîtra en 1900, est mis en souscription. Le prix
est réduit, pour les souscripteurs qui feront leur versement à l'avance, à
(Les anciens souscripteurs, qui désirent continuer leur souscription
avoir à se préoccuper des dates d'apparition des diverses parties de la Collect
n'auront qu'à envoyer, lorsqu'ils recevront un Volume, la somme de 20 fr.,
leur souscription au Volume suivant; et celui-ci leur sera expédié *franco*
son apparition.

EXTRAIT DE L'AVERTISSEMENT.

« L'Académie des Sciences a décidé la publication des *Œuvres de Ca*
et l'a confiée aux Membres de la Section de Géométrie. Cette publication
prendra, dans une première Série, les Mémoires extraits des Recueils de
cadémie, et, dans une seconde Série, les Mémoires publiés dans divers Recu
les Leçons de l'École Polytechnique, l'Analyse algébrique, les anciens
nouveaux Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, enfin les Mémo
séparés.

» Pour répondre à un désir souvent exprimé, l'Académie a voulu publier
médiatement, à la suite du premier Volume, les articles insérés dans les *Com*
rendus de 1836 à 1857, que leur dispersion rend si difficiles à retrouver
dont la réunion fera comme une œuvre nouvelle où revivra le génie du gé
Géomètre et qui ajoutera encore à l'éclat de son nom. Leur reproduction
faite en suivant l'ordre chronologique, sans notes ni commentaires, mais a
avoir été revue avec le plus grand soin, pour les corrections indispensables
les Membres de la Section de Géométrie, auxquels ont été adjoints MM. *Fa*
et *Collet*.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD,
BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KOENIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT,
MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXIII. — AOUT 1899.

(TOME XXXIV DE LA COLLECTION.)



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

La rédaction du *Bulletin*, dans l'intérêt de la régularité de la publication et d'une bonne correction des épreuves, et, plus encore, en vue d'épargner à l'imprimerie des frais considérables aussi qu'inutiles de remaniements, prie instamment ses collaborateurs d'apporter toujours le plus grand soin possible dans l'exécution matérielle de leurs manuscrits, surtout en ce qui concerne les formules mathématiques et la transcription des noms propres. Il est à désirer que la disposition des articles soit conforme à celle qui a été adoptée une fois pour toutes dans les livraisons déjà publiées dans la 2e Série du Bulletin. Par exemple, dans les articles de *Comptes rendus et Analyses des Ouvrages et Mémoires*, le titre de chaque travail analysé devra être donné dans la langue originale, avec les indications bibliographiques nécessaires. La traduction française de ce titre ne sera indispensable que pour les Ouvrages écrits dans des langues peu connues dans l'Europe occidentale, et alors sera mise au bas de la page.

IV° Partie. Déformation infiniment petite et représentation sphérique [illegible]

DARBOUX (G.). — **Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordon[nées] curvilignes.** 2 volumes grand in-8, avec figures, se vendant séparémen[t]

Tome I. Volume de [illegible] pages; 1898 .... 10 f[r.]

Tome II .... (En préparation.)

DARBOUX. — **Sur le problème de Pfaff.** Grand in-4; 1882 .... [illegible]

DELIGNE (A.). — **Notions complémentaires de mathématiques** (Voir [le Ca]talogue spécial des Cours de Mathématiques.)

D'ESCLAIBES (l'Abbé), ancien Élève de l'École Polytechnique. — **Sur [les] applications des fonctions elliptiques à l'étude des courbes du premi[er] genre.** (Thèse.) In-4; 1880 .... [illegible]

DORMOY (Émile). — **Traité du jeu de la bouillotte,** avec une Préface p[ar] *Francisque Sarcey.* Grand in-8; 1880 .... [illegible] fr. 75 [c.]

DUBOURGUET. — **Traités élémentaires de Calcul différentiel et de Calc[ul] intégral,** indépendants de toutes notions de quantités infinitésimales et de limites; [ouvrage] mis à la portée des commençants, et où se trouvent plusieurs nouvell[es] Théories et Méthodes fort simplifiées d'intégrations, avec des applications util[es] aux progrès des Sciences exactes. 2 vol. in-8; 1810 et 1811 .... [illegible] fr.

Le Tome I, *Calcul différentiel,* se vend séparément .... [illegible] fr.

DUHAMEL. — **Éléments de Calcul infinitésimal.** 4° édition, revue et annot[ée] par *J. Bertrand,* Membre de l'Institut. 2 volumes in-8, avec planches; 18[86]-1887 .... 15 fr.

EULER. — **Introduction à l'Analyse infinitésimale** (trad. du latin par Labe[y]), suivie de Notes et éclaircissements. 2 vol. in-4; 1835 .... [illegible] fr.

FAÀ DE BRUNO (le Chevalier Fr.), Docteur ès Sciences de l'Universit[é] de Paris, Professeur de Mathématiques à l'Université de Turin. — **Théori[e] générale de l'élimination.** Grand in-8; 1859 .... [illegible] fr. [illegible]

FAÀ DE BRUNO (le Chevalier Fr.). — **Traité élémentaire du Calcul de[s] Erreurs, avec des Tables stéréotypées;** Ouvrage utile à tous qui cultive[nt] les Sciences d'observation. In-8; 1869 .... [illegible] fr.

FAÀ DE BRUNO (le Chevalier Fr.). — **Théorie des formes binaire[s].** Un fort volume in-8; 1876 .... 10 fr.

FABRY (de), ancien Élève de l'École Polytechnique. — **Discussion de l[a] manière dont est présenté ordinairement le premier principe du Calc[ul] différentiel, et proposition d'une explication nouvelle de ce princip[e].** In-8; 1866 .... [illegible]

[F]AURE (A.). — **Essai sur la théorie et l'interprétation des quantités ima[gi]naires.** In-8; 1845 .... [illegible]

Revue des publications mathématiques.

Revue des questions scientifiques...
Bulletins de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et d
Beaux-Arts de Belgique...
Mémoires de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et d
Beaux-Arts de Belgique...
Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège...
The quarterly Journal of pure and applied Mathematics...

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

[illegible]

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD,
BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KOENIGS, LAISANT, [illegible],
MANSION, A. MARRE, MOLK, POKROVSKY, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.

sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXIII. — SEPTEMBRE 1899.

[illegible]



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

La Rédaction du *Bulletin*, dans l'intérêt de la régularité de la publication et d'une bonne correction des épreuves, et plus encore en vue d'épargner à l'Imprimerie des frais considérables autant qu'inutiles de remaniements, prie instamment ses collaborateurs d'apporter toujours le plus grand soin possible dans l'exécution matérielle de leurs manuscrits, surtout en ce qui concerne les formules mathématiques et la transcription des noms propres. Il est à désirer que la disposition des articles soit conforme à celle qui a été adoptée une fois pour toutes dans les livraisons déjà publiées dans la 2e Série du Recueil. Par exemple, dans les articles de *Comptes rendus et Analyses des Ouvrages et Mémoires*, le titre de chaque travail analysé devra être donné dans la langue originale, avec les indications bibliographiques nécessaires. La traduction française de ce titre ne sera indispensable que pour les Ouvrages écrits dans une langue peu répandue dans l'Europe occidentale, et alors [illegible] mise au bas de la page.

LAPLACE. — **Œuvres complètes de Laplace,** publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par les *Secrétaires perpétuels*, avec le concours de *Puiseux*, Membre de l'Institut, de *F. Tisserand*, Membre de l'Institut, de *J. Hoüel*, Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, et de *Souillart*, Professeur à la Faculté des Sciences de Lille, de *H. Poincaré*, Membre de l'Institut, de *Lebœuf*, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier. Nouvelle édition avec un beau portrait de Laplace, gravé sur cuivre par *Tony Gaulière*. In-4; 1878-189[illegible].

Tomes I à VI et VIII à XIII (voir *Catalogue spécial* d'Astronomie.)

Théorie des probabilités. Tome VII (1886).

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace........ 35 fr.
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace........ 45 fr.

Ce Volume qui comprend 8[illegible] pages sur papier fort est d'un maniement peu facile pour les lecteurs qui veulent faire une longue étude de la Théorie des probabilités; *aussi nous avons divisé un certain nombre d'exemplaires en deux fascicules. — Pour permettre de relier ultérieurement ces deux fascicules en un volume unique, nous avons joint au premier fascicule un titre de l'Ouvrage complet.* — Les fascicules se vendent séparément :

Premier Fascicule.

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace........ 15 fr.
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace........ 18 fr.

Second Fascicule.

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace........ 20 fr.
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace........ 25 fr.

LAQUIÈRE, ancien élève de l'École Polytechnique. — **Loi des hasards**, ou *Loi fondamentale de la théorie des probabilités appliquée aux Sciences expérimentales.* Grand in-8; 188[illegible]........ 1 fr. 50 c.

LAURENT (H.), Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — **Traité d'Analyse.** 7 volumes in-8, avec figures........ 73 fr.

Tome I. — **Calcul différentiel.** *Applications analytiques*; 1885........ 10 fr.
Tome II. — *Applications géométriques*; 1887........ 12 fr.
Tome III. — **Calcul intégral.** *Intégrales définies et indéfinies.* In-8, avec figures; 1888........ 10 fr.
Tome IV. — *Théorie des fonctions algébriques et leurs intégrales.* In-8, avec figures; 1889........ 12 fr.
Tome V. — *Équations différentielles ordinaires*; 1890........ 10 fr.
Tome VI. — *Équations aux dérivées partielles*; 1890........ 8 fr. 50 c.
Tome VII et dernier. — *Applications géométriques de la théorie des équations différentielles*; 1891........ 8 fr. 50 c.

Ce Traité est le plus étendu qui soit publié sur l'Analyse. Il est destiné aux personnes qui, n'ayant pas le moyen de consulter un grand nombre d'ouvrages, ont le désir d'acquérir des connaissances étendues en Mathématiques. Il contient donc, outre le développement des matières exigées des candidats à la Licence, le résumé des principaux résultats acquis à la Science. (Des astérisques indiquent les matières non exigées des candidats à la Licence.) Enfin, pour faire comprendre dans quel esprit est rédigé ce Traité d'Analyse, il suffira de dire que l'Auteur est un ardent disciple de Cauchy.

LAURENT (H.), Examinateur d'admission à l'École Polytechnique, Professeur à l'Institut national agronomique. — **Théorie des jeux de hasard.** Petit in-8 avec 10 figures; 1893.

Broché........ 2 fr. 50 | Cartonné........ 3 fr.

LAURENT (H.). — **Théorie élémentaire des fonctions elliptiques.** In-8, avec figures; 1880........ 3 fr. 50 c.

LAURENT (H.). — **Théorie des équations différentielles ordinaires simultanées.** In-8; 1871........ 1 fr. 75 c.

données α, β, ξ de M. Darboux..........

Revue des publications mathématiques.

Zeitschrift für Mathematik und Physik..........

Revue des questions scientifiques, publiée par la Société scientifique de Bruxelles..........

Annales de la Société scientifique de Bruxelles..........

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

UVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION

RÉDIGÉ PAR

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD,
BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KOENIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT,
MANSION, A. MARRE, MOLK, POKROVSKI, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME XXIII. — OCTOBRE 1899.
(TOME XXXIV DE LA COLLECTION.)



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

La Rédaction du *Bulletin*, dans l'intérêt de la régularité de la publication et d'une bonne correction des épreuv
l'Imprimerie des frais considérables autant qu'inutiles de remaniements, prie instamment ses collaborateurs d'appo
dans l'exécution matérielle de leurs manuscrits, surtout en ce qui concerne les formules mathématiques et la transc
que la disposition des articles soit conforme à celle qui a été adoptée une fois pour toutes dans les livraisons déj
Par exemple, dans les articles de *Comptes rendus et Analyses des Ouvrages et Mémoires*, le titre de chaque travail
originale, avec les indications bibliographiques nécessaires. La traduction française de ce titre ne sera indispensable
langue peu répandue dans l'Europe occidentale, et alors sera mise au bas de la page.

donnés a, b, c de M. Darboux...

H. POINCARÉ, Président;

G. BIGOURDAN; O. CALLANDREAU; H. DESLANDRES; R. RADA

Ce **Bulletin** est destiné à combler une lacune regrettable dans les Revues s
fiques françaises; aucune, en effet, jusqu'ici, n'était destinée *spécialement* aux *astro*
et aux *hommes de science* qui veulent se tenir au courant des progrès de l'Astro
La renaissance des études astronomiques en France rendait d'ailleurs cette publi
nécessaire, et le moment était venu de créer un organe de publicité qui permît
astronomes de faire connaître leurs travaux en temps utile, et qui leur donnât, a
nouvelles astronomiques, une analyse des principales publications périodiques
Ce Bulletin comprend donc deux parties distinctes, répondant à ces deux bes
première contient des observations présentant un intérêt d'actualité, faites dans
servatoires, pendant le mois précédent; des éphémérides de planètes ou de com
aussi des Mémoires ou des Notices sur diverses questions d'Astronomie théorique
tique. Dans la seconde Partie se trouvent une Revue aussi complète que possible de
les nouvelles astronomiques, et une analyse des principales publications périodi
des ouvrages nouvellement parus. Enfin, quand l'occasion s'en présente, une tr
Partie donne, sous le titre de *Variétés*, des articles sur des questions d'actualité
nant les sciences liées étroitement avec l'Astronomie, telles que la Physique d
la Géodésie, la Météorologie; on y traite aussi de points intéressants relatifs à l'h
de la Science.
Le **Bulletin** est assuré de l'active collaboration des astronomes français, qui y
y publier régulièrement, soit les Observations, soit les Notices ou Mémoires qu'ils
obligés d'envoyer auparavant à des journaux de l'étranger. L'entente commune
Bulletin établit entre les divers Observatoires leur donne en outre une précieuse
pour coordonner leurs travaux de la manière la plus utile aux progrès de la S
Enfin le Bulletin accepte aussi avec empressement les Observations et les Artic
voudront bien lui adresser les astronomes étrangers.
L'Observatoire de Paris soutiendra de tout son pouvoir l'œuvre utile et
fondée par MM. Mouchez et Tisserand, et nous espérons qu'elle contribuera au
loppement de la Science en général, et de l'Astronomie française en particulier.

Le **Bulletin** paraît chaque mois, depuis le mois de janvier 1884, par livraison d
feuilles et demie grand in-8 au moins. L'abonnement part de Janvier.

Prix pour un an (12 Numéros).

Paris	16 fr.
Départements et Union postale	18 fr.
Autres pays	20 fr.

Envoyer un mandat de poste ou une valeur sur Paris à M. GAUTHIER-VILL
éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris.

TABLE DES MATIÈRES.

OCTOBRE 1899.

Comptes rendus et Analyses.

Revue des publications mathématiques.

26723 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KOENIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXIII. — NOVEMBRE 1899.

(TOME XXXIV DE LA COLLECTION.)



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

LIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
BLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

IENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD,
BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT,
MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME XXIII. — DÉCEMBRE 1899.
(TOME XXXIV DE LA COLLECTION.)



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

La Rédaction du *Bulletin*, dans l'intérêt de la régularité de la publication et d'une bonne correction des épreuves, et, plus encore, en vue d'épargner à l'Imprimerie des frais considérables autant qu'inutiles de remaniements, prie instamment ses collaborateurs d'apporter toujours le plus grand soin possible dans l'exécution matérielle de leurs manuscrits, surtout en ce qui concerne les formules mathématiques et la transcription des noms propres. Il est à désirer que la disposition des articles soit conforme à celle qui a été adoptée une fois pour toutes dans les livraisons déjà publiées dans la 2e Série du Recueil. Par exemple, dans les articles de *Comptes rendus et Analyses des Ouvrages et Mémoires*, le titre de chaque travail analysé devra être donné dans la langue originale, avec les indications bibliographiques nécessaires. La traduction française de ce titre ne sera indispensable que pour les Ouvrages écrits dans une langue peu répandue dans l'Europe occidentale, et alors sera mise au bas de la page.

C.-A. LAISANT, | ÉMILE LEMOINE,
Docteur ès sciences. | Ingénieur civil.

Anciens Élèves de l'École Polytechnique.

PRIX POUR UN AN (12 NUMÉROS) :

Paris, 7 fr. — Départements et Union postale, 8 fr. 50.

Un numéro spécimen est envoyé sur demande.

MM. *Laisant* et *Lemoine* ont eu l'idée de mettre en rapport scienti
mathématiciens, au moyen d'un organe international dont le titre,
MÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS, indique le but. Ce recueil mensuel
d'autres articles que des questions posées par les mathématiciens
collègues, soit pour en indiquer l'intérêt général, soit pour les bes
leurs recherches personnelles, et les réponses à ces questions. La Mathém
est si vaste maintenant que nul n'en connaît complètement même
branches et qu'une question de détail peut arrêter longtemps un sav
premier ordre, si ce détail sort du cadre de ses études ordinaires,
qu'elle ne serait qu'un jeu pour un autre.

Cette publication répond évidemment à un besoin, car, dès que les
teurs se sont occupés d'obtenir dans leurs relations les questions qui
raient les premiers numéros, et de les communiquer autour d'eux, pou
quelques réponses dès l'origine, ils ont trouvé un accueil qui a dépass
espérances les plus optimistes, sa liste des correspondants effectifs du j
liste déjà longue, comprend les noms de membres de l'Institut,
grand nombre de géomètres connus, mêlés à beaucoup d'autres moins
car le but et l'essence même de l'*Intermédiaire des mathématici*
d'être utile *à tous ceux qui cultivent la Mathématique*. L'idée était
velle que les rédacteurs de l'*Intermédiaire* n'ont dû viser que des
très modestes, puisque le prix annuel de l'abonnement n'est que de
pour Paris, 8 fr. 50 pour la province et les pays de l'Union postal

On peut adresser les questions et communications soit à M. Laisan
avenue Victor-Hugo, soit à M. Lemoine, 5?, avenue du Maine, soit
diteur.

Chacun des Volumes des années précédentes (depuis 1894) se vend....

LAISANT (C.-A.), et **LEMOINE (E.)**, Directeurs de l'*Intermédiair*
Mathématiciens. — **Traité d'Aritmétique**, suivi de *Notes sur l'Orth*
simplifiée, par P. MALVEZIN, Directeur de la Société filologique fra
Petit in-8, en caractères elzévirs et titre en deux couleurs; 1895.

120

TABLE DES MATIÈRES.

DÉCEMBRE 1899.

Comptes rendus et Analyses.

Mélanges.

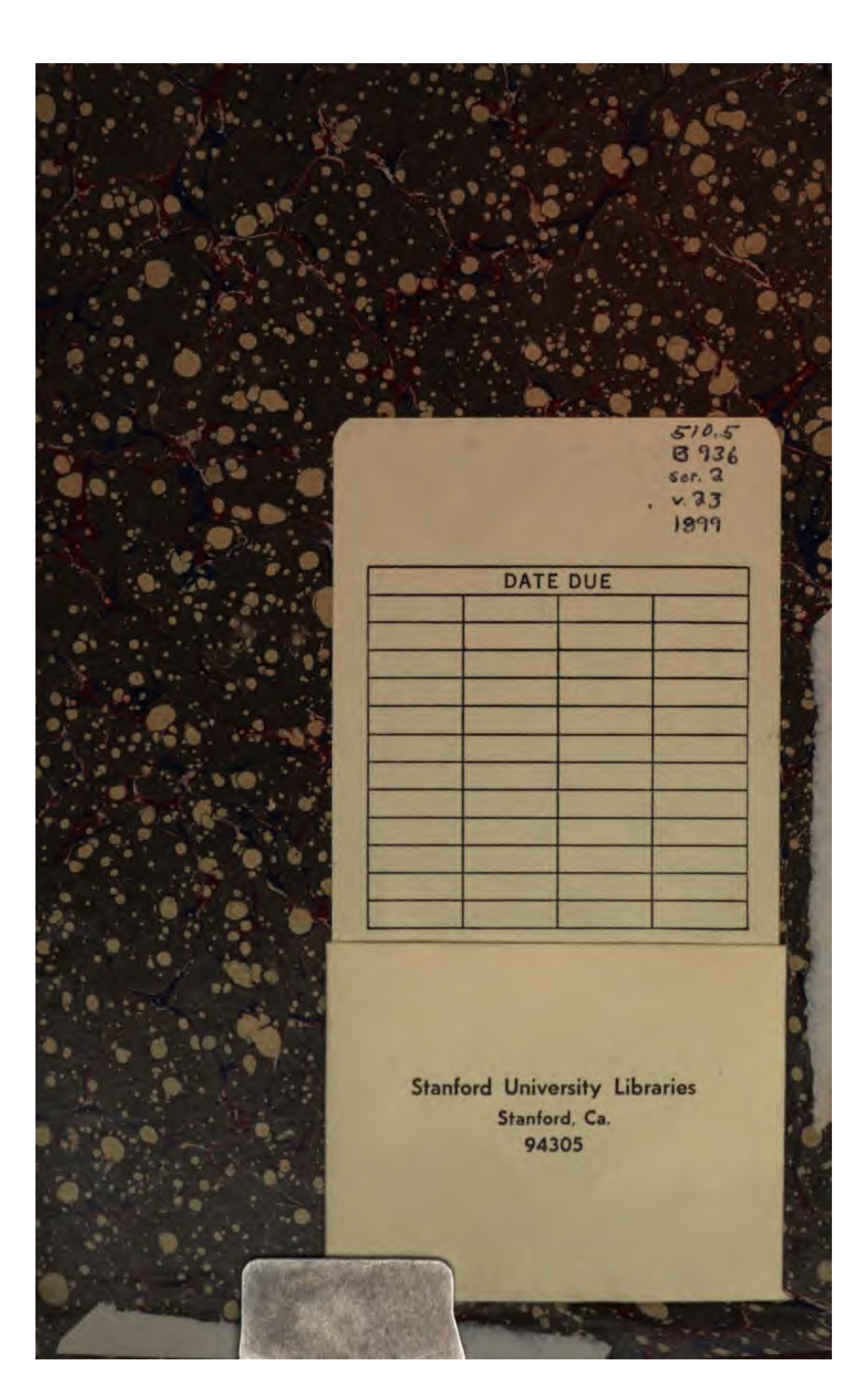
Revue des publications mathématiques.

26723 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.







510.5
B936
ser. 2
v.23
1899
DATE DUE
Stanford University Libraries
Stanford, Ca.
94305

